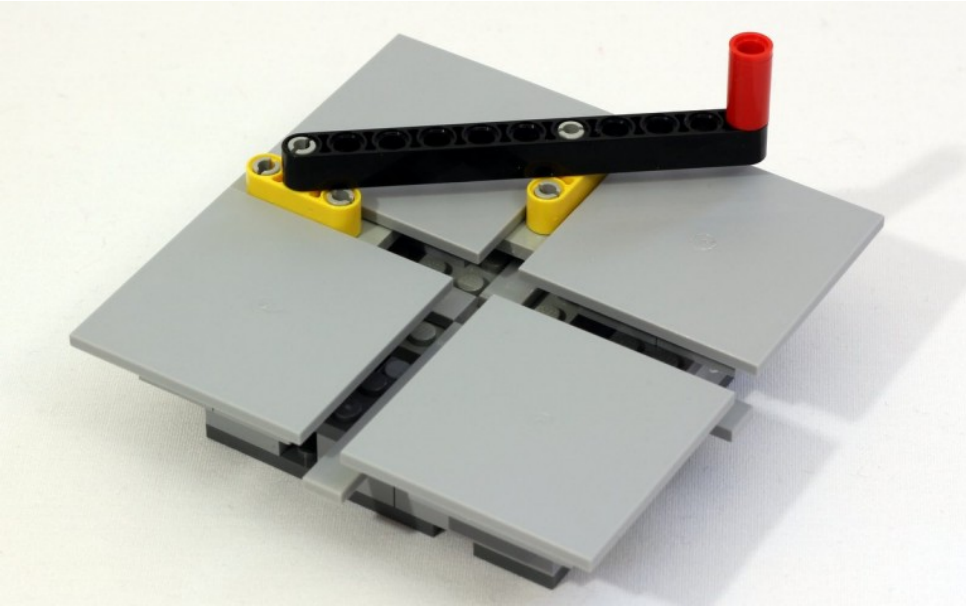


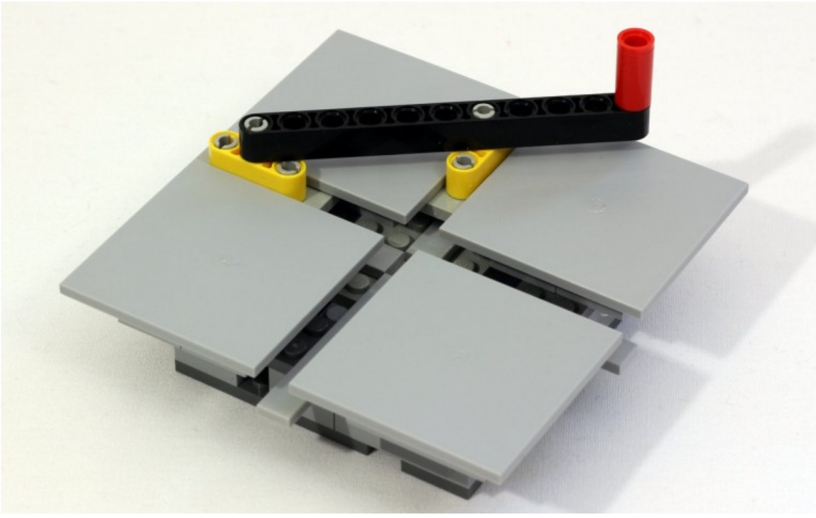
Rencontre d'un jardinier et d'un menuisier à propos de tracés d'ovales

M. Daniel Poisson

L'idée est venue de ma découverte dans un musée de Florence d'un ellipsographe d'Archimède utilisé par les tailleurs de pierres dures pour tracer des ovales. Je propose dans cet article plusieurs activités adaptées à des public de différents niveaux, la fiche initiale proposé en formation d'adulte, proposait de faire dialoguer un tailleur de pierres dures avec un jardinier pour qu'il trace la même ellipse, le jardinier utilisant sa méthode classique avec deux piquets et une corde.

2023

Je propose de reprendre cette idée en modélisant ces deux situations de traçage d'ovales. J'utilise volontairement au départ le mot « ovale » et pas « ellipse » car je ne suppose aucunes connaissances préalables sur les ellipses.

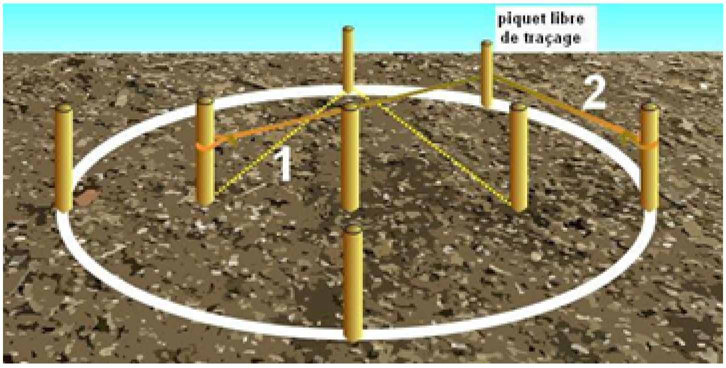


Ellipsographe d'Archimède, Copyright 2021 HelloBricks by Brickman.

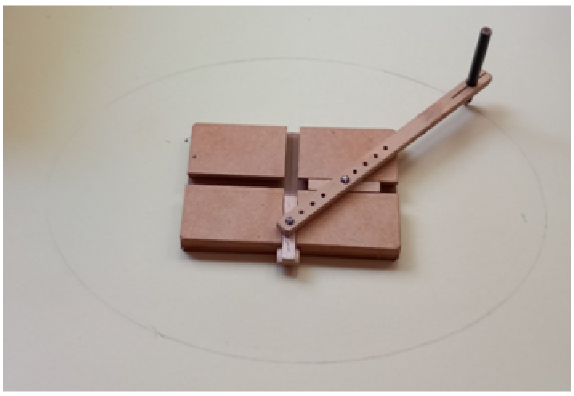
1 Introduction de l'activité

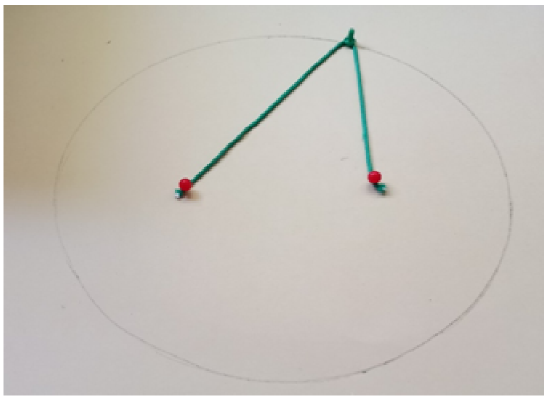
Il y a deux possibilités pour introduire l'activité.

- Si l'on ne dispose pas de d'ellipsographe d'Archimède, on commence par la découverte de deux ressources numériques : la première présente le traçage d'un massif de jardin ovale sur le site plandejardin-jardinbiologique.com/crbst_298.html et la deuxième propose une vidéo montrant : la réalisation d'un plateau de table ovale par un menuisier sur la page Facebook « Yann Créateur Ebéniste ».



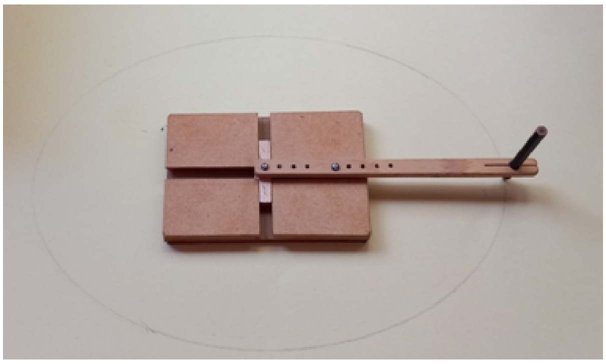
- La deuxième solution si l'on dispose d'ellipsographes d'Archimède, qui sont très faciles à fabriquer, est de faire tracer des ovales avec les deux systèmes sur une planche à dessin avec des feuilles au format A2.

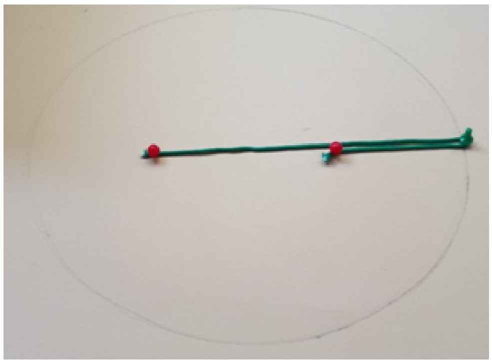


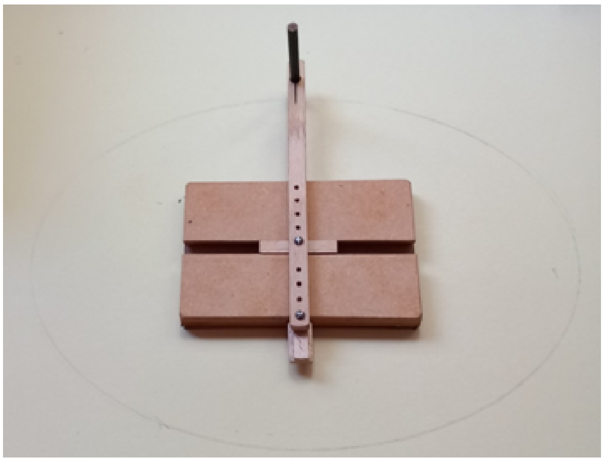


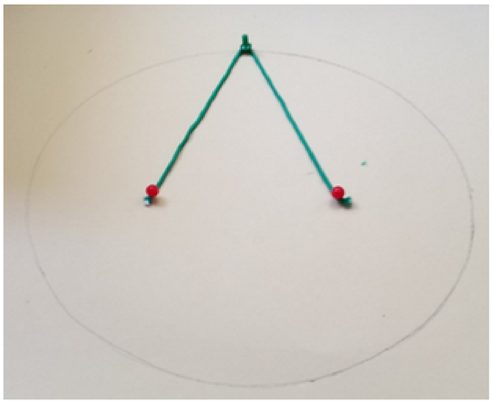
Dans les deux cas la consigne est peut-on avec ces deux systèmes tracer le même ovale et si oui comment ?

Les apprenants découvrent assez vite une condition nécessaire, il faut que les deux ovales s'inscrivent dans un même rectangle. Cette condition apparait dans la manipulation des systèmes avec les positions limites.







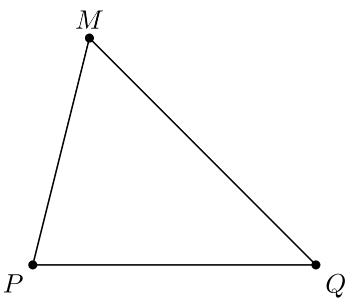


2 Modélisation mathématique

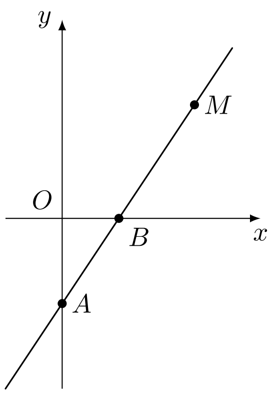
Après la découverte soit par internet, soit par manipulation des deux systèmes de traçages, on propose de modéliser la situation par des schémas mathématiques avec des lettres pour designer certains points et le choix de variables.

Trop souvent cette étape est sautée dans l'énoncé de situation problème en fournissant la figure.

Pour le jardinier le choix est assez simple, les points représentant les deux piquets par exemple P et Q et le point M de traçage. Les variables étant la distance d entre les piquets et la longueur c de la corde. Pour l'autre système il faut nommer et repérer les trois points de barre, le point M étant le point de traçage, on repère les deux autres points A et B par rapport à ce point. On obtient les figures suivantes :

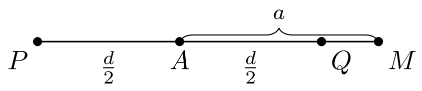


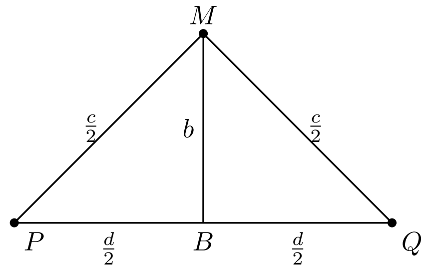
$d = PQ$
$c = MP + MQ$



$a = MA \quad b = MB$

Pour que les deux systèmes tracent le même ovale, il est nécessaire que dans les deux positions limites les deux points M coïncident. On peut schématiser ces positions limites par les figures suivantes :





$$\begin{aligned} & c = MP + MQ \\ \Leftrightarrow\ & c = PA + 2AM - AQ \\ \Leftrightarrow\ & c = \frac{d}{2} + 2a - \frac{d}{2} \\ \Leftrightarrow\ & c = 2a \\ \Leftrightarrow\ & a = \frac{c}{2} \end{aligned}$$

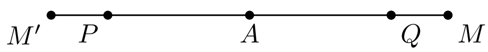
$$\begin{aligned} & MQ^2 = MB^2 + BQ^2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{c^2}{4} = \frac{d^2}{4} + b^2 \\ \Leftrightarrow\ & b^2 = \frac{c^2 - d^2}{4} \\ \Leftrightarrow\ & b = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{2} \end{aligned}$$

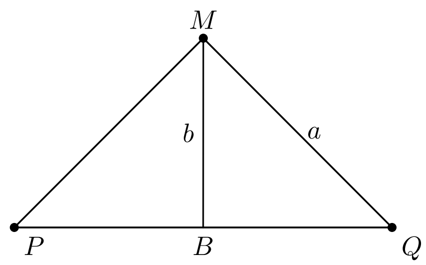
On en déduit les formules nécessaires permettant de passer d'un système à l'autre pour tracer le même ovale.

$$a = \frac{c}{2} \qquad b = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{2} \qquad \text{et} \qquad c = 2a \qquad d = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

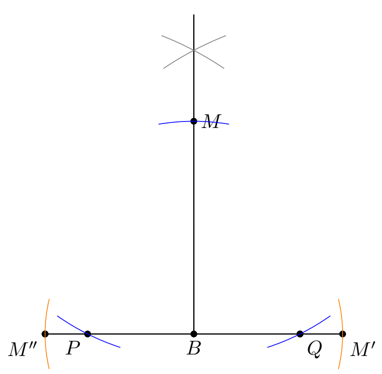
3 À la règle et au compas

Une autre solution possible est de trouver sans calcul la solution par traçage.
À partir de la figure suivante utilisant la symétrie, on retrouve que $c = 2a$.





Cela permet facilement par construction à la règle et au compas de trouver P et Q connaissant a et b, ou de trouver a et b connaissant P et Q et la longueur de la corde c.



On prélève au compas les distance $MA = a$ et $MB = b$.

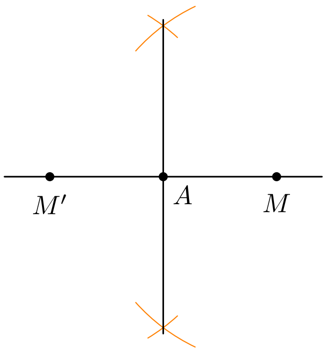
On trace la perpendiculaire au point B.

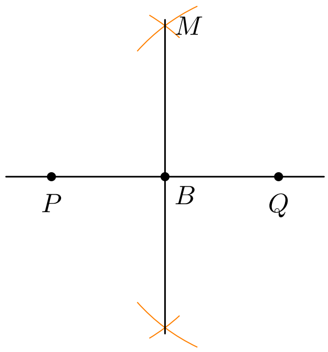
On reporte au compas $BM = b$ et l'on trace le cercle de centre M et de rayon a pour obtenir les points P et Q.

En traçant le cercle de centre B et de rayon a on obtient les points M' et M'' qui donne la distance d.

À partir de la longueur de la corde $MM' = c$ on trouve le milieu A en construisant la médiatrice, puis on trace les cercle de centres P et Q de rayon $AM = a$. La longueur $BM = b$.

De même si l'on connait P et Q donc d et la longueur de la corde c, on peut construire rapidement les longueurs a et b.



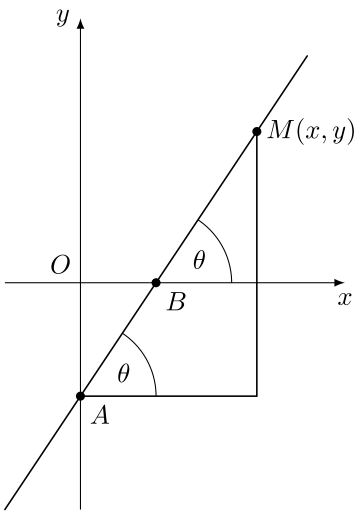


On peut arrêter l'activité à ce niveau et lancer des recherches sur le tracé des ovales sur internet.

Très vite on découvre que les ovales tracées par les deux systèmes sont des ellipses et que les systèmes pour tracer des ellipses s'appellent des ellipsographes. Les propriétés des ellipses assurent que les deux ellipses vérifiant les conditions nécessaires sont les mêmes.

4 Pour aller plus loin

Si le niveau des apprenants le permet on peut démontrer que les deux ovales vérifiant les conditions nécessaires sont bien les mêmes. Nous proposons donc de modéliser les deux systèmes dans des repères cartésiens et d'établir les équation des courbes associées.



En utilisant les formules trigonométriques de base, on a :

$$x = MA\cos\theta \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \cos\theta$$
$$y = MB\sin\theta \Leftrightarrow \frac{y}{a} = \sin\theta$$

Puis, en appliquant le théomère de Pythagore, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

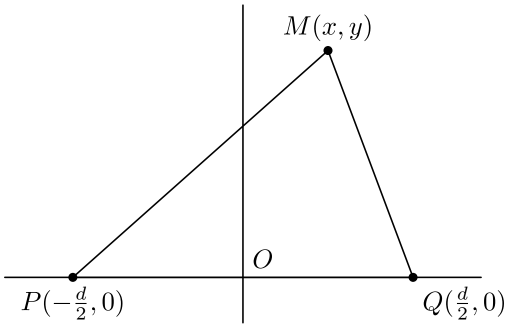
On peut se passer de la trigonométrie en introduisant la variable $z = OB$, puis avec le théorème de Thalès, on a

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{x-2} \quad \text{d'où} \quad z = \left(1 - \frac{b}{a}\right)x$$

et avec le théorème de Pythagore,

$$(x-z)^2 + y^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \left(1 - \frac{b}{a}\right)x\right)^2 + y^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le système du jardinier se modélise facilement et avec le théorème de Pythagore on obtient une formule complexe.



$$c = MP + MQ = \sqrt{\left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2}$$

L'objectif est de transformer cette équation pour aboutir l'équation précédente.

Dans cette activité, nous allons utiliser une méthode pour optimiser de long calcul, utiliser des variables intermédiaires pour éviter les réécritures de formules, fractionner les calculs et utiliser au maximum les identités remarquables.

La première étape pour atteindre si possible la cible est d'éliminer les radicaux à l'aide de deux élévation au carré.

En posant $A = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2$ et $B = \left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{A}+\sqrt{B} = c \quad \Leftrightarrow \quad A+B+2\sqrt{AB} = c^2 \quad & \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{AB} = c^2 - (A+B) \\
& \Leftrightarrow \quad 4AB = C^4 + (A+B)^2 - 2c^2(A+B) \\
& \Leftrightarrow \quad 4AB = C^4 + A^2 + B^2 + 2AB - 2C^2(A+B) \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = C^4 + A^2 + B^2 - 2AB - 2C^2(A+B) \\
& \Leftrightarrow \quad 0 = c^4 + (A-B)^2 - 2c^2(A+B)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
& A - B = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 - \left[\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2\right] \\
\Leftrightarrow \quad & A - B = \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{d}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & A - B = \left(x+\frac{d}{2}+x-\frac{d}{2}\right)\left(x+\frac{d}{2}-\left(x-\frac{d}{2}\right)\right) \\
\Leftrightarrow \quad & A - B = 2dx \\
\Leftrightarrow \quad & (A-B)^2 = 4d^2x^2
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
A + B &= \left(x+\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \\
A + B &= x^2 + dx + \frac{d2}{4} + y^2 + x^2 - dx + \frac{d}{4} + y^2 \\
A + B &= 2x^2 + 2y^2 + \frac{d^2}{2}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& 0 = c^4 + 4d^2x^2 - 2c^2\left(2x^2 + 2y^2 + \frac{d^2}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = c^4 + 4d^2x^2 - 4c^2x^2 - 4c^2y^2 - c^2d^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left(c^2 - d^2\right)x^2 + 4c^2y^2 = c^4 - c^2d^2 \\
\Leftrightarrow\ & 4\left(c^2 - d^2\right)x^2 + 4c^2y^2 = c^2\left(c^2 - d^2\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{\frac{c^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{c^2-d^2}{4}} = 1
\end{aligned}$$

En remplaçant c et d en fonction de a et de b aux conditions nécessaires on retrouve bien la même équation.

Daniel Poisson, professeur honoraire en Sciences de l'éducation à l'Université de Lille a dirigé le Département Mathématiques du Centre Université-Economie d'Education permanente (CUEEP), une part importante de ses travaux portent sur l'enseignement des mathématiques aux adultes de l'illettrisme à l'université.