UNIVERSITE de ROUEN
UFR des SCIENCES

Fascicule d'exercices avec solutions de mathématiques pour les sciences.

M.Dennai.

Préface

Ce fascicule d'exercices avec solutions vient compléter un ensemble de trois ouvrages de mathématiques intitulés ' Mathématiques pour l'ingénieur', leurs contenus sont répartis de la sorte :

<u>Tome 1 :</u>

Analyse réelle.

Analyse complexe.

Transformation de Fourier.

Transformation de Laplace.

<u>Tome 2 :</u>

Algèbre et algèbre linéaire.

Analyse numérique.

Géométrie.

Fonctions de plusieurs variables.

Théorie des courbes.

Equations différentielles.

<u>Tome 3 :</u>

Topologie générale.

Analyse fonctionnelle.

Probabilités.

Statistiques.

Les étudiants et les professionnels y trouveront pour un approfondissement des connaissances un cours très complet.

Mes remerciements vont à Mr Dellacherie Claude directeur de recherche dans le laboratoire de mathématique de l'université de Rouen, à Mr Roger Goglu enseignant à l'insa de Rouen qui ont été constamment présents dans ces ouvrages, à Mr Fauvernier Philippe directeur des éditions Hermann pour ses encouragements et à ma famille.

Ce travail a été réalisé sous Scintific Work Place, Latex Miktex et Microsoft Word, les courbes sous Graph Easy.

Première partie : Analyse I.

1. Notion de fonctions : continues, périodiques, dérivées, dérivation composée, notion d'extremum, intégrale simple convergente, intégrale multiple à bornes constantes (à lier avec systèmes de coordonnées).
2. Théorème de Rolle, accroissements finis, Règle de l'Hôpital.
3. Fonctions polynômes, décomposition des fractions rationnelles, nombres complexes dans l'intégration.
4. Primitives.
5. Formule de Taylor-Mc Laurin et développements limités, étude locale des fonctions.
6. Equations différentielles du 1er ordre et du 2nd ordre.

Fonction, continuité, dérivation et fonction réciproque.

Mots clés : Fonction, continuité, dérivée, formule de Taylor-Mc-Laurin, règle de L'Hôpital, accroissements finis, théorème de Rolle, reste de Young.

Rappel :

1. **Règle de calcul des dérivées :**

α, β sont des constantes et n un entier naturel positif ou nul :

1. $(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$;
2. $(f.g)' = f'.g + f.g'$;
3. $g \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ce qui entraîne : $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;
4. $(fg)^{(n)} = \sum_{p=0..n} \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} f^{(p)} g^{(n-p)} \rightarrow$ *Relation de Leibnitz.*
5. $(f \circ g)' = f' \circ (g).g'$
6. $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

2. **Formule de Taylor et Taylor-Mc Laurin :**

Si f est une fonction dérivable n+1- fois dans un intervalle I, alors son développement de Taylor au point a appartenant à I s'écrit :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \cdots \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$$

Appelé reste de Young.

3. **Accroissements finis :**

Soit une fonction f réelle, définie et continue sur $[a, b]$ si sa dérivée existe et est finie sur $]a, b[$: alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

4. **Règle de L'Hôpital :**

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a s'annulant en a et telles que le quotient $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ soit défini, alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

5. **Théorème de Rolle :**

Pour deux nombres réels a et b tels que : $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que : $f(a) = f(b)$ alors il existe (au moins) un élément c de $[a, b]$ tel que : $f'(c) = 0$.

Exercice 1 : Dire si les fonctions suivantes sont continues préciser leur domaine de définition :

$$x^2, \quad \sqrt{x}, \quad \sqrt{1-x}, \quad \sqrt{1+12x-13x^2}, \quad \frac{1-x}{1+x}, \quad \frac{1-x}{1+x+x^2}, \quad \frac{1-x}{1+12x-13x^2}.$$

Etudier la continuité des fonctions aux points critiques. (Sinus hyperbolique noté sh ou Sinh, cosinus hyperbolique noté ch ou Cosh.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^2}, x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, \quad x = 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 : Trouver la fonction réciproque des fonctions suivantes :

$\sinh x, \cosh x$. (Indication écrire $y = \sinh\, x$, et trouver x en fonction de y, faire attention aux domaines d'inversion.)

Exercice 3 : Montrer que l'on n'a pas en général :

$$fog = gof$$

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \qquad g(x) = x^2.$$

Exercice 4 : Trouver la dérivée des fonctions de l'exercice 1:

Sujets à préparer

Sujet 1 :

Dériver les expressions suivantes :

10^x, $10^{\sqrt{x-1}}$, $10^{\sqrt{x^2-2x+3}}$, dans leurs domaines de dérivation (indication utiliser :

$a^b = e^{blna}, a\ réel\ positif, b\ réel.$)

Sujet 2 :

Dériver dans leurs domaines de définition les fonctions : $\alpha\ réel.$

$f(x) = \frac{x^\alpha}{1-x^2}$, $g(x) = \ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^2}\right)$, $h(x) = \left(\frac{x^\alpha}{1-x^2}\right)\ln\left(\frac{x^\alpha}{1-x^2}\right)$.

Sujet 3 :

Dérivée d'une fonction réciproque:

$$G(x) = \ln(x^2 - x + 1),$$

$$(indication\ utiliser:\ (Fof^{-1})' = (F'of^{-1}).(f^{-1})').$$

Sujet 4 :

Calculer la limite en utilisant la règle suivante :

$$lim_{x\to a}\frac{u}{v} = \cdots = lim_{x\to a}\frac{u^{(p)}}{v^{(p)}}.$$

$$f(x) = lim_{x\to a}\frac{log_x a - log_a x}{shx - sha}.$$

$$(Indication\ utiliser:\ log_\alpha \beta = \frac{ln\beta}{ln\alpha}.)$$

Sujet 5 :

Calcul de limite en utilisant un équivalent usuel en annexe 3 :

$$f(x) = lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + 2tanx)}{sinx}.$$

Les polynômes & fractions rationnelles.

Mots clés : polynôme, division euclidienne, triangle de Pascal, zéro d'un polynôme, degré d'un polynôme, éléments simples.

Rappel :

1. **Triangle de Pascal :**

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6		
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
n	1	n	...	C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p		...	1	
$n+1$	1	$n+1$	...		$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$	...	$n+1$	1	

Pour tout entier naturel p inférieur à n on observe à partir du tableau ci-dessus :

$$\begin{aligned} C_n^p &= C_n^{n-p} \\ C_n^0 &= C_n^n = 1 \\ C_n^1 &= C_n^{n-1} = n \\ pC_n^p &= nC_{n-1}^{p-1}. \end{aligned}$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0..n} C_n^p a^p b^{n-p}.$$

2. **Fraction rationnelle :**

Toute fraction rationnelle : $F = \frac{P}{Q}$, se décompose de la sorte ; (avec : $a^2 - b^2 < 0$.)

$$\begin{aligned} F &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1 x + B_1'}{X^2 - 2aX + b} \\ &+ \frac{B_2 x + B_2'}{(X^2 - 2aX + b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta x + B_\beta'}{(X^2 - 2aX + b)^\beta}. \end{aligned}$$

Exercice 1 : Développer un polynôme de degré n :

(Utiliser le triangle de Pascal)

$$(a+b)^0$$

$$(a+b)^1$$

$$(a+b)^2$$

$$(a+b)^3$$

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^7.$$

Exercice 2 : Faire la division euclidienne :

de $x^3 + x^2 + x + 1$ par x.

Exercice 3 : Décomposer en éléments simples :

$$\frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$

Sujet à préparer

Sujet 1 : Recherche d'une racine en utilisant le théorème de Rolle.

A l'étudiant de rechercher par une équation du type polynôme une application.

Sujet 2 : Recherche d'une racine par approximation. (Sur papier millimétré). Théorème des accroissements finis. Utilisation de la calculatrice.

Etudier pour cela l'équation :

$$x - cosx = 0.$$

Montrer qu'il existe un unique nombre entre ½ et 1 qui vérifie cette équation.

(Rép : une approximation à 10^{-10} prés, est de l'ordre de 0,739085133215).

Intégration.

Mots clés : Intégration par partie, règle de Bioche, changement de variable, fonction irrationnelle, fonction transcendante, fraction rationnelle.

Rappel :

Voir annexe 2.

1 Intégration par parties :

Soient f et g deux fonctions intégrables sur le segment $[a, b]$ et admettant des primitives notées F et G respectivement. Les fonctions Fg et fG sont intégrables et l'on a :

$$\int_a^b F(t)g(t)dt = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(t)G(t)dt.$$

2 Intégration par changement de variable :

$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad \phi : [c, d] \to [a, b]$, *$f$ Riemann-intégrable , ϕ dérivable alors :*

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} f(u)du = \int_c^d f \circ \phi(t)\phi'(t)dt.$$

3 Règle de Bioche :

On dit que $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ s'il existe des polynômes en 2 variables P, Q dans $\mathbb{K}[X, Y]$, c'est à dire :

$$P(X,Y) = \sum_{i=1..n, j=1..m} a_{ij} X^i Y^j,$$

$$Q(X,Y) = \sum_{i=1..n', j=1..m'} b_{ij} X^i Y^j$$

tels que :

$$f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}.$$

On prendra dans ce cas le changement de variable :

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

On se ramène ainsi à une fraction rationnelle en t (en tenant compte des discontinuités ainsi créées), mais les degrés des numérateur et dénominateur sont excessivement élevés et rendent les calculs fastidieux ainsi on optera pour la règle de Bioche si on a :

1) $f(-x) = f(x)$ on pose $t = \cos x$.
2) $f(\pi - x) = -f(x)$ on pose $t = \sin x$.
3) $f(\pi + x) = f(x)$ on pose $t = \operatorname{tg} x$.

4 Fonctions irrationnelles et transcendantes :

a) $f(e^x, \text{sh } x, \text{ch } x, \text{th } x)$ on pose $t = e^x$, $x = \ln t, dx = \frac{1}{t}dt$, avec $\text{sh } x = \frac{1}{2}(t - t^{-1}), \text{ch } x = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$, on retrouve une fraction rationnelle.

b) $f(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}), ad - bc \neq 0$. on pose :

$$y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Longleftrightarrow x = \frac{b - dy^n}{cy^n - a}, dx = \frac{ad - bc}{(cy^n - a)^2} ny^{n-1}dy.$$

On retrouve une fraction rationnelle en y.

c) $f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, on transforme la racine en une des formes suivantes :

1) $\sqrt{t^2 + 1}$, on pose $t = \text{sh } u \Rightarrow \sqrt{t^2 + 1} = \text{ch } u$.

2) $\sqrt{t^2 - 1}$, on pose $t = \pm\text{ch } u(u > 0) \Rightarrow \sqrt{t^2 - 1} = \text{sh } u$.

3) $\sqrt{1 - t^2}$, on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$.

Exercice 1 : Calculer les intégrales des polynômes suivants :

$$f(x) = (x + 2)^3, \;\; g(x) = (x - 2)(x + 2).$$

Exercice 2 : Intégration par changement de variable.

$$f(x) = \sqrt{x + 1}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Exercice 3 : Intégration par partie

$$f(x) = xcos(x), \qquad g(x) = x^2e^{2-x}, \qquad h(x) = xln(x)$$

Exercice 4 : Intégration de fraction rationnelle.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}, \;\; g(x) = \frac{1}{x^2+x}, \;\; h(x) = \frac{1,}{(x+1)^3}.$$

Exercice 5 : Intégration de fonctions hyperboliques et trigonométriques h

$$\text{sh} = \text{Sinh}, \;\; \text{ch} = \text{Cosh},$$

$$i(x) = shx, j(x) = chx \,,$$

$$k(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \qquad l(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Exercice 6 : Règle de Bioche.

$$k(x) = \frac{\sin{(x)}}{cos^3(x)+sin^2(x)}.$$

Sujet à préparer :

Sujet 1 :

Trouver l'intégrale de la fonction

$k(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}$, en posant : $x + 2 = shu$.

Sujet 2 :

Intégrale de fonctions de la forme
$f(x) = f(e^x, shx, chx, thx)$

Sujet 3 :

Intégrale de fonctions de la forme :

$$f(x) = f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

Equations différentielles.

Mots clés : équation de Bernoulli, équation d'Euler, fonction homogène, fonction homographique, Variation de la constante.

Rappel :

1. Variation de la constante :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x).$$

Où P et Q sont des fonctions continues de x ou constantes.

Pour résoudre de telles équations on procède de la manière suivante, on pose :

$$y = u(x)v(x).$$

$$v(x) = \int_a^x e^{-p(t)}dt,\ u(x) = \int_a^x \frac{q(t)}{v(t)}dt \text{ donc } y = cte\ v(x)\ u(x) + v(x).$$

2. Fonction homogène :

On dira qu'une fonction f en les variables (x,y) est homogène de degré n si l'égalité suivante est vérifiée quelque soit le nombre λ :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Etant donnée l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

on pose :

$$u = \frac{y}{x}$$

3. Equation de Bernoulli :

Une équation de la forme est dite équation de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n.$$

On pose $z = y^{-n+1}$

4. Equation différentielle ordinaire du 2nd ordre à coefficients constants :

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(\mathcal{E}_0) : y'' + ay' + by = 0$$

(Cas des coefficients a et b constants dans ($\mathcal{E}_0$)) *Si l'équation caractéristique :*

$$r^2 + ar + b = 0$$

– *admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors :*

$$S_0(I) = \left\{y : x \in I \to Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, (A,B) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

– *admet une racine double r_0 dans $\mathbb{C}$, alors :*

$$S_0(I) = \left\{y : x \in I \to (A + Bx)\, e^{r_0 x}, (A,B) \in \mathbb{K}^2\right\}$$

<u>Exercice 1 :</u> Résoudre une équation du 1^{er} degré avec ou sans second membre:

$$y' = x^3,\ y' = \frac{2x+1}{x^2+x},\ y' = \frac{1}{x^2+x},\ y' = \frac{1}{(x+1)^3},$$

$$y' = shx,\ y' = \frac{1}{x^2+x+1},\ y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

$$Y' + Y = 1.$$

$$Y' - XY = 0.$$

$$Y' + Ysin(x) = 0.$$

$$T' + T\frac{1}{\sqrt{V^2+V+2}} = 1.$$

$$T' + T\frac{2}{V+1} = V + 1.$$

<u>Exercice 2</u> : Résoudre une équation différentielle du second degré sans second membre.

$$y'' + 2y' - 3y = 0,\ y'' + y - 2y = 0.$$

<u>Exercice 3 :</u> Utilisation du déterminant, variation de la constante.

$$\begin{pmatrix} y & x \\ y' & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}.(indication\ \ utiliser\ :$$

$y = Hy + x^2, H\ primitive\ de\ 1\ et\ c\ est\ une\ constante.$)

<u>Sujet à préparer :</u> Equations différentielles non linéaires.

<u>Sujet 1 :</u> Fonction homographique et fonction homogène.

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y+1}.$$

<u>Sujet 2 :</u> Equation de Bernoulli.

<u>Sujet 3 :</u> Equation d'Euler.

Examen.

Exercice 1 :

Calculer le module et l'argument des nombres :

$$\frac{1+i}{1-i}, \qquad \left(\frac{i+1}{1-i}\right)^7.$$

Trouver la racine carrée du nombre complexe :

$$6+8i.$$

Utiliser le triangle de Pascal et la forme complexe d'Euler du sin et cos pour linéariser :

$$cos^6 x, \qquad sin^6 x.$$

Exercice 2 :

Calculer les limites

(Indication utiliser la règle : $lim_{x\to a}\frac{u}{v} = \cdots = lim_{x\to a}\frac{u^{(p)}}{v^{(p)}}$.)

$$lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cosx}{x-\frac{\pi}{2}}.$$

$$lim_{x\to 0} sinx^2/x^2.$$

Exercice 3 :

Faire le graphique de la fonction, approfondir le signe de la dériver :

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x).$$

Exercice 4 :

Vérifier l'égalité :

$$2arctan\frac{1}{2} = arctan\frac{4}{3}.$$

Exercice 5 :

Linéariser :

$$sin^3 x.$$

Calculer :

$$\int sin^3 x dx.$$

Exercice 6 :

Calculer la limite :

$$lim_{x\to 0} \frac{sin^2 x}{\sin(2x) + x}.$$

Exercice 7 :

Trouver la solution de :

$$y' = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Exercice 8 :

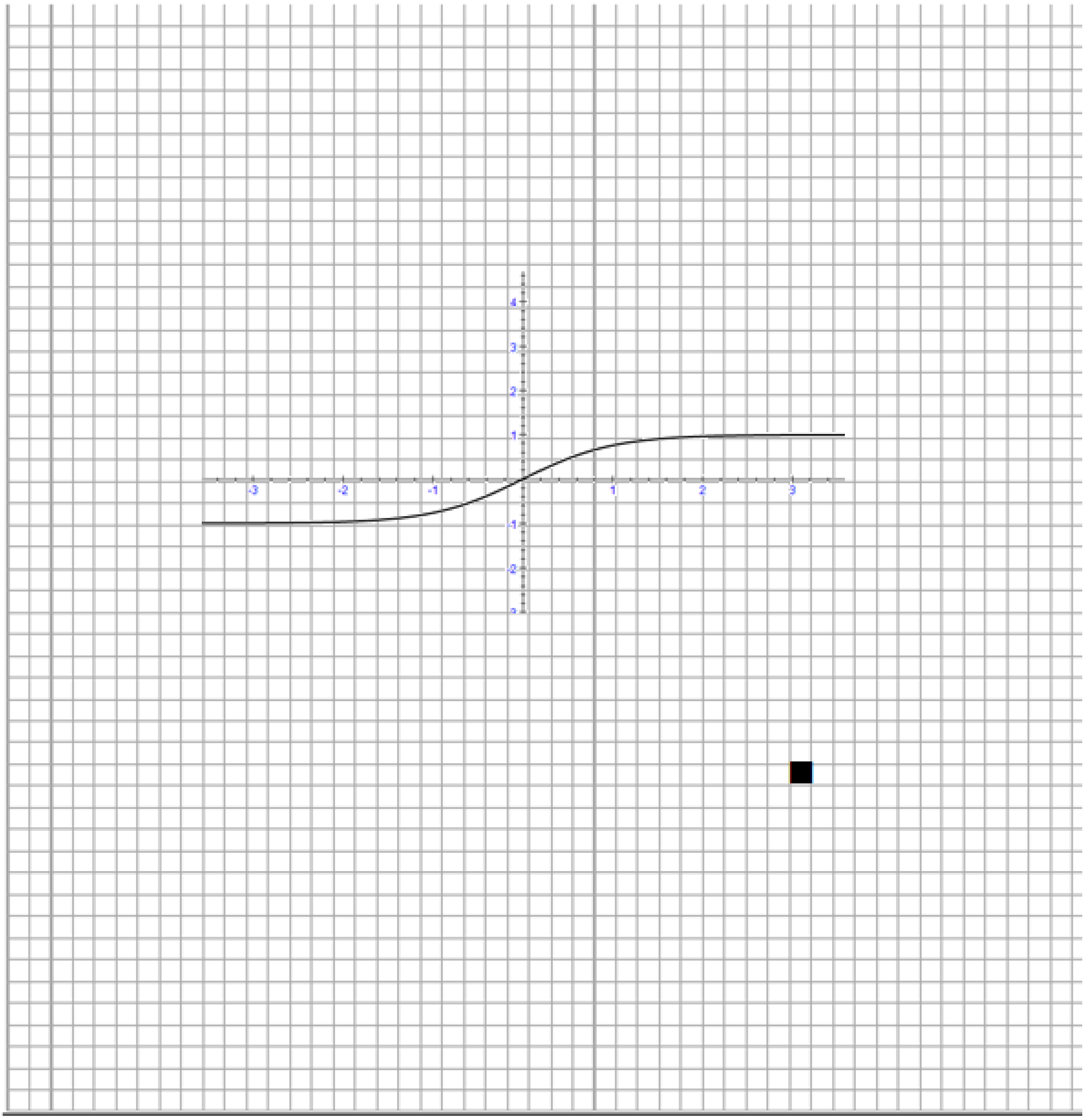
Etudier de la fonction :

$$f(x) = \tanh(2x).$$

En suivant les étapes :

1. Calculer les limites en $\pm\infty$.
2. Tableau de variation.
3. Intersection avec l'axe des x puis l'axe des y.
4. Calculer l'aire comprise entre 1 et 2.
5. Tracer f.

Correction abrégée de l'exercice 6 :



Utiliser Graph Easy.

2ième partie : Algèbre & algèbre linéaire.

1. Ensemble et logique.
2. Espace vectoriel.
3. Application linéaire.
4. Le noyau et l'image d'une application linéaire.
5. Le théorème du noyau et le théorème de Grassmann.
6. Base et changement de base.
7. Matrice et déterminant.
8. Valeur propre, vecteur propre et espace propre.

Ensemble & logique mathématique.

Mots clés : logique, crible de Poincaré, quantificateur.

Rappel :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles finis. Alors :

$$|\cup_{i=1\dots n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{\mathrm{n}-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n|$$

Où $|.|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini. Cette formule peut s'écrire d'une manière plus condensée de la sorte :

$$|\cup_{i=1\dots n} A_i| = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \left((-1)^{\mathrm{k}-1} \sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_k<n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}| \right).$$

Et est appelée crible de Poincaré.

Exercice 1 :

Compléter puis faire la négation des résultats :

Tables de vérité.

T	S	T ∧S
1	1	
0	0	
1	0	
0	1	

T	S	T ∨S
1	1	
0	0	
1	0	
0	1	

T	S	T ⇒S
1	1	
0	0	
1	0	
0	1	

Démontrer la relation de De Moivre, faire le lien avec les ensembles et les signes : ∩,∪.

Exercice 2 :   Etudier les quantificateurs $\forall,\exists$.

Sujet à préparer : Le crible de Poincaré.

Crible de Poincaré formule simple. Considérer le cas n=2 puis n=3 et généralisation, faire une démonstration.

Espace vectoriel & algèbre linéaire.

Mots clés : application linéaire, image, noyau, rang, théorème de Grassmann, application injective, application surjective, application bijective, application inversible, matrice, matrice identité, méthode de Sarrus, matrice transposée, matrice semblable, valeur propre, vecteur propre, espace propre, matrice diagonale.

Rappel :

1. **Théorème du rang :**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F en espace vectoriel de dimension quelconque, G le supplémentaire de F dans E et f une application linéaire de E dans F , c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$\begin{aligned} \dim F \times G &= \dim F + \dim G \\ \dim E &= \dim F + \dim G \\ \dim E &= \dim F + \dim E/F \\ \dim E &= \dim \ker(f) + rg(f). \end{aligned}$$

2. **Formule de Grassmann :**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finis d'un espace vectoriel E. On considère les applications linéaires suivantes :

$$\varphi : \begin{array}{l} F \times G \to E \\ (f,g) \mapsto f+g \end{array} \quad et$$

$$\psi : \begin{array}{l} F \cap G \to F \times G \\ f \mapsto (f,-f) \end{array}$$

alors :

1. $\ker \varphi = F \cap G$.
2. $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 1 :

Soit P un polynôme de degré 2. Sa dérivée d'ordre 1 est P'. u est l'application linéaire qui à P associe P'. Alors déterminer :

$$Ker\ u, Im\ u, \dim Ker\ u\ et \dim Im\ u.$$

Exercice 2 :

Montrer le théorème du rang pour l'exercice 1.

Exercice 2 :

Montrer le théorème de Grassmann pour l'exercice 1.

Sujet à préparer :

u une application linéaire de E dans F, $\dim F = n$.

Démonstration de l'équivalence des assertions :

1. u inversible.
2. u^{-1} existe.
3. $rg(u) = n$.
4. u surjective.
5. L'image par u d'une base est une base.

Matrices.

Rappel :

1. <u>Matrice unité :</u>

$$I_{np} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & \dots \\ \dots & & 1 & & 0 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}}^{p} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} n.$$

On note I_n la matrice ci-dessus pour $n = p$, une matrice d'ordre n est inversible s'il existe une matrice P telle que $PM = MP = I_n$. P est alors notée $P = M^{-1}$.

2. **<u>Matrice transposée :</u>**

$$M^t = M' = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & & \dots & a_{n1} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & a_{ij} & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{1p} & & & & a_{np} \end{bmatrix},$$

dans laquelle on a interchangé les lignes et les colonnes.
La transposée d'un produit se calcule de la sorte :

$$(AB)^t = B^t A^t$$

3. **<u>Matrice semblable :</u>**

Deux matrices carrées d'ordre n, A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1}AP.$$

Une matrice diagonale est une matrice dont tous les éléments hors diagonale sont nuls, $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
Une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) est une matrice dont les éléments situés en dessous (respectivement au dessus) de la diagonale sont nuls.

4. **<u>Calcul d'un déterminant d'ordre 3 méthode de Sarrus :</u>**

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} a \searrow & b \searrow & c \searrow & a & b \\ a' & b' \searrow\nearrow & c' \searrow\nearrow & a' \nearrow\searrow & b' \\ a'' \nearrow & b'' \nearrow & c'' \nearrow & a'' & b'' \end{array}$$

Le produit des nombres situés sur les flèches montantes moins le produit des nombres situés sur les flèches descendantes.

Exercice 1 : Opérations simples sur les matrices :

Exemple les calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Opérations simples sur les déterminants :

Exemple les calculs suivants :

Désignons par C_i la colonne i :

En effectuant :

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1, \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \quad , \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1, \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En effectuant : $C_2 \leftrightarrow C_3,$

et en mettant 2 en facteur, on obtient :

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & -8 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

En effectuant :

$$\begin{cases} C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2, \\ C_4 \leftarrow C_4 + 8C_2. \end{cases}$$

On obtient :

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En effectuant :

$$C_4 \leftrightarrow C_4 - 4/3C_3,$$

On obtient :

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=4.$$

Exercice 3 : Recherche de valeurs propres vecteurs propres et espaces propres.

Exercice 4 :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} (m-1)x + my + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1. \end{cases}$$

Exercice 5 :

Diagonaliser T et calculer T^n:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 :

Déterminer un polynôme aussi simple que possible P tel que P(A)=0 où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.(ESCP).

Solution de l'exercice 4 :

Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} m-1 & m & 1 \\ m & 2 & 3 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix} = m^2(4-m).$$

a) $m = 0$, la solution est : $x = z - 1, y = \frac{z}{2}(1 - z), z = z, z$ quelconque.

b) $m = 4$, la solution est : $x = -2y, z = 1 + 2y, y = y, y$ quelconque.

c) $m \notin \{0,4\}$, la solution est : $x = \frac{D_x}{D} = 0, y = \frac{D_y}{D} = 0, z = \frac{D_z}{D} = 1.$

Solution de l'exercice 5 :

Le polynôme caractéristique s'écrit : $P(\lambda) = -(1+\lambda)^2(\lambda - 2)$.

L'espace propre E_{-1} s'écrit :

$E_{-1} = Ker(T + I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de dimension 2.

L'espace propre E_2 s'écrit :

$$E_2 = \text{Ker}\,(T - 2I_3) = Vect\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ de dimension 1.}$$

La matrice de passage de la base canonique à la base

$$e' = Vect\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ est :}$$

$$P = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

Donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix},$$

La matrice diagonale D s'écrit :

$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

Donc : $T = P^{-1}DP = P^{-1}D^2P = \cdots = P^{-1}D^nP$, d'où :

$$T^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n + (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n\\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n\\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n\end{pmatrix}.$$

■

Solution de l'exercice 6 :

On remarque que :

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = -I$$

d'où : $A^3 + I = 0$ *on peut prendre P tel que :* $P(x) = x^3 + 1$ *qui vérifie bien P(A)=0.*

Comme : $A^3 + I = 0$ *il vient que :* $-A^3 = I \Rightarrow A\cdot(-A^2) = (-A^2)\cdot A = I$ *donc A inversible*

et son inverse est $-A^2 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}.$

■

3ième partie : Analyse II.

1. Suites et séries.
2. Série de Riemann.
3. Règle de D'Alembert.
4. Règle de Cauchy.
5. Fonctions de plusieurs variables.
6. Dérivée partielle.
7. Notion d'extremum.
8. Théorème de la hessienne.
9. Multiplicateurs de Lagrange.
10. Notion de courbes paramétrées.
11. Courbes polaires.
12. Analyse numérique et programmation Matlab ou Maple.
13. Conditionnement.
14. Surfaces.
15. Calcul sur les résidus.
16. Transformation de Laplace.

Suites & séries.

Mots clés : suite, série, série de Riemann, règle de D'Alembert, règle de Cauchy, convergence, divergence, suite croissante, suite décroissante, terme général, somme partielle, rayon de convergence, formule de Hadamard, formule de Cauchy.

Rappel :

1. **Série de Riemann :**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, *la série de terme général :*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}(n \geq 1)$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2. **Règle de D'Alembert :**

Si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \ \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

si $l < 1$ *la série converge ;*
$l > 1$ *la série diverge ;*
$l = 1$ *on ne peut conclure.*

3. **Règle de Cauchy :**

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\rightarrow \begin{array}{c} si\ l < 1\ la\ série\ converge \\ l > 1\ la\ série\ diverge. \\ si\ l = 1\ on\ ne\ peut\ conclure\ Sauf\ si\ \forall n \geq n_0, u_n \geq 1, \\ auquel\ cas\ la\ série\ est\ trivialement\ divergente. \end{array}$$

4. **Rayon de convergence :**

Soit la série, $\sum a_n x^n$, on appelle rayon de convergence de la série l'une des deux expressions suivantes :

1. Formule de Hadamard :

$$R = \frac{1}{\limsup_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|} = \frac{1}{\overline{\lim}_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

2. Formule de Cauchy :

$$R = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{a_n}}.$$

Avec $\frac{1}{+\infty} = 0, \frac{1}{0} = +\infty.$

Exercice 1 :

Dire si les séries de terme général u_n sont convergentes :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
2. $u_n = \frac{n^3}{n+1}$.
3. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n!)}$.
4. $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$.

Exercice 2 :

Etudier la convergence des suites :

1. $u_{n+1} = \frac{1+{u_n}^2}{2}, u_0 \in \mathbb{R}$.
2. Etude de la convergence de la suite : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+{u_n}^2}, u_0 \in \mathbb{R}$.

Sujet à préparer :

Etude de la convergence de la suite :

$$u_n = \sum_{k=0..n} \binom{n}{k}^{-1}$$

Où :

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n+k)!k!}.$$

Procéder par étapes :

1. Montrer que l'on peut mettre u_n sous la forme : pour $n \geq 5{,}2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \sum_{k=0..n} \binom{n}{k}^{-1}$.
2. Montrer que pour : $n \in [2, n-2]$, $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} \geq \frac{n(n-1)}{2}$.
3. En déduire que : $\sum_{k=0..n} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$.
4. Puis par encadrement montrer que : $u_n \to 2$.

Examen : Résolution d'équation différentielle par les séries.

Montrer que la fonction :

$$J_0(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{x}{2})^{2n}}{(n!)^2}$$

est convergente, trouver son rayon de convergence et montrer qu'elle est solution particulière du problème suivant :

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x} + y' + y = 0 \\ x=0, y=2, y'=0 \end{cases}$$

Fonctions de plusieurs variables.

Mots clés : dérivée partielle, mineur principal, hessienne, maximum local, minimum local, extremum local, multiplicateur de Lagrange.

Rappel :

La matrice définie pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{D}$ par :

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

est appelée hessienne de f. Avec ces notations le développement de Taylor-McLaurin à l'ordre deux au point $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ de $\mathcal{D}$ est :

$$f(x) = f(x^0) + \overrightarrow{\text{grad}} f(x^0) \cdot (x - x^0) + (x - x^0)^t \cdot Hf(x^0) \cdot (x - x^0) + o(\|x - x^0\|^2).$$

$$\text{Où } \overrightarrow{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

<u>Exercice 1 :</u> Savoir dériver partiellement.

<u>Exercice 2 :</u> Recherche d'extrêma simples.

<u>Exercice 3 :</u> Formule de Taylor à l'ordre 2.

<u>Sujet à préparer :</u> Autour du théorème de la hessienne

1. La hessienne d'ordre 2 :

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

2. La hessienne d'ordre 3:

3. $$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

<u>Théorème :</u> Sous les conditions suivantes : $|Hf(x_0, y_0)| = detHf(x_0, y_0)$

1. $m = 2, |Hf(x_0, y_0)| > 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \left(resp\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0\right).$
2. $m = 3, |Hf(x_0, y_0)| > 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) > 0, \left(resp \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}(x_0, y_0) < 0 \right).$

et , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$,

nous avons $Hf(x_0, y_0)$ définie positive, donc (x_0, y_0) est un maximum local. (resp $Hf(x_0, y_0)$ définie positive, donc (x_0, y_0) est un minimum local.)

Exercice 4 : Nous cherchons à rendre maximale la quantité :

$$f(x, y) = -((x-4)^2 + (y-4)^2),$$

sous les contraintes :

$$g_1(x, y) = x + y \leq 4,$$

$$g_2(x, y) = x + 3y \leq 9.$$

Exercice 5 :

Parmi les triangles de périmètre donné, quel est celui dont l'aire est maximale ?

Solution de l'exercice 4 :

La solution du problème est donnée par la résolution des les équations :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \Leftrightarrow -2(x-4) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \Leftrightarrow -2(y-4) - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &\geq 0 \Leftrightarrow x + y \leq 4, \\
\lambda_1 &\geq 0, \\
\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 0 \Leftrightarrow \lambda_1(x + y - 4) = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &\geq 0 \Leftrightarrow x + 3y \leq 9, \\
\lambda_2 &\geq 0, \\
\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 0 \Leftrightarrow \lambda_2(x + 3y - 9) = 0.
\end{aligned}$$

Où $L(x, y) = -((x-4)^2 + (y-4)^2) - \lambda_1(x + y) - \lambda_2(x + 3y)$

On distingue alors les cas suivants :

- *Cas 1 :* $x + y = 4$ et $x + 3y = 9$, les deux contraintes sont saturées , la solution est $x = \frac{3}{2}, y = \frac{5}{2}$ les deux premières équations deviennent :

$$\begin{cases} 5 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

qui impliquent comme solutions : $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$ la condition $\lambda_2 \geq 0$ n'est pas vérifiée.
- *Cas 2 :* $x + y = 4$ et $x + 3y < 9$, donc $\lambda_2 = 0$ une seule contrainte est saturée, les deux premières équations impliquent $x = y = 2$ et $\lambda_1 = 4$ toutes les conditions sont satisfaites.
- *Cas 3 :* $x + y < 4$ et $x + 3y = 9$, donc $\lambda_1 = 0$ la seconde contrainte est saturée, les deux premières équations impliquent $x = \frac{12}{5}, y = \frac{11}{5}$ la condition $x + y < 4$ n'est pas satisfaite.
- *Cas 4 :* $x + y < 4$ et $x + 3y < 9$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ aucune contrainte n'est saturée, les deux premières équations impliquent $x = y = 4$, la condition $x + y < 4$ n'est pas satisfaite.

seule demeure la solution $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 2, 4, 0)$ qui est un maximum global.

Solution de l'exercice 5 :

x,y, et z les longueurs des côtés, p le demi-périmètre. p donné. On sait que l'aire du triangle est donnée par la formule :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

on veut que S (ou S^2) soit maximum. On forme donc le lagrangien :

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= S^2 + \lambda(x + y + z) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= p(p-y)(p-z) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= p(p-y)(p-x) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= p(p-y)(p-x) + \lambda = 0 \Rightarrow \\ x &= y = z \text{ , le triangle doit être équilatéral.} \end{aligned}$$

Théorie des courbes.

Mots clés : courbes, branche infinie, point double, point d'inflexion, courbe unicursale, courbe rationnelle, droite tangente, courbes remarquables, développée d'une courbe, courbe paramétrique, courbe polaire, courbure.

Rappel :

1. **Construction de courbes paramétrées :**

Pour étudier et construire l'image Γ d'une application γ :

$\gamma: I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto [x(t), y(t)]$, en dimension 2.

$\gamma: I \to \mathbb{R}^3, t \mapsto [x(t), y(t), z(t)]$, en dimension 3.

Où I désigne un ouvert de $\mathbb{R}$, on procède de la manière suivante :

Chaque fonction $x(t), y(t)]$ $(x(t), y(t), z(t)]$ respectivement) doit être étudiée séparément dans l'ordre suivant :

1. Domaine de définition.
2. Périodicité.
3. Parité.
4. Continuité.
5. Dérivabilité.
6. Signe des dérivées.
7. Branches infinies.
8. Points doubles.
9. Points d'inflexion.
10. Tangente à la courbe.

Puis dans un même tableau sont regroupées les deux variations des fonctions $[x(t), y(t)]$, $[x(t), y(t), z(t)]$ respectivement en dimension 2 et 3).

2. **Dévelopée d'une courbe :**

Si une courbe Γ est donnée paramétriquement par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ alors sa developpée est donnée par la paramétrisation :

$$\begin{cases} X(t) = x(t) - \frac{(x'^2(t)+y'^2(t))y'(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \\ X(t) = y(t) + \frac{(x'^2(t)+y'^2(t))x'(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \end{cases}.$$

3. **La courbure est donnée par :**

$$\rho(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 1 :

Traiter l'exemple : (Utiliser pour vérifier le graphique ⟶ graph easy).

$$x(t) = \sin(2t)\,, y(t) = \cos(3t).$$

Cette courbe est appelée courbe de Lissajous voir table des courbes en annexe.

Exercice 2 :

Courbe simple avec asymptote. (Courbe Rationnelle, unicursale).

$$x(t) = \frac{t}{1-t^2}, \qquad y(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Exercice 3 :

Représentation polaire :

$$r(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Sujet à préparer : Dévelopée d'une courbe.

Solution de l’exercice 1 :

Domaine de définition :

$$I = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

Parité :

$$\forall t \in I, x(-t) = -x(t), y(-t) = y(t)$$

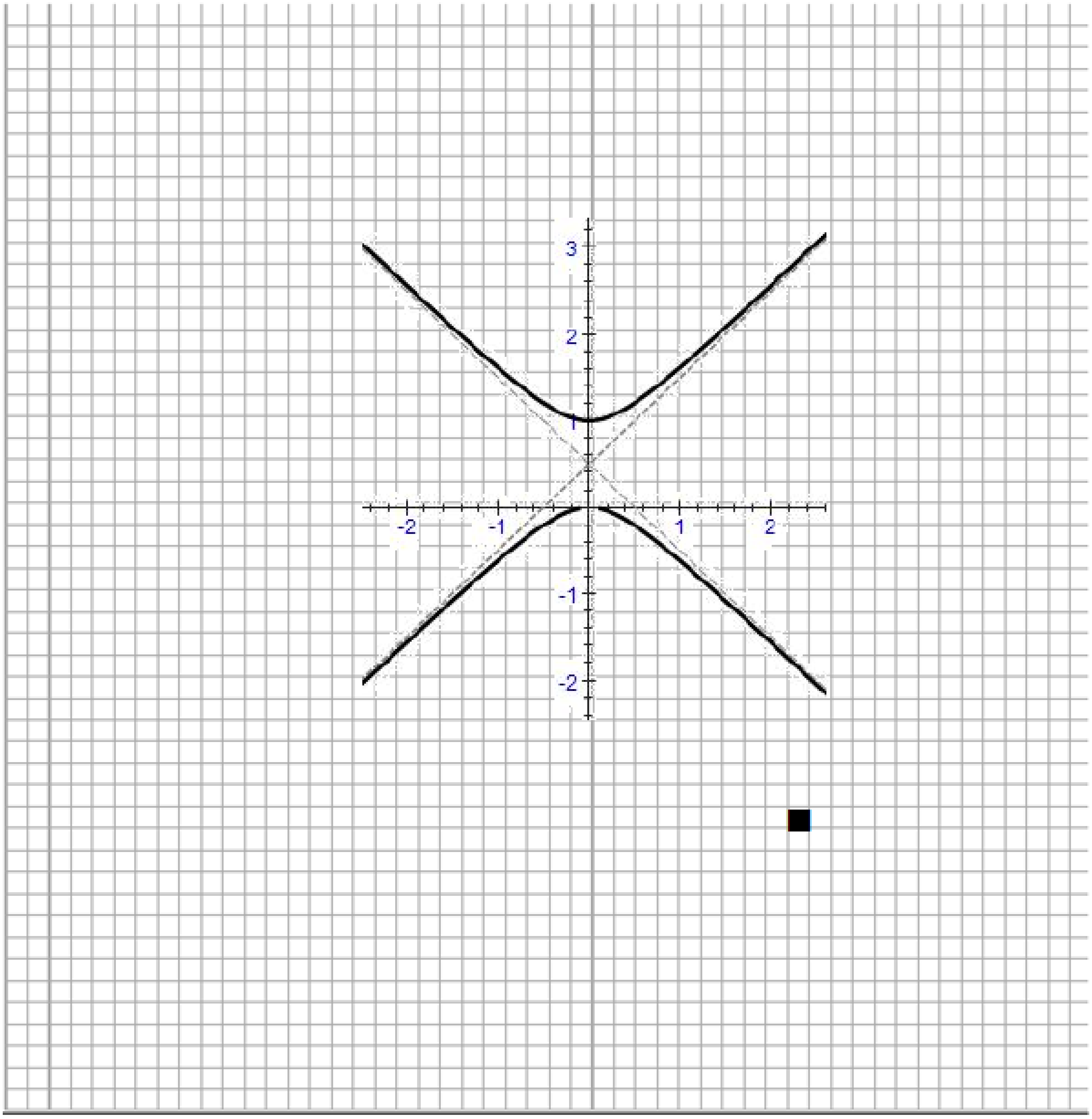
donc on compétera l’arc par une symétrie par rapport à l’axe y.

Dérivées :

$$x'(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \quad y'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$$

Tableau de variation que l’on a complété par parité :

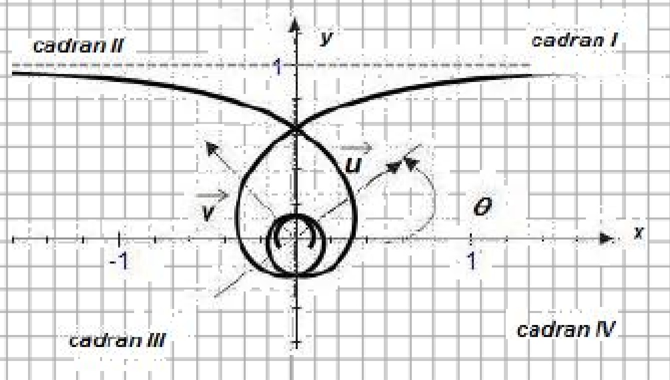
t	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
x'		$+$	$\|$	$+$	1	$+$	$\|$	$+$	
x	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0
y'		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
y	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$	0


3
2
1
-2
-1
1
2
-1
-2

Solution de l'exercice 2 :

r n'est pas périodique mais change de signe quand θ change de signe. La dérivée est donnée par : $r'(\theta) = -\frac{1}{\theta^2}$ donc constamment négative. r n'est pas définie quand $\theta = 0$, d'où la présence d'une asymptote elle est donnée par : $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ elle est d'équation $y = 1$. L'étude de r est faite sur $]0, +\infty[$, quand θ change en $-\theta$, r change en $-r$ donc on a une symétrie par rapport à Oy, soit donc le tableau et le tracé :

θ	0		$+\infty$
r'		$-$	
signe de r		+	
variation de r	$+\infty$	$\searrow$	0



Spirale hyperbolique

■

Résidus.

Mots clés : Théorème des résidus, intégrale de Cauchy.

Rappel :

(Théorème des résidus) *Soient f une fonction holomorphe sur U ouvert privé d'un nombre fini de points singuliers de f et un chemin γ^+ fermé de U dont l'intérieur*

contient les points singuliers $z_1, \ldots z_p$ de f alors :

$$\oint_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1\ldots p} I[\gamma,\ z_k]Res(f, z_k)$$

où :

$$Res(f, z_k) = a_{-1}(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_k^+} f(z)dz$$

pour tout cercle γ_k inclus dans U, centré sur z_k et ne contenant aucun autre point singulier de f.

$I[\gamma, z_k]$ est l'indice ou le nombre de fois que le chemin tourne autour du point singulier $z_k, et\ a_n$ sont tels que :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_k)^n\ , k = 1..p.$$

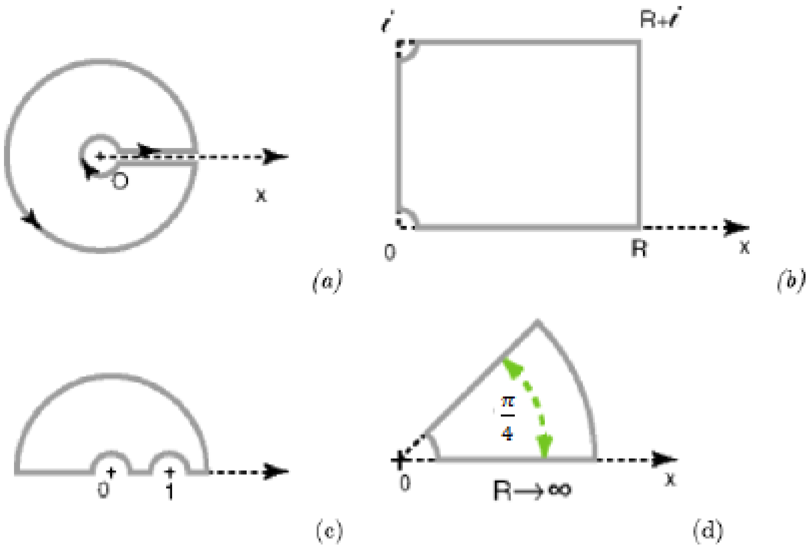
Exercice 1 : Calculer :

$$\int \frac{d\theta}{a + \cos(\theta)}$$

Exercice 2 : Calcul de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$$

<u>Exercice 3 :</u> Associer à chaque intégrale son schéma puis son résultat.



1) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}$	I) $\frac{\pi}{5}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{5})}$
2) $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^{2\pi x}-1}dx$	II) $\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{\sin(\alpha)}$
3) $\int_0^\infty \frac{\log(x+1)}{x^{1+\alpha}}dx$	III) π
4) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log(x)}{(1+x)^2}dx$	IV) $\frac{1}{4}\frac{e^a+1}{e^a-1}-\frac{1}{2a}$

Solution de l'exercice 1 :

On se place sur le cercle $C(0;1)$. On a le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2}(z + 1/z) \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(z - 1/z) \\ dz = izd\theta \end{cases}$$

L'intégrale initiale devient :

$$I = \int_{C(0;1)} f(z)dz$$

avec

$$f(z) = \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1}.$$

On vérifie que la fonction f est holomorphe dans $C(0;1)$. De plus elle admet deux pôles :

$$\begin{aligned} I = \int_{C(0;1)} f(z)dz &= 2i\pi I[C(0;1), -a + \sqrt{a^2 - 1}]Res(f, -a + \sqrt{a^2 - 1}) \\ &= 2i\pi \times 1 \times \left(\frac{-i}{\sqrt{a^2 - 1}}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

∎

Solution de l'exercice 2 :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx$$

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\mathcal{R}e\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx \\ &= 2\pi i \sum_{Im z_k > 0} Res(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, z_k)\end{aligned}$$

Il y'a un seul pôle $z = i$ situé dans le demi plan supérieur et le résidu correspondant vaut : $\frac{e^{-1}}{2i}$,

d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

■

Transformation de Laplace.

Mots clés : Transformation de Laplace, théorème du retard, règle de la dérivée, règle de la puissance.

Rappel :

La transformée de Laplace f pour une fonction définie sur $]0,+\infty[$ et s complexe, est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-ts}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(t)e^{-ts}dt.$$

Théorème du retard :

$$f(t-t_0) \to e^{-pt_0}\mathcal{L}(f(t))(s)$$

Transformée de la dérivée : Si f admet des dérivée à l'ordre k

$$\mathcal{L}(f^{(k)}(t))(s) = s^k\mathcal{L}(f(t))(s) - s^{k-1}f(0^+) - s^{k-2}f^{(1)}(0^+) - \dots - f^{(k-1)}(0^+).$$

où $f^{(k-1)}(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f^{(k-1)}(t)$. D'une manière générale si f(t) est discontinue aux points $t_1, \dots, t_n$ on obtient :

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0^+) - \sum_{k=1..n} e^{-st_k}\left[f(t_k^+) - f(t_k^-)\right]$$

$$\mathcal{L}(t^{(k)}f(t))(s) = (-1)^k\left(\mathcal{L}(f(t))\right)^{(k)}(s).$$

Multiplication par des puissances de t :

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n\left(\mathcal{L}(f(t))\right)^{(n)}(s).$$

Exercice 1 :

Montrer que :

$$\begin{aligned}\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} &= \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}\\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{(s+1)^2+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)^2+4}\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right)(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

Exercice 2 : Trouver la solution de l'équation suivante en utilisant la transformée de Laplace :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sin(3x).$$

Avec les conditions initiales : $x_0 = 0, x_0' = 0$ *pour* $t = 0$.

Exercice 3 :

Calculer :

$$\mathcal{L}(t\sin(at))(s).$$

Exercice 3 :

Calculer :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(at)}{t}\right)(s).$$

Solution de l'exercice 2 :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+4x\right)(s)=\mathcal{L}\left(\sin(3x)\right).$$

$$\mathcal{L}(x(t))(s)\left\{s^2+4\right\}=\frac{3}{s^2+9}.$$

$$\mathcal{L}(x(t))(s)=\frac{3}{(s^2+9)\left\{s^2+4\right\}}.$$

$$\mathcal{L}(x(t))(s)=-\frac{1}{5}\frac{3}{s^2+9}+\frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4}.$$

D'où :

$$x(t)=\frac{3}{10}\sin(2t)-\frac{1}{5}\sin(3t).$$

$\blacksquare$

Solution de l’exercice 3 :

$$f(t)=\sin at \Rightarrow f'(t) = a\cos at,\ f'(t) = -a^2\sin at,\ f(0)=0,\ f'(0)=a.$$

$$\mathcal{L}(f''(t))(s)=s^2\mathcal{L}(\sin at)(s)-sf(0)-f'(0).$$

$$\mathcal{L}(-a^2\sin at)(s)=s^2\mathcal{L}(\sin at)(s)-a.$$

$$\mathcal{L}(\sin at)(s)=\frac{a}{s^2+a^2}.$$

D'où

$$\mathcal{L}(t\sin at)(s)=\frac{d}{ds}\frac{a}{s^2+a^2}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}. \blacksquare$$

Solution de l’exercice 4 :

$$\mathcal{L}(f(t))(s)=\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}(\sin t)(s)$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s)=\int_s^{\infty}\frac{1}{v^2+1}dv=\operatorname{arctg}\frac{1}{s}. \blacksquare$$

Analyse numérique sous Matlab ou Maple.

Mots clés : Polynôme de Lagrange, fonction spline, spline cubique, différence divisée, conditionnement de matrice, coefficient d'amplification, norme de Frobeniüs, norme non-subordonnée, programmation.

Rappel :

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange :

La recherche d'un polynôme P, pour la fonction f aux abscisses $x_0, x_1, \dots, x_n$, tel que :

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ P(x_1) = f(x_1) \\ \dots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

P est unique.

Ce polynôme s'écrit d'une manière explicite :

$$P_n(x) = \sum_{i=0\dots n} L_i^{(n)}(x) f(x_i),$$

où

$$L_i^{(n)}(x) = \Pi_{i>j}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

et est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

2 Différences finies ou différences divisées :

Soit f une fonction de la variable x dont on connait en $x_0, x_1, \dots, x_n$.

On appelle différences divisées d'ordre $0, 1, \dots, n$ de la fonction f, les expressions :

ordre 0 $[x_i] = f(x_i) = f\,[x_i]$

ordre 1 $[x_i, x_j] = \frac{[x_i]-[x_j]}{x_i - x_j} = f\,[x_i, x_j]$

ordre 2 $[x_i, x_j, x_k] = \frac{[x_i,x_j]-[x_j,x_k]}{x_i - x_k} = f\,[x_i, x_j, x_k]$

... ...

ordre n $[x_0, x_1, \dots, x_{.n}] = \frac{[x_1,\dots,x_{.n}]-[x_0,x_1,\dots,x_{.n-1}]}{x_n - x_0} = f\,[x_0, x_1, \dots, x_{.n}]$

3 Le spline cubique d'une fonction f est donné par la formule :

$$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1...n$$
$$f''(x_i) = f_i'', i = 1...n-1$$
$$f_0'' = f''(x_0), f_n'' = f''(x_n),$$

$$\begin{aligned} p_i(x) &= -f_{i-1}''\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + f_i''\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &\quad - \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - h_i\frac{f_{i-1}''}{6}\right)(x-x_i) \\ &\quad + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - h_i\frac{f_i''}{6}\right)(x-x_{i-1}) \end{aligned}$$

4 Programmation :

Exemple : pratique de Matlab.

1. Matrices et vecteurs
   1.1. –Les différentes fenêtres de Matlab.
   1.2. –Utilisation de l'aide en ligne.
   1.3. –Manipulation sur les vecteurs
   1.4. –Construction de vecteurs
   1.5. –Construction de matrices et matrices particulières
   1.6. –Opérations sur les matrices
2. –Les fichiers script et les fonctions
   2.1. –Utilisation d'un fichier externe (script)
   2.2. –Création d'une fonction dans un fichier externe (M-File)
   2.3. –Création d'une fonction (en ligne)
   2.4. –Calculs sur les fonctions
3. Représentation graphique
   3.1. -Représentation d'un graphique
4. Calculs sur les polynômes
5. Les boucles for, if ET while.

Recherche individuelle sur

- Le conditionnement de matrice.
- L'interpolation.
- Les fonctions ' spline'.

Exercice 1 : Vérifier les calculs sous Matlab.

Résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

On perturbe b de manière à obtenir :

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 32{,}1 \\ 22{,}9 \\ 33{,}1 \\ 30{,}9 \end{pmatrix},$$

Résoudre :

$$A(x + \delta x) = b + \delta b.$$

On perturbe A de manière à obtenir :

$$A + \delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système d'équations :

$$(A + \delta A)x = b,$$

puis calculer $x + \delta x$, comparer avec la solution du système de la question précédente, trouver un ordre d'erreur entre ces deux systèmes puis calculer A^{-1} que peut-on en conclure ?

Solution de l’exercice 1 :

Dans le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

de la forme :

$$Ax = b$$

la solution est :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si on perturbe b en :

$$b + \delta b = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix}$$

la solution de :

$$A(x + \delta x) = b + \delta b$$

devient :

$$x + \delta x = \begin{pmatrix} 9,2 \\ -12,6 \\ 4,5 \\ -1,1 \end{pmatrix}$$

l’erreur est de l’ordre de 2000. Si on perturbe A,

$$(A + \delta A)x = b$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

la solution devient :

$$x + \delta x = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

l'erreur relative sur les données est de l'ordre de 1/200, sur le résultat est de l'ordre de 10/1. Et pourtant l'aspect de la matrice A est 'correct', son déterminant vaut 1 et son inverse est sans virgule :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -41 & 10 & -6 \\ -41 & 68 & -17 & 10 \\ 10 & -17 & 5 & -3 \\ -6 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Exercice 2 :

(Se familiariser avec Matlab) *Résoudre l'exercice sous Matlab. Soient dans* $E = \mathbb{R}^4$,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}, \delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}08 & 0{,}04 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}02 & -0{,}11 & 0 \\ -0{,}01 & -0{,}01 & 0 & -0{,}02 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \delta b = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

1. *Résoudre le système* $Ax = b$*, en utilisant la commande* $A\backslash b$ *et* $inv(A) * b$*, quelle est la différence entre les deux commandes.*
2. *Résoudre le système* $(A+\delta A)(x+\delta x) = b$*. En utilisant la commande* $norm(B, 2)$*, calculer*
$$errx = \frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2}, errA = \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}$$
et le coefficient d'amplification $coeff = \frac{errx}{errA}$.
3. *Résoudre le système* $A(x + \delta x) = b + \delta b$*. Calculer*
$$errx = \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2}, errb = \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

4. *Calculer à l'aide de la commande* $eig(A)$*, les valeurs propres :*
$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4,$$
de A.
5. *Calculer à l'aide de la commande* $cond(A, 2)$*, le conditionnement de* A,
$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}.$$
6. *Calculer la quantité* $\kappa_2(A)errb$*, comparer à* $errx$*. Que peut-on en conclure ?*
7. *Calculer les normes* $\|A\|_2$, $\|A^{-1}\|_2$ *puis à l'aide de* $norm(B,'fro')$, $\|A\|_E$ *et remarquer que cette dernière est non subordonnée.*
8. *Comparer* $\kappa_2(A)$ *puis à l'aide* $cond(B,'fro')$, $\kappa_E(A)$.
Conclusion ?

Exercice 3 :

a)Utiliser la fonction 'polyval' de Matlab pour tracé le 'spline cubique' de la fonction :

$$f(x) = xsinx - xcosx.$$

b)

***(Spline cubique)** Compléter le tableau puis sous Matlab résoudre l'exercice en utilisant la saisie de quatre points à la souris :*

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	h_i
0	?	?			
			?		1
1	?	?		?	
			?		2
2	?	?		?	
			2		1
3	?	?			

c)

Montrer que dans le cas d'une spline naturelle la détermination de f_1'' et f_2'' passe par la résolution d'un système du type :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1'' \\ f_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Déduire les polynômes splines cubiques dans l'intervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$ et $[x_2, x_3]$.

<u>Exercice 4 :</u> Utiliser Matlab pour trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange sur un ensemble de points de la fonction de l'exercice 3.

Solution de l’exercice 2 :

```
clear all
clc
disp('Réponse 1')
A=[10,7,8,7;7,5,6,5;8,6,10,9;7,5,9,10]
b=[32,23,33,31]'
x=A\b
x=inv(A)*b
disp(['La solution du système linéaire est: ']), x
disp('Réponse 2')
dA=[0,0,0.1,0.2;0.08,0.04,0,0;0,-0.02,-0.11,0;-0.01,-0.01,0,
-0.02];
A2=A+dA
x2=A2\b
disp(['La solution du système linéaire perturbé est: ']),x2
dx=x-x2
errx=norm(dx,2)/norm(x+dx,2);
errA=norm(dA,2)/norm(A,2);
coef=errx/errA
disp(['Le coefficient d"amplification d"erreur vaut: ',
num2str(coef)])
disp('Réponse 3')
db=[0.1;-0.1;0.1;-0.1];
b3=b+db
x3=A\b3
disp(['La solution du système linéaire perturbé est: ']),x3
dx3=x3-x;
errx2=norm(dx3,2)/norm(x,2);
errb=norm(db,2)/norm(b,2);
coef2=errx2/errb
disp(['Le coefficient d"amplification d"erreur vaut: ',
num2str(coef2)])
disp('Réponse 4')
disp(['Les valeurs propres de A sont : '])
lamda=eig(A)
disp('Réponse 5')
disp(['Le conditionnement de A est : '])
cond21=lamda(4)/lamda(1)
disp('Réponse 6')
disp(['cond(A) x erreur(b) vaut : '])
w=cond21*errb
disp('Réponse 7')
disp(['La norme 2 de A est : '])
normeA=lamda(4)
disp(['La norme 2 de inverse de A est : '])
```

Solution de l’exercice 3 :

Corps de programme :

```
function [a]=spline
n=10;
h=1/n;
```

```
D=sparse(1:n-1,1:n-1,4*ones(1,n-1),n-1,n-1);
E=sparse(2:n-1,1:n-2,ones(1,n-2),n-1,n-1);
S=E+D+E'
for i=1:n-1,
k(i)=6*(-2*fonctionf(i*h)+fonctionf((i-1)*h)+
      fonctionf((i+1)*h))/(h*h);
end
```

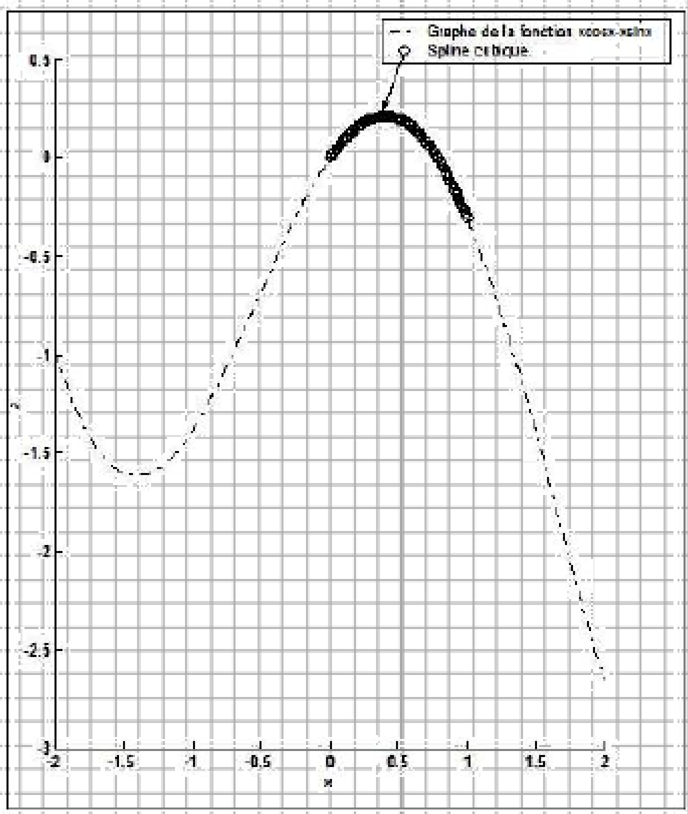
```
m=S\k';
```

Représentation graphique :

```
u = [ 0 m' 0 ];
hold on
fplot('fonctionf(x)',[-2 2],'k-.');
drawnow;
for i=0:n-1,
P = [ (u(i+2)-u(i+1))/(6*h),
u(i+1)/2,
(fonctionf((i+1)*h)-fonctionf(i*h))/h-(2*u(i+1)+u(i+2))*h/6,
fonctionf(i*h) ]';
v=i*h:h/10:(i+1)*h;
w=v-i*h;
plot(v,polyval(P,w),'ko');
enddrawnow;
xlabel('x');
ylabel('y');
legend('Graphe de la fonction fonctionf','Spline cubique');
```

Algorithme de la fonction $x\cos x - x\sin x$

```
function [y]=fonctionf(x)
y=x*cos(x)-x*sin(x)
```


Graphe de la fonction
Spline cubique
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x

```
function SplineCubique()
close all;
figure('position',[10,10,800,600]);
axis([0 10 0 10]);
axis off;
hold on
%1-depart,la liste des points est vide...
X=[]; Y=[];n=1;
disp('saisie premier point bouton gauche de la souris.')
disp('relie ces points dans l'ordre bouton droit de la
 souris.')
% 2-Ajout de point avec la souris
bouton=1;
while bouton==1
n=n+1;
[X(n),Y(n),bouton]=ginput(1);
plot(X(n),Y(n),'ro');
end
X(1)=X(n);
Y(1) = Y(n);
plot(X,Y,'b-');
```

La programmation Matlab

Exercice 1 :

(-Les differentes fenêtres de matlab) *a) En utilisant la fenêtre d'espace de travail (Workspace) indiquez dans quelles classes sont les objets suivants :*

a=2+3i ; b=[1 2 ; 3 4] ; c='abcd' ; d={'Paul' 2 ; ' Claire' 1 }.

b) En utilisant l'instruction who ou whos indiquez les variables qui on été affectées. Désafecter la variable a.

c) Après l'exercice effacer les données en mémoire en utilisant clear et vider les fenêtres de commandes, d'historique et de travail

(edit ⟶ Clear Command Window...)

Exercice 2 :

(-Utilisation de l'aide en ligne) *a. On veut trouver comment calculer les différentes normes de vecteurs (norme euclidienne, norme 1, norme infini), le produit scalaire de 2 vecteurs, et le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour cela taper lookfor vector (dans la fenêtre de commande) puis dans l'icône help ouvrir Matlab help et utiliser le help navigator, index en entrant norm , dot ou cross.*

(On peut aussi taper dans la fenêtre de commande help norm...)

Soit $a = (1, 3, 5, 1)'$ *et* $b = (1, 1, 2, 2)'$. *Calculer* $a.b$, $\|a\|_1$, $\|a\|_2$, $\|a\|_\infty$, *puis (1, 3, 5)' ∧(1, 1, 2) '.*

b. En utilisant l'aide en ligne sur format écrire sous forme de fractions :

$$21/5, 1/2 + 1/3, pi.$$

Donner les différentes formes d'affichage d'un nombre. Tester sur le nombre π.

Exercice 3 :

(-Manipulation sur les vecteurs) *Soit le vecteur ligne a=(1,1+2i,3).*

Tester les instructions suivantes : a' et a.' a a et a. a, a(6) = 6, a/a et a./a, norm(a), norm(a,2), norm(a,1), norm(a,inf).

(Consulter l'aide en ligne pour des renseignements sur norm).

Exercice 4 :

(-Construction de vecteurs.) *Prévoir (sans utiliser le logiciel) l'effet des commandes suivantes, puis vérifier sur le logiciel.*

a) a=[1 2 3] ; b=[1,2,3] ; c=[1 :2 :3] ; d= [1,2,3]' ; e=[0 ; i] ; e' ; e.'.

b) a=0 :10 ; b=0.10 ; c=[0 : 10] ; d=[0 ; 10] ; e=[0,10] ;f=0.7 :3.4.

c) a=[0 :0.1 :1] ; b=[0 :0.15 :1] ; c=[1 : -0.15 :0] ; d=linspace(0,1,10) ;

d) Expliquer la différence entre les commandes : [début : fin] ; [début :pas : fin] ; linspace(a,b,n).

Indiquez une méthode pour partager un intervalle borné en 50 intervalles demême longueur ?

Exercice 5 :

(-Construction de matrices et matrices particulières.) *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Si l'instruction suivante a un sens quelle sera la réponse ?

Vérifier. B = [A, zeros(2, 3) ; diag([1, 2]), eye(2, 4)] Quelle est la taille de B ?

b) Remplacer la derni'ere colonne de B par le vecteur (7, 8, 9, 10) puis extraire la matrice correspondant aux lignes 2 et 4, et aux colonnes 2 et 6.

c) Pouvez-vous prévoir la réponse aux instructions suivantes : A' ; diag (A) ; diag(diag(A)) ; triu(A) ; tril(A) ; diag(A) ; rand(size(A)) ; eye(size(A))

d) Quel est l'effet de A(1,2)=0, puis de A(4,2)=5 ?

Expliquez pourquoi la réponse à A(10) est 6.

Exercice 6 :

(-Opérations sur les matrices.) *a) Soient :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*Que peut-on dire de B = A + 2 ; C = A*3 ; D = A + 3 eye(size(A)) ;*

Comparer E = AA ; F = A. A ; G = A^3 ; H = A.^{3} ; I = exp(A) ; J=sqrt(A) ; K = A u ; L = A. A ; M = A A'

Quel est le rôle du point dans la ligne précédente ?

b) Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

*Peut-on calculer A*B, A.*B ,A*B' ,A.*B', B^2 ,B.^{2} ?*

c) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ une matrice. Quelles sont les conditions pour que A admette une matrice inverse ?

Quelles sont les conditions pour que l'on puisse calculer la matrice :

$$B = (1/a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}?$$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Peut-on calculer A-1 ? B ?

d) Fonctions mathématiques et matrices.

Soit A une matrice. Que représente sin(A) , asin(A) , sqrt(A) , log(A) ?

Essayez avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,2 & 0,7 \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0,3 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -1 & 0,2 & 0,7 \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0,3 \end{pmatrix}$$

Que pensez-vous des réponses obtenues pour la seconde matrice ?

e) Soit A est une matrice carré

i) Comment former simplement la matrice A + 7896I_n où I_n est la matrice identitée.

Exercice 7 :

(-Utilisation d'un fichier externe (script)) *Ouvrir à partir du menu file (new ! M.File), ou des icônes de la barre de menu, un nouveau fichier dans lequel vous inscrivez : a=.5 b=pi c=a+b Enregistrer ce script : exemple.m (file- → save)*

Dans la fenêtre de commande vous pouvez appeler ce script en entrant : exemple.

Pour supprimer ce script on peut entrer dans la fenêtre de commande : delete exemple.m ou bien, aprés avoir selectionner le fichier dans la fenêtre de l'éditeur (Current Directory), cliquer sur Edit - → delete.

Remarque : à partir de maintenant les exercices se feront sur des fichiers externes. Ceci permet de les modifier facilement et les garder en mémoire.

Exercice 8 :

(-Création d'une fonction dans un fichier externe (M-File)) *Dans un fichier externe la syntaxe de définition d'une fonction est :*

function [y1, ... , ym] = nom(x1,... , xn) ... instructions où y1, ... , ym sont les arguments de sortie et x1,... , xn ceux d'entrée.

Remarques :

Le fichier doit être enregistré sous nom.m. et il est recommandé d'inscrire dans le fichier le rôle de la fonction que l'on vient de créer : % Cette fonction calcule... Que se passe t-il si dans la fenêtre de commande on entre : help nom ou bien lookfor nom
a) En utilisant la fonction atan2 déterminer l'angle polaire des points M =(1,-1) et N = (-1, 1).

b) Construire une fonction qui calcule les coordonnées polaire d'un point du plan.

On appellera ce fichier polaire.m, les paramètres d'entrée seront les coordonnées d'un vecteur, et les param'etres de sorties le rayon et l'angle polaire (voir atan2)

c) En utilisant la fonction polaire.m, construire une fonction qui calcule la mesure de l'angle en radian et en degré de deux vecteurs du plan. On appellera ce fichier aangle.m, les paramètres d'entrée seront les coordonnées de deux vecteurs, et la sortie dans la fenêtre de commande sera : la mesure en radian est : ...puis la mesure en degré est : ... (utiliser disp).

d) Il peut être dangereux d'appeler angle la fonction précédente. Pourquoi ?

Calculer l'argument de $Z = 1 - i$.

Exercice 9 :

(-Création d'une fonction (en ligne)) *Dans la fenêtre de commande la syntaxe de définition d'une fonction est :*

nom de la fonction=inline('expression en une variable')

nom de la fonction=inline('exp. en plusieurs variables' ,'var. 1' ...'var. n')

Le calcul se fait par nom de la fonction (valeurs des variables).

a) Créer une fonction en ligne que l'on notera f et qui permet de calculer :

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

suivant les valeurs de x, y. *Calculer f(1,-1).*

b) Créer un fichier (M-file) que l'on appellera ffonction et qui permet de calculer

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}$$

suivant les valeurs de x, y.

Exercice 10 :

(-Calculs sur les fonctions.) *a) Dans un fichier M-file consigner la fonction que l'on appellera mafc définie par :* $1 + x + x^2$ *et de façon qu'elle puisse s'appliquer à des vecteurs.*

b) En suivant l'exemple donnée dans le help à quad calculer l'intégrale de mafc sur [0, 1].

c) Déterminer le zéro de mafc le plus proche de 3 (voir fzero).

d) En suivant l'exemple donnée dans le help à fminbnd déterminer le minimum de mafc sur [-10, 10]. Tracer le graphe de mafc pour contrôler.

e) Si X *est un vecteur que signifie diff(X). En suivant l'exemple donné dans diff, tracer dans une même fenêtre la courbe de mafc (en bleu) et de sa dérivée (en rouge) sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Exercice 11 :

(-Représentation graphique.) *Pour les représentations graphiques voir l'aide en ligne plot et LineSpec*

a) Soient les vecteurs Décrire les représentations graphiques suivantes :

```
figure(1) , plot(X)
figure (2) , plot(XX)
figure (3) , plot(X,Y)
figure (4) , plot(X,Y,': O m')
figure (5) , plot(X,Y,': O m',X,Z, '-. * r')
```

b) On veut obtenir la représentation graphique de la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-x}\sin(4x)$$

sur l'intervalle $[0,2]$*. Que représente les vecteurs suivants :*

```
x=linspace(0,2*\pi ,101);
y = exp(-x) . sin(4 x);
```

Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [0,2]. En utilisant le zoom donner une valeur approchée du maximum de f sur [0,2]. Comment peut-on affiner le tracer de f pour préciser ce maximum ?

c) Dans une même fenêtre tracer les courbes d'équations $y = x^2$ *en rouge et* $y = x^2\sin(x)e^{-x}$ *en vert sur [-1, 1].*

d) Construire la courbe du plan paramétrée par

$$x(t) = \cos(3t), y(t) = \sin(2t)$$

e) Construire la courbe de $\mathbb{R}^3$ *paramétrée par :*

$$\left\{ \begin{array}{c} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \quad t \in [0,10] \\ z = t \end{array} \right.$$

(Voir l'aide en ligne plot3)

f) En utilisant l'exemple donné dans l'aide 'a meshgrid construire la surface d'équation $z = \frac{\sin(r)}{r}$ *où* $r = \sqrt{x^2+y^2+1}$ *avec* $-5 \le x \le 5$ *,*$-5 \le y \le 5$ *et un pas de 0.2.*

Exercice 12 :

(-Calculs sur les polynômes.) *Consulter l'aide en ligne sur poly , roots , conv, deconv, polyder, polyval.*

Entrer les polynômes

$$p = 2x^5 - x^2 + 5x \text{ et } q = x^2 + 1.$$

Calculer les racines de p et q. Calculer p' Calculer le produit p.q Calculer le quotient et le reste de p par q. Calculer les valeurs de p en 0 et -1. Tracer la courbe d'équation y = p(x) sur [-10, 10].

Exercice 13 :

(-La boucle for...end) *Rappel de la structure : for k= liste / instructions / end où / désigne ; ou , ou un retour à la ligne. a) En utilisant l'instruction for construire un scripts qui calcule $n!$. On pourra utiliser soit une fonction ((function [y]=fact(n)) soit l'instruction n=input('afficher la valeur de n')*

b. En utilisant l'instruction for construire un scripts qui en fonction de l'entier n affiche la matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où $a_{i,j} = \frac{1}{i+j}$.

Exercice 14 :

(-La boucle if ... end) *Rappel de la structure : if expression booléenne 1 / script 1 (évalué si exp 1 vraie)/ elseif expression booléenne 2 / script 2(évalué si exp 2 vraie)/.../ else expression booléenne / script (évalué si exp vraie)/ end o'u / désigne ; ou , ou un retour à la ligne. Écrire dans un M-file une fonction equa2(a,,b,c) qui détermine si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles et les calcule.*

Exercice 15 :

(-La boucle while ... end) *Rappel de la structure : while expression booléenne / script end Remarque : on peut sortir d'une boucle for, while ou if en utilisant la commande break. a) Ecrire dans un M-file une fonction que l'on appellera test, d'arguments k entier naturel et epsilon réel strictement plus grand que eps, et qui détermine le plus petit entier n tel que : $\frac{1}{n^k} < \epsilon$.*

b) En utilisant une boucle while et une boucle if, écrire dans un M-file une fonction que l'on appellera somme et d'arguments indimax et borne. Cette fonction doit renvoyer le plus petit entier $n < indimax$ tel que

$$1 + 1/2 + ... + 1/n > borne$$

lorsqu'il existe et sinon affiche indice max atteint

c) Étant donné un entier $n > 1$ si il est pair on le divise par 2 et si il est impair on le multiple par 3 et on ajoute 1. On conjecture que si sur le nouvel entier que l'on obtient on re-applique cette procédure alors, après un nombre fini d'étape, on obtient 1. (Actuellement on ne sait pas si cette conjecture est vraie ou fausse).

Écrire dans un M-file une fonction que l'on appellera fonction et qui teste cette conjecture.

Solution de L'exercice 1 :

```
a=2+3*i
b=[1 2 ;3 4]
c='abcd'
d={'Paul' 2,'Claire' 1}
who
whos
whos a
class(a)
class(b)
class(c)
class(d)
clear
```

Solution de l'exercice 2 :

```
% lookfor vector
a=[1; 3; 5; 1]
b=[1; 1; 2; 2]
dot(a,b)
norm(a,1)
norm(a,2)
norm(a,inf)
cross(a(1:3),b(1:3))
format rat
21/5
1/2+1/3
pi
format long
pi
format
pi
```

Solution de L’exercice 3 :

```
           a=[1,1+2i,3]
a’ % renvoie la transposée de la conjuguée
a.’% renvoie la transposée
a’*a % effectue le produit matriciel
a.*a % effectue le produit terme à terme
a(3) % accède à la 3ème composante
a/a % l’instruction a/B propose une solution à
 l’équation x\B=a
% Important : pour chercher une solution à
 un système d’équation, il est préférable
 d’utiliser cette commande plutôt que de calculer
 l’inverse de la matrice, opération beaucoup
 plus coûteuse.
a./a % comme toutes les opérations pointées,
 il s’agit de la division composante par composante
norm(a) % norme euclidienne
norm(a,2) % norme euclidienne
norm(a,1) % norme 1
norm(a,inf) % norme infinie
```

Solution de L'exercice 4 :

```
% Question a
% ----------
a=[1 2 3] % vecteur ligne affecté à a
b=[1,2,3] %  vecteur ligne
c=[1:2:3] %  vecteur ligne des termes la progression
 arithmétique de terme initial 1, de raison 2 et
 inférieurs à 3
d=[1,2,3]' %  vecteur colonne
e=[0;i] %  vecteur colonne
e' %  transposition hermitienne
e.' %  transposition
% ----------
% Question b
% ----------
a=0:10 %  suite des entiers de 0 à 10
b=0.10 %  réel
c=[0:10] %  vecteur ligne de la suite des entiers de 0 à 10
e=[0,10] %  vecteur ligne à deux termes
f=0.7:3.4 % termes la progression arithmétique de terme
 initial .7, de raison  et inférieurs à 3.4
% ----------
% Question c
% ----------
a=[0:0.1:1] % termes la progression arithmétique de terme
 initial 0, de raison .1 et inférieurs à 1
b=[0:0.15:1]  % termes la progression arithmétique de terme
 initial 0, de raison .15 et inférieurs à 1
d=linspace(0,1,10) %  division de l'intervalle [0,1] en 10
 sous-intervalles de même longueur
```

Solution de l’exercice 5 :

```
             A=[ 1 2 3 ; 4 5 6]
% ----------
% Question a
% ----------
B =[A,zeros(2,3);
diag([1,2]),eye(2,4)] % matrice construite
 par blocs
% zeros(m,n) % crée une matrice de zéros
% diag % crée une matrice diagonale
% eye crée une matrice identité
size(B) % dimensions de B
% ----------
% Question b
% ----------
% on peut soit rentrer les valeurs point par point
B(1,6)=7; B(2,6)=8; B(3,6)=9; B(4,6)=10;
% ou bien, agrandir la matrice par
B(:,6)=[7:10]’
B([2,4],[2,6]) % extraction des éléments sur les lignes
 2 et 4 et sur les colonnes 2 et 6.
B(:,6) % extraction sur les toutes les lignes et sur la
 colonne 6
% ----------
% Question c
% ----------
A’ % transposition
diag(A) % extraction des termes diagonaux
diag(diag(A)) % matrice diagonale des termes diagonaux
triu(A) % extraction de la partie triangulaire supérieure
tril(A) % extraction de la partie
 triangulaire inférieure
```

```
rand(size(A)) % tire au hasard une matrice
eye(size(A)) % identité
A(1,2)=0 % modifie la valeur du coefficient
A(4,2)=5 % modifie la valeur du coefficient tout
 en agrandissant la matrice
A(10)% 10 ème éléments de la matrice en comptant colonne
 par colonne
```

■

Solution de l'exercice 6 :

```
            %  Question a
%  ----------
A = [1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]
u = [2;4;6]
B=A+2
C=A*3
D=A+3*eye(size(A))
E = A*A %  produit matriciel
F = A.*A %  produit composante par composante
G= A^3 % puissance matricielle
H =A.^3 % puissance composante par composante
I=exp(A) %  exponentielle composante par composante
J=sqrt(A) %  racine carrée composante par composante
K=A*u
L=A.*A
M=A*A'
%  ----------
%  Question b
%  ----------
A=[1 2 3 ; 4 5 6]
B =[7 8 ; 9 10 ; 11 12]
A*B
A.*B
A.*B'
B^2
```

```
%  ----------
%  Question c
%  ----------
A =[-1 2 3 ;
4 5 6 ;
7 8 9]
A^(-1) % inversion de la matrice, attention, pour résoudre
 un systéme d'équations AX=b, il vaut mieux utiliser
  X=A\b plutôt que de calculer l'inverse entièrement
inv(A) %  inversion de la matrice
1./A %  inversion composante par composante
%  ----------
%  Question d
%  ----------
sin(A)\ %  sinus composante par composante
asin(A)
sqrt(A)
log(A)
A =[1 .2 .7 ; pi/4 1/sqrt(2) .3]
```

■

Solution de l’exercice 8 :

```
              f=inline('(x-y)/(x^2+y^2)')
f(1,-1)
ffonction(1,-1)
% ====================================
% enregistrer dans un fichier polaire.m
% ====================================
function[r,theta]=polaire(u)
theta=atan2(u(2),u(1));
r=norm(u);
% ====================================
% enregistrer dans un fichier aangle.m
% ====================================
function[theta]=aangle(M,N)
theta=atan2(M(2),M(1))-atan2(N(2),N(1));
disp(strcat('la mesure en radian est ', num2str(theta))
disp(strcat('la mesure en radian est ',
 num2str(theta*180/pi) ))
% ====================================
% enregistrer dans un fichier ffonction.m
% ====================================
function[f]=ffonction(x,y)
f=(x-y)/(x^2+y^2)
% ====================================
```

Solution de l’exercice 10 :

```
            %  Question b
%  ----------
quad(@mafc,0,1)
%  ----------
%  Question c
%  ----------
fzero(@mafc,3)
%  ----------
%  Question d
%  ----------
fminbnd(@mafc,-10,10)
%  Question e
x=0:0.01:1;
y=mafc(x);
yy=diff(y);
plot(x,y,x,[yy(1),yy])
% ====================================
% Texte du fichier mafc.m
% ====================================
function[f]=mafc(x) f=-1+x+x.^2;
% ====================================
```

■

Solution de l'exercice 11 :

```
% Question a
% ----------
X = [1 3 4 10]
XX = [1+i 2 3+5i]
Y = [1,-2,7,6]
Z=[0,2,5,-1]
figure(1), plot(X)
figure(2), plot(XX)
figure(3), plot(X,Y)
figure(4), plot(X,Y,': o m')
figure(5), plot(X,Y,': o m',X,Z,'-. * r')
% ----------
% Question b
% ----------
t=[0:.1:2*pi];
f=exp(t).*sin(4*t);
plot(t,f)
max(f)
% ----------
% Question c
% ----------
x=[-1:.01:1];
y1=x.^2;
y2=y1.*sin(x).*exp(-x);
plot(x,y1,'r',x,y2,'g')
```

```
%  Question  d
t=[0 : .1 : 2*pi]
x=[cos(3*t)]
y=[sin(2*t)]
plot(x,y)
%  ----------
%  Question e
%  ----------
t=[0 : .1 : 2*pi]
x=[cos(t)]
y=[sin(t)]
z=t
plot3(x,y,z)
%  ----------
%  Question f
%  ----------
[x,y] = meshgrid(-5:.2:5, -5:.2:5);
z =sin(sqrt(x.^2+y.^2+1))
surf(x,y,z)
```

■

Solution de l'exercice 12 :

```
              %  Définition des polynômes
p=zeros(1,6);
q=zeros(1,3);
p(1)=2; p(4)=-1; p(5)=5;
q(1)=1; q(3)=1;
% Racines
roots(p)
roots(q)
%  Dérivation
polyder(p)
% Produit
conv(p,q)
% Division euclidienne
deconv(p,q)
[a,r]=deconv(p,q)
a,r
% Evaluation
polyval(p,0)
polyval(p,-1)
%  Graphique
x=-10:.01:10;
y=polyval(p,x);
plot(x,y)
```

Solution de l'exercice 13 :

```
help for
fact(2)
fact(10)
Matrice1(4)
% =====================================
%  Autre façon de faire, sans boucle for,
 mais plus sophistiqué n=4
1.\((ones(4,1)*[1:n])+([1:n]'*ones(1,4)) -1)
% =====================================
%  ou encore en utilisant une matrice de hilbert
% =====================================
n=4
hilb(n)
% =====================================
% fact.m
% =====================================
function[fact]=fact(n)
 fact=1
 for i=1:n fact=fact*i; end
% =====================================
% Matrice1.m
% =====================================
function[A]=Matrice1(n)
 A=zeros(n);
 for i=1:n for j=1:n
A(i,j)=1/(i+j-1);
end end
% =====================================
```

Solution de l'exercice 14 :

```
help if
equa2(4,8,4)
equa2(1,2,-4)
equa2(5,-1,7)
% ====================================
% equa2.m
% ====================================
function[solutions]=equa2(a,b,c)
D=b^2-4*a*c; if D==0
solutions=[-b/(2*a),-b/(2*a)];
elseif D<0
solutions=[];
elseif D>0
solutions=[(-b+sqrt(D))/2,(-b-sqrt(D))/2];
end
% ====================================
```

Solution de l'exercice 15 :

```
help while
%  ----------
%  Question a
%  ----------
test(1,1/6)
test(2,1/pi)
%  ----------
%  Question b
%  ----------
somme(25,4)
somme(31,4)
somme(32,4)
somme(100,4)
sum(1./[1:30])
sum(1./[1:31])
```

```
%  ----------
%  Question c
%  ----------
fonction(10)
fonction(35)
% ====================================
% test.m
% =====================================
function[n]=test(k,epsilon)
%  attention, il existe par défaut une variable
%  eps dans matlab qui correspond à un petit
%  nombre au dessous duquel matlab considère
%  qu'une quantité est nulle !
n=1;
t=1;
while t<epsilon
n=n+1;
t=1/n^k;
end
% ====================================
% somme.m
% ====================================
function[n]=somme(indimax,borne)
s=1;
n=1;
while s<=borne && n<indimax
n=n+1;
s=s+1/n;
```

Surfaces : Utilisation de Maple ou Matlab pour une application informatique.

En salle d'informatique. En plusieurs TP.

Rappel :

Une boule en dimension n admet la paramétrisation suivante :

$$U =]0,+\infty[\times]0,\pi[\times]0,\pi[\times\ldots\times]0,\pi[\times]a,a+2\pi[$$

Pour chaque n-uple $(\rho,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}) \in U$, posons :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho\cos\varphi_1 \\
x_2 &= \rho\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\
x_3 &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\
&\ldots \\
x_{n-1} &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\
x_n &= \rho\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

Recherche individuelle.

Surfaces simples ou solides simples et tracé de courbe sur une surface.

(Indication commencer par le tracé d'une droite sur une sphère ; colorier un méridien, un méridien oblique, …etc.).

Classification :

1. Surface parabolique.
2. Surface elliptique.
3. Surface hyperbolique.

4ième partie Probabilité & statistique.

1. Notion d'événement et de variable aléatoire.
2. Variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue.
3. Densités et lois.
4. Egalité de Bayes et probabilité conditionnelle.
5. Théorème centrale limite.
6. Fonction caractéristique.
7. Estimation
8. Tests
9. Régression
10. Simulation de lois.

Probabilités.

Mots clés : variable aléatoire discrète, variable aléatoire continue, loi, théorème centrale limite, densité, formule de Bayes, événement , probabilité conditionnelle, fonction caractéristique. Loi normale, loi log normale, loi de Student, loi de Fischer-Snédécor, loi gamma, loi exponentielle, loi de Pareto, loi du khi-deux, loi de Weibull.

Rappel :

Distributions continues :

1. **Loi normale :**

X suit une loi normale ou de Laplace-Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa fonction de répartition est donnée par :

$$\Phi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du$$

sa densité par :

$$f(u; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

les paramètre μ et σ sont appelés moyenne et variance ou deviation standard. Par suite de la symétrie de f et comme l'intégrale de X converge $E(X) = \mu$, avec le changement de variable : $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$

les paramètre μ et σ deviennent 0 and 1 et la densité est la densité de la loi centrée réduite :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

2. **Loi log normale :**

Une variable x est dite de loi log-normale de paramètres (m, σ^2) lorsque logx a une loi normale $NormalDist(x; \mu, \sigma)$ ainsi la loi log normale a pour densité :

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{|x|} e^{\frac{1}{\sigma^2}(logx-m)^2}.$$

3. **Loi de Student :**

La distribution de Student notée t est définie par sa fonction de répartition :

$$T(x; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^{x} \left(1 + \frac{1}{v}u^2\right)^{-\frac{v+1}{2}} du$$

ou sa densité :

$$t(u; v) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{1}{v}u^2\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

v, est appelé degré de liberté, entier positif. La variance d'une distribution de Student t est $\frac{v}{v-2}$, quand $v > 2$.

4. **Loi du khi-deux :**

la distribution du χ^2,(du khi-deux) est définie par sa fonction de répartition :

$$F(x;\mu) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\mu}{2})2^{\frac{\mu}{2}}} \int_0^x u^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}} du$$

ou par sa densité :

$$f(u;\mu) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\mu}{2})2^{\frac{\mu}{2}}} u^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{u}{2}}$$

le paramètre $\mu > 0$est la moyenne de la distribution ; c'est aussi le degré de liberté.

5. **Loi de Fischer-Snédécor :**

La distribution de Fisher-Snédécor, F est donnée par sa fonction de répartition :

$$F(x;n,m) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \int_0^x u^{\frac{n-2}{2}} \left(1 + \frac{n}{m}u\right)^{-\frac{n+m}{2}} du$$

ou sa densité :

$$FDen(u;n,m) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} u^{\frac{n-2}{2}} \left(1 + \frac{n}{m}u\right)^{-\frac{n+m}{2}}$$

6. **Loi exponentielle :**

la loi exponentielle est donnée par sa fonction de répartition cumulative de paramètre μ, ou de moyenne μ :

$$F(x;\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{\frac{-u}{\mu}} du = 1 - e^{\frac{-x}{\mu}}$$

ou par sa densité :

$$f(u;\mu) = \frac{1}{\mu} e^{\frac{-u}{\mu}}$$

pour $x \geq 0$, et 0 ailleurs.

7. **Loi de Weibull :**

La distribution de Weibull est donnée par sa fonction de répartition :

$$W(x;a,b) = ab^{-a} \int_0^x u^{a-1} e^{-u^a b^{-a}} du = 1 - e^{-x^a b^{-a}}$$

ou sa densité :

$$w(u;a,b) = ab^{-a} u^{a-1} e^{-u^a b^{-a}}$$

pour $x \geq 0$, et 0 ailleurs.

8. Loi gamma :

La distribution gamma est définie par sa fonction de répartition pour $x > 0$ par l'integrale :

$$G(x; a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} \int_0^x u^{a-1} e^{-\frac{u}{b}} du$$

où $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-u} u^{t-1} du$ est la fonction Gamma de paramètres a et b. Sa moyenne est ab sa variance ab^2. La densité de la distribution gamma est donnée par :

$$\gamma(a, b) = g(u; a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\frac{u}{b}}$$

9. Loi bêta :

La distribution bêta pour $0 \leq x \leq 1$ est définie par sa fonction de répartition :

$$F(x; v, w) = \frac{1}{B(v, w)} \int_0^x u^{v-1} (1-u)^{w-1} du$$

où $B(v, w) = \int_0^1 u^{v-1} (1-u)^{w-1} du$ est la fonction bêta de paramètres v et w.
On vérifie que :

$$\forall (v, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}e(v, w) = \frac{\Gamma(v)\Gamma(w)}{\Gamma(v+w)}.$$

et que $\mathcal{B}e(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

ou par sa densité :

$$f(u; v, w) = \frac{u^{v-1} (1-u)^{w-1}}{B(v, w)}$$

Les paramètres v et w sont réels positifs et $0 \leq u \leq 1$. sa moyenne est : $\frac{v}{v+w}$.

10. Loi de Cauchy :

La distribution de Cauchy pour tout réel α et β réel positif est donnée par sa fonction de répartition :

$$F(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi\beta} \int_{-\infty}^x \left(1 + \left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^2\right)^{-1} du$$

ou par sa densité :

$$f(u; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi\beta\left(1 + \left(\frac{u-\alpha}{\beta}\right)^2\right)}$$

La densité de Cauchy n'admet aucun moment.

11. **Loi uniforme :**

La distribution uniforme sur [a,b] un intervalle est donnée par sa fonction de répartition : pour $a < b$

$$F(x;a,b) = \begin{cases} 0 & if \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & if \quad a \leq x \leq b \\ 1 & if \quad b \leq x \end{cases}$$

ou par sa densitédans l'intervalle $[a, b]$, ou $a < b$,

$$f(x;a,b) = \begin{cases} 0 & if \quad x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & if \quad a \leq x \leq b \\ 0 & if \quad b \leq x \end{cases}$$

12. **Loi de Pareto :**

Pour $r > 0$, $\alpha > 0$,la loi de Pareto unilatérale est définie par la densité :

$$f_{r,\alpha}(x) = \frac{\alpha r^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} I_{\{x>r\}}(x).$$

Pour $r > s$, $\alpha > 0$,la loi de Pareto bilatérale est définie par la densité :

$$f_{r,\alpha,s}(x,y) = \frac{\alpha(\alpha+1)(s-r)^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} I_{\{x<r<s<y\}}(x,y)$$

Distributions discrètes :

1. **Loi de Bernoulli :**

$$B(p) = \begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}, p \in [0,1].$$

2. **Loi binomiale :**

La fonction de répartition de la distribution binomiale est définie pour x entier naturel par :

$$B(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Avec une loi de Bernoulli qui régit le paramètre p avec $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$.

La densité discrète est donnée par :

$$BDen(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Sa moyenne est np, sa variance est npq.

On la nomme binomiale à cause du coefficient :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3. Loi de Poisson :

La fonction de répartition de la distribution de Poisson pour un entier naturel x est donnée par la sommation :

où $\mu > 0$ est le paramètre définissant aussi la moyenne :

$$Pdist(x;\mu) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

Sa densité est donnée par : :

$$PDen(k;\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$

pour un entier naturel $k$et un nombre réel $\mu > 0$. On note cette distribution $\mathcal{P}(\mu)$.

4. Loi hypergéométrique :

Supposons que, dans une population de M éléments, x possède un certain attribut, on tire un échantillon de n éléments sans remplacement. Le nombre des articles qui possèdent l' attribut dans un tel échantillon suit une loi hypergéométrique.

La fonction de répartition de la distribution (ou distribution) d'une loi hypergéométrique est donnée par :

M éléments dans la population, K succès dans la population et de taille n est défini par l'addition suivante

$$Hdist(x;M,K,n) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

Sa densité est donnée par :

$$HDen(k;M,K,n) = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

k , K , n, et M sont entiers tels que : $0 \le k \le n$, $0 \le K \le M$, et $0 < n \le M$.

Exercice 1 :

On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre événements sur cet espace. On pose :

$S_1 = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)$, $S_2 = \sum_{i=1..4, j=1..4} P(A_i \cap A_j)$,

$S_2 = \sum_{i=1..4, i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ et $S_4 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

1) Exprimer : $P(\cup_{i=1..4} A_i)$ en fonction de S_1, S_2, S_3 et S_4.
2) Pendant un spectacle, on a malencontreusement permuté les 4 chapeaux qui se trouvaient au vestiaire dans des cases numérotées. On désigne par $A_i, i = 1..4$, l'événement « la personne i se voit remettre son chapeau». Calculer les valeurs de S_1, S_2, S_3 et S_4 correspondant aux événements A_i ainsi définis.

3) Montrer que la probabilité pour qu'une personne au moins parmi les quatre ayant un chapeau à l'entrée se voit remettre son propre chapeau, est donnée par la formule : $p = S_1 - S_2 + S_3 - S_4$. Calculer p.

4) En déduire la probabilité pour qu'aucune personne ne se voit remettre son chapeau. (D'après Euler et ESLSCA 88).

Exercice 2 :

Calculer la fonction caractéristique de la densité :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } -1/2 < x < 1/2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Puis démontrer le théorème limite centrale pour des variables aléatoires indépendantes de loi la densité ci-dessus.

Exercice 3 :

Dans un hôpital de la région parisienne, le nombre d'admis dans le service des urgences, au cours de la nuit du samedi est une variable aléatoire X de distribution :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	0.22	0.33	0.25	0.13	0.05	0.02

La probabilité que la personne admise soit un homme est 0.3.

Soit Y la variable aléatoire "nombre d'hommes admis dans le service des urgences au cours de la nuit du samedi"

1. *Quelle est la loi conditionnelle de Y pour $X = x_i$?*
2. *En déduire $P(Y = 4)$ à 10^{-4} près.*
3. *Si, un samedi soir donné, il n'y'a que trois lits disponibles pour les hommes et deux pour les femmes, quelle est la probabilité de refuser un patient au moins ?*
4. *Déterminer la loi de Y en supposant que X suit maintenant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1.5$.*

Solution de l'exercice 1 :

1. *Formule du crible de Poincaré :*

$$P(\cup_{i=1..4} A_i) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

2. *Il existe 4 !=24 façons de permuter les chapeaux. Pour i fixe, il en existe 3 !=6 façons pour lesquelles l'individu i reçoit son chapeau (on permute les 3 autres)*
Pour $i \neq j$ fixés, il en existe 2 !=2 façons pour lesquelles i et j reçoivent leurs chapeaux. Enfin, si 3 personnes retrouvent leurs chapeaux, la 4e retrouve également et celà ne peut se faire que d'une façon.

$$P(A_i) = \frac{1}{4}, P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{12},$$
$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{24}.$$

Ainsi :

$$S_1 = C_4^1 \times \frac{1}{4} = 1, S_2 = C_4^2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$
$$S_3 = C_4^3 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6}, S_4 = \frac{1}{24}.$$

3. $p = P(\cup_{i=1..4} A_i) = \frac{15}{24}$.
4. $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) = P(\overline{\cup_{i=1..4} A_i}) = 1 - \frac{15}{24} = \frac{9}{24}$.

■

Solution de l’exercice 2 :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } -1/2 < x < 1/2 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\theta_x(w) = \frac{\sin(w/2)}{w/2}.$$

Et $\begin{array}{c} E(X) = 0 \\ E(X^2) = 1/12, \end{array}$ on normalise en posant : $y = 2x\sqrt{3}$. ainsi $\theta_y(w) = \frac{\sin(w\sqrt{3})}{w\sqrt{3}}$.

Un développement de Taylor au voisinage de zéro à l’ordre 4 nous donne :

$$\theta_y(w) = 1 - w^2/2 + o(w^4).$$

Ainsi une somme de variables aléatoires telles que Y a une fonction caractéristique qui s’écrit :

$$\theta_{\frac{\sum y_i}{\sqrt{n}}}(w) = \left(1 - w^2/2n + o(w^4/n^2)\right)^n$$

comme on sait que :

$$\lim\, (1 + a/n)^n = e^a$$

on obtient que :

$$\lim_{n\to\infty} \theta_{\frac{\sum y_i}{\sqrt{n}}}(w) = e^{-w^2}.$$

■

Solution de l'exercice 3 :

1. $Y|X = x_i \sim \mathcal{B}(x_i, 0.3).(\mathcal{B}\text{-}binomiale)$

$$\forall k \in [0, x_i], P(Y = k|X = x_i) = C_{x_i}^k (0.3)^k (0.7)^{x_i - k}, C_{x_i}^k = \frac{x_i!}{(x_i - k)!k!}.$$

2. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\forall k \in [0, 5], P(Y = k) = \sum_{i=k..5} P(X = x_i) P(Y = k|X = x_i)$$

$$\begin{aligned} P(Y &= 4) = (0.05)(0.3)^4 + (0.02)\cdot 5\cdot (0.3)^4\cdot 0.7 \\ &= 9.7\cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

3. $Y \geq 4$ et $X - Y \geq 3$ sont incompatibles.

$$\begin{aligned} P(Y &\geq 4) = P(Y = 4) + P(Y = 5) \\ &= 9.72\cdot 10^{-4} + 0.02(0.3)^5 \\ &= 0.00102. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X - Y &\geq 3) = P(X = 3)P(Y = 0|X = 3) \\ +P(X &= 4)P(Y = 0|X = 3) \\ +P(X &= 4)[P(Y = 0|X = 4) + P(Y = 1|X = 4)] \\ +P(X &= 5)[P(Y = 0|X = 5) + P(Y = 1|X = 5) + P(Y = 2|X = 5)] \\ &\simeq 0.0939. \\ P(refus) &\simeq 0.949. \end{aligned}$$

4. $Y|X = k \sim \mathcal{B}(k, 0.3)$.

$$\begin{aligned}
\forall j \quad \in \quad \mathbb{N}, P(Y = j) &= \sum_{k=0..\infty} P(X = j)P(Y = k|X = k) \\
&= \sum_{k=j..\infty} C_k^j (0.3)^j (0.7)^{k-j} e^{-1.5} \frac{(1.5)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

$or\ C_k^j / k! = \frac{1}{j!} \frac{1}{(k-j)!}\ d'où :$

$$\begin{aligned}
P(Y \quad &= \quad j) = e^{-1.5} \frac{(1.5 \cdot 0.3)^j}{j!} \underbrace{\sum_{k=j..\infty} \frac{(1.5 \cdot 0.3)\ k-^j}{(k-j)!}}_{e^{1.5 \cdot 0.7}} \\
&= \quad e^{0.45} \frac{(0.45)^j}{j!} \\
&\Rightarrow \quad Y \sim \mathcal{P}(0.45).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Statistiques et pratique de R.

Mots clés : Estimation, test du khi deux, régression, simulation de lois, test de Neyman et Pearson, test du khi-deux, ajustement linéaire, corrélation.

Rappel :

1. **La statistique $\overline{X}$:**

La statistique $\overline{X}$ ou moyenne empirique d'un échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est :

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1...n} X_i}{n}.$$

Si m, σ sont la moyenne et l'écart-type de la variable parente alors :

$$E(\overline{X}) = m \ et \ var(\overline{X}) = V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

2. **La statistique S^2 :**

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1...n} (X_i - \overline{X})^2$$

D'aprés la loi des grands nombres $S^2 \xrightarrow{\text{presque sûrement}} \sigma^2$

Son biais vaut :

$$E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Pour estimer σ^2 il est donc préférable d'utiliser $S^2 \frac{n}{n-1}$ qui est un estimateur sans biais.

3. **La statistique T_{n-1} :**

L'estimateur du rapport $\frac{\sigma}{m}$ est souvent vu de la manière suivante.

$$T_{n-1} = \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1}$$

est une variable de student à $(n-1)$ – degrés de liberté.

4. **Estimation de la moyenne d'une variable de Laplace-Gauss :**

σ connu :

$\overline{X}$ *est le meilleur estimateur de* m *et suit la la loi* $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

L'intervalle de probabilité de $\overline{X}$ *:*

$$P(m - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} \leq m + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha.$$

Conduit à l'intervalle de confiance suivant :

$$\overline{X} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{X} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

σ inconnu :

On utilise le fait que $T = \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1}$, *suit une loi de Student* $(n-1)$*−degrés de liberté.*

L'intervalle de probabilité est :

$$-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1} \leq t_{\frac{\alpha}{2}}$$

L'intervalle de confiance est :

$$\overline{X} - t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \leq m \leq \overline{X} + t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n-1}}.$$

5. **Estimation de la variance d'une variable de Laplace-Gauss :**

m connu :

$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1\ldots n}(X_i - m)^2$ *est le meilleur estimateur de* σ^2 *et* $\frac{nT}{\sigma^2}$ *suit la loi du Khi-Deux,* χ^2_n.

L'intervalle de confiance est : $\frac{nt}{k_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{nt}{k1}$.

m inconnu :

$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1\ldots n}(X_i - m)^2$ *comme* $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ *suit* χ^2_{n-1}.

L'intervalle de confiance est : $\frac{nS^2}{k_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS^2}{k1}$.

6. Test de Neyman et Pearson :

Soit X une variable aléatoire de densité $f(x,\theta), \theta$ est un paramètre réel inconnu, $L(x,\theta)$

étant la vraissemblance de l'échantillon.

Il s'agit de tester : $\left\{ \begin{array}{ll} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta = \theta_1 \end{array} \right.$ *,on suppose que α le risque de 1ère espèce est connu.*

$$\int L(x,\theta)dx = \alpha = P(W/H_0).$$

revient à maximiser$\longrightarrow \int L(x,\theta_1)dx = 1 - \beta = P(W/H_1).$

$$1 - \beta = \int \frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} L(x,\theta_0)dx.$$

La région critique optimale est définie par l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$\frac{L(x,\theta_1)}{L(x,\theta_0)} > k_\alpha.$$

7. Test du khi-deux :

Soit une variable aléatoire X discrète divisée en k classes de probabilités :

$$(p_1, p_2, ..., p_k) .$$

Soit n échantillon de cette variable fournissant les effectifs aléatoires $(N_1, N_2, ..., N_n)$ dans chacune de ces classes.

On a évidemment $E(N_i) = np_i$.

Soit donc la statistique :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Si $n \to \infty, D^2$ est asymptotiquement distribué comme une variable de χ^2_{k-1} et ceci quelque soit la loi de X.

D'où le test du χ^2 : on rejettera H_0 si $D^2 = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$ est constaté trop grand,

c'est à dire supérieur à une valeur qui n'a qu'une probabilité α d'être dépassée par une variable χ^2.

8. Régression :

Soient $(x_i)(y_n) i = 1...n$, faire un ajustement linéaire revient à trouver une droit $y^* = ax + b$ où $\| y - y^* \|^2$ est minimale

La solution est donnée par :

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} = \frac{cov(x,y)}{varx}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \text{n} \end{vmatrix}} = \overline{y} - a\overline{x} = \overline{y} - \frac{cov(x,y)}{varx}\overline{x}.$$

Les sommes sont prises de 0 à n, l'élément $\overline{s}$ est la moyenne.

L'ajustement est bon si la corrélation entre y et y^* est proche de 1, donc si $\cos(y, y^*) = 1$ c'est à dire si $\cos(\widehat{y, y^*})$ est proche de 0.

La corrélation est le nombre

$$corr(y, y^*) = \frac{cov(x,y)}{varxvary}.$$

Exercice 1 :

Dans une population de grand effectif on prélève d'une manière non exhaustive un échantillon de 100 personnes dont on note le poids en kilogramme. Nous obtenons les résultats suivants :

poids en kilogramme	*62*	*64*	*68*	*70*	*74*
nombre de personnes	*5*	*18*	*42*	*27*	*8*

1. *Calculer la moyenne et l'écart type de cet échatillon.*
2. *Estimer le poids moyen d'une personne au seuil de confiance de 95%.*
3. *Au seuil de confiance de 99% est-il possible d'accepter un poids moyen de 67 kg.*

Exercice 2 :

Un fabricant affirme qu'au moins 95% de l'équipement qu'il fournit à un dépositaire est conforme au cahier des charges. L'examen d'un échantillon de 200 pièces montre que 18 pièces sont défectueuses. Que penser de l'affirmation du fabricant au seuil de confiance 1% ,5% ?

Exercice 3 : Vérifier les calculs puis le tracé sous R.

Le tableau suivant figure 25.1 réunit dans y la production de fer brut mondiale de 1865 à 1910.t est le nombre d'années, x la production en millions de tonnes qui a ét omis et remplacé par y son logarithme multiplié par 1000. On soustrait a=1890 de t, b=1400 de y pour obtenir de petits nombres commodes : la droite d'ajustement figure 25.2 a pour équation :

$$y = 1379 + 17.94(t - 1887.5)$$

les moyennes et coefficient de corrélation sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= 1887.5 \\
\bar{y} &= 1379 \\
coeffreg &= \frac{\sum(t-\bar{t})(y-\bar{y})}{\sum(t-\bar{t})^2} \\
&= 17,94
\end{aligned}$$

Exercice 4 : Travaux pratiques sur ordinateur ; simulation des lois usuelles sous R ; en utilisant par exemple sur la densité normale les fonctions :

```
dnorm(x, mean = 0, sd = 1, log = FALSE)
pnorm(q, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qnorm(p, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
```

```
  t
 [1] 1865 1866 1867 1868 1869 1870 1871 1872 1873 1874 1875 1876 1877 1878 1879
[16] 1880 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1887 1888 1889 1890 1891 1892 1893 1894
[31] 1895 1896 1897 1898 1899 1900 1901 1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909
[46] 1910
  y
 [1]  959  985 1003 1030 1077 1088 1109 1172 1180 1144 1150 1145 1152 1162 1159
[16] 1269 1297 1334 1338 1311 1298 1318 1358 1381 1413 1445 1418 1430 1402 1416
[31] 1468 1495 1525 1562 1611 1616 1614 1651 1670 1665 1739 1776 1787 1688 1782
[46] 1821
  t-a
 [1] -25 -24 -23 -22 -21 -20 -19 -18 -17 -16 -15 -14 -13 -12 -11 -10  -9  -8  -7
[20]  -6  -5  -4  -3  -2  -1   0   1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12
[39]  13  14  15  16  17  18  19  20
  y-b
 [1] -441 -415 -397 -370 -323 -312 -291 -228 -220 -256 -250 -255 -248 -238 -241
[16] -131 -103  -66  -62  -89 -102  -82  -42  -19   13   45   18   30    2   16
[31]   68   95  125  162  211  216  214  251  270  265  339  376  387  288  382
[46]  421
  (t-a)^2
 [1] 625 576 529 484 441 400 361 324 289 256 225 196 169 144 121 100  81  64  49
[20]  36  25  16   9   4   1   0   1   4   9  16  25  36  49  64  81 100 121 144
[39] 169 196 225 256 289 324 361 400
  (t-a)*(y-b)
 [1] 11025  9960  9131  8140  6783  6240  5529  4104  3740  4096  3750  3570
[13]  3224  2856  2651  1310   927   528   434   534   510   328   126    38
[25]   -13     0    18    60     6    64   340   570   875  1296  1899  2160
[37]  2354  3012  3510  3710  5085  6016  6579  5184  7258  8420
> 
```

fig 25.1 – **Données**

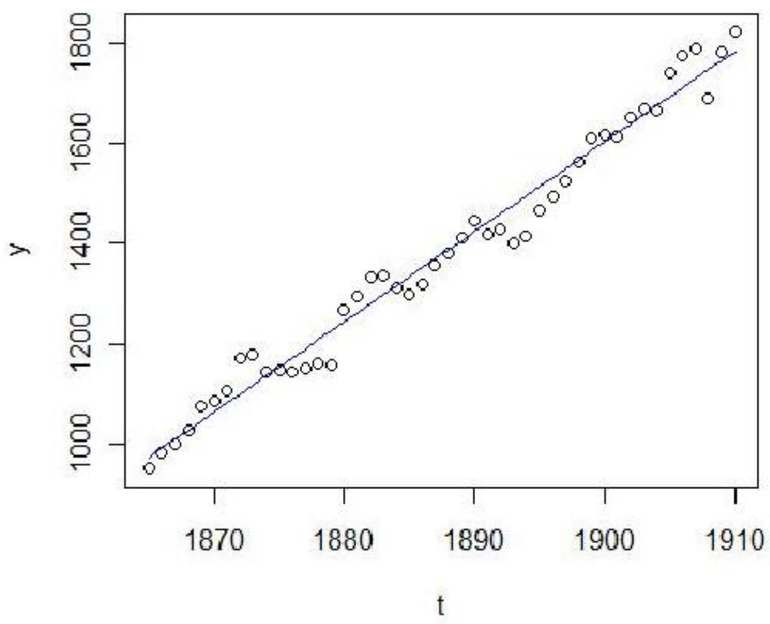


fig 25.2 – **Regression linéaire**

Solution de l'exercice 1 :

Nous avons en résumé les données dans le tableau suivant :

1.

poids en kg x_i	nbre de personnes n_i	$n_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
62	5	310	-6	36	180
64	18	1152	-4	16	288
68	42	2856	0	00	000
70	27	1890	+2	4	108
74	8	592	+6	36	288
TOTAL	100	6800			864
		$\overline{x} = \frac{6800}{100}$			$\sigma'^2 = \frac{864}{100}$

$\overline{x} = 68$, $\sigma'^2 = 8.64$, $\sigma' = 2.94$.

2. *La double inégalité :*

$$\overline{x} - 1.96\frac{\sigma'}{\sqrt{n-1}} \leq m \leq \overline{x} + 1.96\frac{\sigma'}{\sqrt{n-1}}$$

nous donne un encadrement de la moyenne au seuil de confiance de 95%. Soit :

$$68 - 1.96\frac{2.94}{\sqrt{99}} \leq m \leq 68 + 1.96\frac{2.94}{\sqrt{99}}$$

c'est à dire :

$$67.42 \leq m \leq 68.58.$$

Ainsi le poids moyen d'une personne prise au hasard dans la population a 95 chances sur 100 de se trouver compris entre 67.42kg et 68.58kg.

3. *Au seuil 1% on prend la double inégalité :*

$$\overline{x} - 2.58\frac{\sigma'}{\sqrt{n-1}} \leq m \leq \overline{x} + 2.58\frac{\sigma'}{\sqrt{n-1}}$$

ce qui donne :

$$67.237 \leq m \leq 68.762.$$

Ainsi le poids moyen d'une personne prise au hasard dans la population a 99 chances sur 100 de se trouver compris entre 67.237kg et 68.762kg. Nous devons donc rejeter l'hypothèse d'un poids moyen de 67kg au seuil de confiance de 99%.

■

Solution de l'exercice 2 :

La probabilité p que la production du fabricant soit conforme au cahier des charges est 0.95. Formulons les hypothèses alternatives suivantes :

H_0 : H_0 = *"p=0.95 et l'affirmation du fabricant est correcte".*

H_1 : H_1 = *"p < 0.95 et l'affirmation du fabricant est fausse".*

Si H_0 est vraie, la variable aléatoire X="nombre de pièces correctes" suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n = 200, p = 0.95)$ *que nous approchons - car :*

$$np = 190 > 5 \text{ et } nq = n(1-p) = 10 > 5$$

-par une loi normale de paramètre $m = np = 190$ *et* $\sigma = \sqrt{npq} = 3.082$: $\mathcal{N}(190, 3,082)$ *que nous réduisons, en posant :*

$$T = \frac{X - 190}{3.082}.$$

Nous définissons au risque α un intervalle de confiance à droite :

$$P(T < t_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(T \geq t_\alpha) = 1 - \alpha$$

D'après la table statistique en annexe de la loi normale on a :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.01, t_\alpha = -2.33 \\ \alpha &= 0.05, t_\alpha = -1.645. \end{aligned}$$

Nous aurons donc la règle de test suivante :

a) au seuil de $\alpha = 1\%$	b) au seuil de $\alpha = 5\%$
Nous accepterons H_0 si $T \geq -2.33$.	*Nous accepterons H_0 si $T \geq -1.645$.*
Nous rejeterons H_0 dans le cas contraire.	*Nous rejeterons H_0 dans le cas contraire.*

donc :

$$\begin{aligned} T &= \frac{182-190}{3.082} \\ &= -2.5957. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$T = -2.5957 \begin{cases} < -2.33 \\ < -1.645 \end{cases}$$

dans les 2 cas ($\alpha = 1\%$ et $\alpha = 95\%$) l'affirmation du fabricant est fausse.

Remarque : Calculons X au risque de $\alpha = 1\%$ et $\alpha = 95\%$ pour accepter H_0.

a) Risque 1%	*b) Risque* $\alpha = 5\%$
$\frac{X-190}{3.082} \geq -2.33$	$\frac{X-190}{3.082} \geq -1.645.$
$X \geq 182.82$	$X \geq 184.9301.$
Nous aurions dû trouver dans un échantillon de 200, 183 pièces (ou plus) correctes donc 17, pour que l'affirmation du fabricant soit correcte.	*Nous aurions dû trouver dans un échantillon de 200, 185 pièces (ou plus) correctes donc 15, pour que l'affirmation du fabricant soit correcte.*

■

Annexe 1 : Fonctions trigonométriques.

Les notations suivantes sont équivalentes :

$$\boldsymbol{tan\,x \equiv tg\,x}.$$

$$\boldsymbol{cotan\,x \equiv cotg\,x}.$$

$$\boldsymbol{sh\,x \equiv sinh\ x = \tfrac{e^x - e^{-x}}{2}}.$$

$$\boldsymbol{ch\,x \equiv cosh\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}.$$

$$\boldsymbol{th\,x \equiv tanh\ x = \tfrac{shx}{chx}}.$$

$$\boldsymbol{coth\,x \equiv cotanh\ x = \tfrac{chx}{shx}}.$$

$$\boldsymbol{\arg \mathrm{sh}\, x \equiv \sinh^{-1} x = ln(x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

Argument sinus hyperbolique est la fonction réciproque de la fonction sh.

1. **Fonctions trigonométriques directes :** La variable z est réelle ou complexe.

$$\sin(\pi \pm z) = \mp \sin(z).$$

$$sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \cos(z).$$

$$\cos(\pi \pm z) = -\cos(z).$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp.$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right) = \mp \mathrm{cotg}(z).$$

2. **Equations circulaires :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a) = \cos(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b, [2\pi] \\ a \equiv -b, [2\pi] \end{cases}.$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv b, [2\pi] \\ a \equiv \pi - b, [2\pi] \end{cases}.$$

$$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)\right)^2, tg(a) = \mathrm{tg}(b) \Leftrightarrow a \equiv b[\pi].$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z + \tau) = \cos(z) \Leftrightarrow \cos(\tau) = 1 \Leftrightarrow \tau = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin(z + \tau) = \sin(z) \Leftrightarrow \tau = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

3. **Formules d'addition :**

$$\cos(z \pm z') = \cos(z)\cos(z') \mp \sin(z)\sin(z').$$

$$\sin(z \pm z') = \cos(z)\sin(z') \pm \sin(z)\cos(z').$$

$$\mathrm{tg}(z \pm z') = \tfrac{tg(z) + tg(z')}{1 \pm tg(z)tg(z')}.$$

$$\mathrm{ch}(z \pm z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{ch}(z') \pm \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{sh}(z').$$

$$\mathrm{sh}(z \pm z') = \mathrm{ch}(z)\,\mathrm{sh}(z') \pm \mathrm{sh}(z)\,\mathrm{ch}(z').$$

$$\text{th}(z \pm z') = \frac{th(z) + th(z')}{1 \pm th(z)th(z')}.$$

Annexe 2 : Table des primitives usuelles.

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Ensemble de définition
$e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$.
chx	$sh\, x$	$\mathbb{R}$.
$cosx$	$\sin x$	$\mathbb{R}$.
$sinx$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$.
thx	$\ln ch\, x$	$\mathbb{R}$.
$cothx$	$ln\|sh\, x\|$	$\mathbb{R}^*$.
tgx	$ln\|\cos x\|$	$\mathbb{R}$.
$cotgx$	$ln\|\sin x\|$	$\mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$.
$\frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$	$th\, x$	$\mathbb{R}$.
$\frac{1}{sh^2x} = coth^2x - 1$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$.
$\frac{1}{cos^2x} = tg^2x + 1$	$tg\, x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi; n \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\frac{1}{sin^2x} = cotg^2x + 1$	$cotg\, x$	$\mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$.
$x^n, n \in \mathbb{Z}^-$-$\{0, -1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$.
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$.
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$	$\mathbb{R}$.
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x$	$\mathbb{R}$.
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}ln\left\|\frac{1+x}{1-x}\right\|$	$\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$argsh\, x$	$\mathbb{R}$.
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$.
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} argsh\, x, x > 1 \\ -argch(-x), x < -1 \end{cases}$	$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Annexe 3 : Equivalents usuels.

$$sinx\sim_{x\to 0}x \qquad \ln(1+x)\sim_{x\to 0}x$$

$$arcsin\,x\sim_{x\to 0}x \qquad \mathrm{tg}\,x\sim_{x\to 0}x$$

$$e^x\sim_{x\to 0}1 \qquad \mathrm{arctg}\,x\sim_{x\to 0}x$$

$$shx\sim_{x\to 0}x \qquad \mathrm{th}x\sim_{x\to 0}x$$

$$argshx\sim_{x\to 0}x \qquad \mathrm{argth}\,x\sim_{x\to 0}x$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim_{x\to 0}\alpha x \qquad 1-\cos x\sim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}$$

$$\mathrm{ch}(x-1)\sim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}$$

Tout polynôme non nul est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.

Tout polynôme non nul est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Annexe 4 : Courbes remarquables.

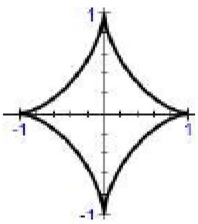
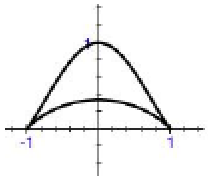
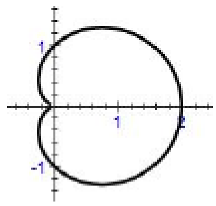
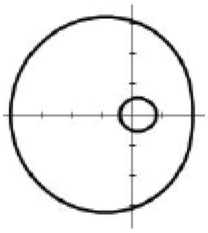
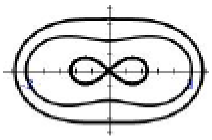
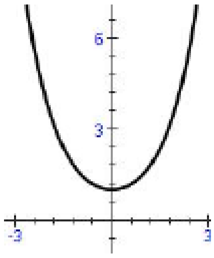
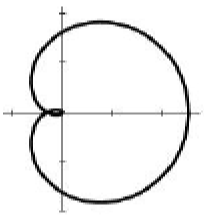
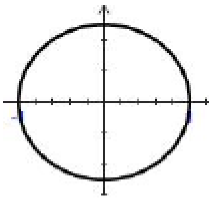
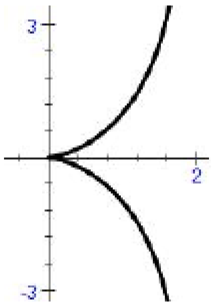
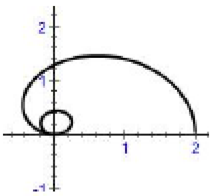
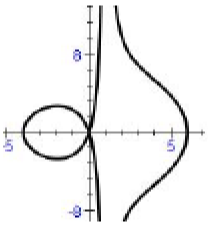
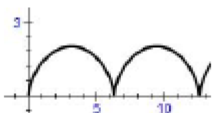
Astroïde  $a\cos^3 t, a\sin^3 t$	Bicorne  $a\sin t, a\frac{\cos^2 t}{2-\cos t}$	Cardoïde  $2a\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, 4a\frac{t}{(1+t^2)^2}$
Ovale cartésien  $((1-m^2)(x^2+y^2)$ $+2m^2cx+a^2-m^2c^2)^2=$ $4a^2(x^2+y^2)$	Ovale de Cassini  $(x^2+y^2)^2-$ $2a^2(x^2-y^2)+$ $a^4-c^4=0$	Caténaire  $y=a\mathrm{ch}(x/a)$
Sextique de Cayley  $4a\frac{1-3t^2}{(1+t^2)^3}, 4at\frac{3-t^2}{(1+t^2)^3}$	Cercle  $x^2+y^2=a^2$	Cissoïde de Dioclès  $y^2=x^{\frac{3}{2}}(a-x)$
Cochléoïde  $a\frac{\sin t}{t}, a\frac{1-\cos t}{t}$ $y=x\,\mathrm{tg}\,\frac{ay}{x^2+y^2}$	Conchoïde  $(x-b)^2(x^2+y^2)-$ $a^2x^2=0$	Cycloïde  $R(t-\sin t)$, $R(1-\cos t)$

Figure 1

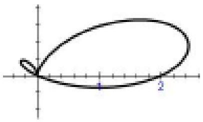
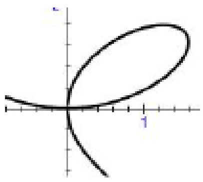
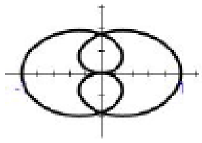
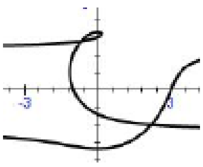
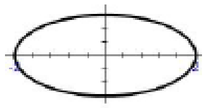
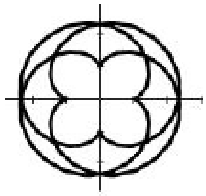
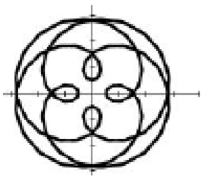
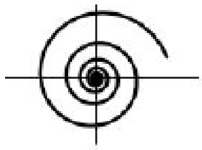
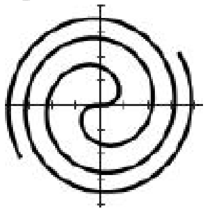
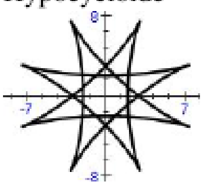
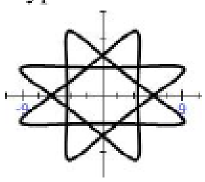
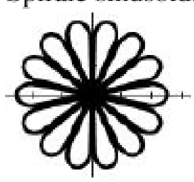
Bifolium  $(x^2+y^2)^2 =$ $(ax+by)x^2.$	Folium de Descartes  $x^3+y^3=3axy$ . .	Folium de Dürer  $\rho = a\sin\frac{\theta}{2}$ . .
Conchoïde de Dürer  $(xy+b^2-y^2)^2 =$ $(x+y-a)^2(b^2-y^2)$	Ellypse  $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Epicycloïde  $b((\frac{a}{b}+1)e^{it}-$ $e^{i(\frac{a}{b}+1)}t)$
Epitrochoïde  $b((\frac{a}{b}+1)e^{it}-ke^{i(\frac{a}{b}+1)}t)$	Spirale logarithmique  $\rho = \exp k\theta$	Spirale de Fermat  $\rho^2 = a^2\theta$
Hypocycloïde  $(x^2+y^2)^2 =$ $(ax+by)x^2.$	Hypotrochoïde  $x^3+y^3=3axy$	Spirale sinusoïdale  $\rho = a\sin\frac{\theta}{2}$

Figure 2

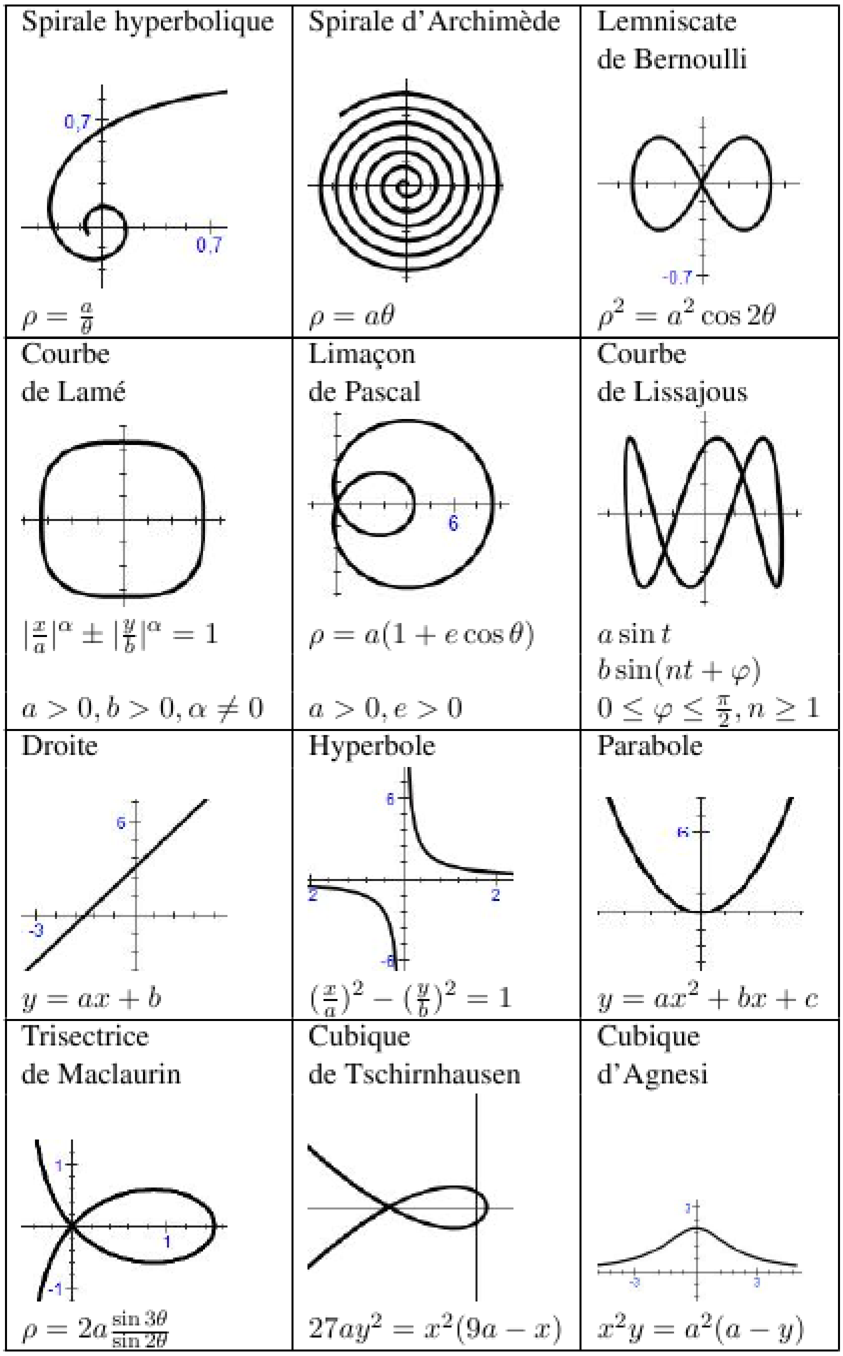

Spirale hyperbolique
$\rho = \frac{a}{\theta}$
Spirale d'Archimède
$\rho = a\theta$
Lemniscate de Bernoulli
$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$
Courbe de Lamé
$|\frac{x}{a}|^\alpha \pm |\frac{y}{b}|^\alpha = 1$
$a > 0, b > 0, \alpha \neq 0$
Limaçon de Pascal
$\rho = a(1 + e\cos\theta)$
$a > 0, e > 0$
Courbe de Lissajous
$a \sin t$
$b \sin(nt + \varphi)$
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, n \geq 1$
Droite
$y = ax + b$
Hyperbole
$(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$
Parabole
$y = ax^2 + bx + c$
Trisectrice de Maclaurin
$\rho = 2a\frac{\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$
Cubique de Tschirnhausen
$27ay^2 = x^2(9a - x)$
Cubique d'Agnesi
$x^2y = a^2(a - y)$

Figure 3

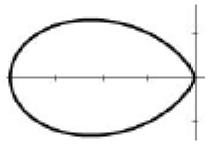
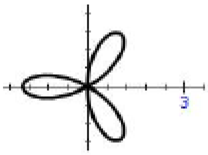
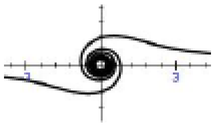
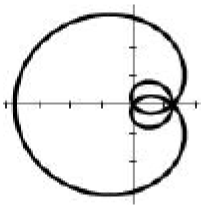
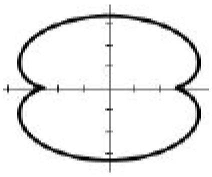
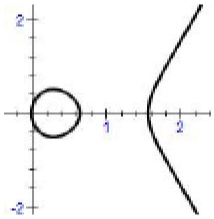
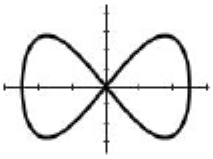
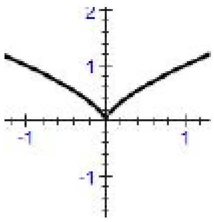
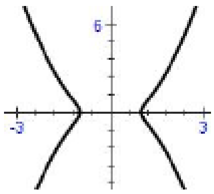
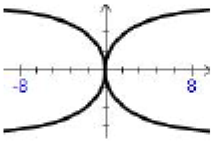
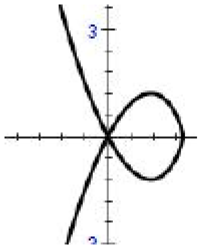
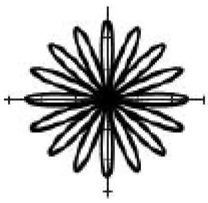
Folium  $\rho = -b\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta$	Trifolium  $\rho = a\cos\theta(4\sin^2\theta - 1)$	Lituus  $\rho^2 = \frac{a^2}{\theta}$
Néphroïde de Freeth  $\rho = a(1 + 2\sin\frac{\theta}{2})$	Néphroïde  $\frac{a}{2}(3e^{3i\theta} - e^{3i\theta})$	Parabole de Newton  $ay^2 = x(x^2 - 2bx + c),\ a > 0$
Lemniscate, huit de Gerono  $x^4 = a^2(x^2 - y^2)$	Parabole de Neile  $y^3 = ax^2$	kampile d'Eudoxus  $\rho = \frac{b^2}{a\cos^2\theta}$
Courbe kappa  $\rho = a\cot\theta$	Perle de Sluze  $y^n = k(a-x)^p x^m$	Rosace  $\rho = a\cos n\theta$

Figure 4

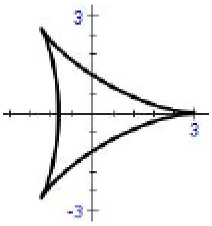
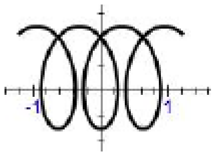
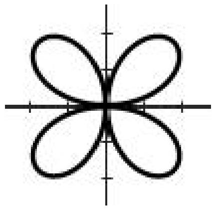
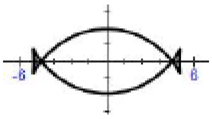
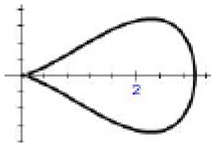
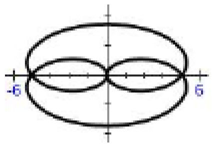
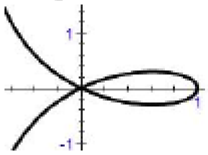
Tricuspide Deltoïde  $a(2\cos(t)-\cos(2t))$ $a(2\sin(t)-\sin(2t))$	Trochoïde  $Rt-d\sin t$ $R-d\cos t$	Quadrifolium  $\rho=a\sin 2\theta$
Courbe de Talbot  $\frac{((a^2-b^2)\sin^2 t+a^2)\cos t}{a}$ $\frac{((a^2-b^2)\cos^2 t+b^2)\sin t}{b}$	Quartique Piriforme  $b^2y^2=x^3(a-x)$	Courbe de Watt  $\rho^2=b^2-[a\sin(\theta)$ $\pm\sqrt{(c^2-a^2\cos^2(\theta))}]^2$
	Strophoïde  $\rho=a\cos(2\theta)/\cos(\theta)$	

Figure 5

Annexe 5 : Table des transformées de Laplace.

Dans cette table :

$$\mathcal{L}(f(t)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \mathcal{L}(f(t)(s) dt$$

$$\mathcal{L}(g(t)(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt dt$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} \mathcal{L}(g(t)(s) dt$$

$$u = \left(\frac{s}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

a,x sont des réels positifs, α, β, λ *sont des réels sans restriction, k un entier , n un entier non nul ,* ν *une fraction dans [0,1]/*$\nu \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$.

On note :

$$\begin{aligned} 1.3.5....(2n-1) &= (2n-1)!! \\ n! &= 1.2....n \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n! \\ \Gamma(1) &= 0! = 1 \end{aligned}$$

Formule des compléments :

$$\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \nu\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}$$

ψ_1 *est la fonction telle que :*

$$\psi_1(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$$

δ *l'impulsion de Dirac.*
H la fonction d'Heaviside.
τ *l'abscisse de convergence de* $\mathcal{L}(f(t)(s)$.
τ' *l'abscisse de convergence de* $\mathcal{L}(g(t)(s)$.
γ *la constante D'Euler.*
J_n *la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.*
I_n *la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n.*
K_n *la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre n.*

$n°$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(s)$	τ
1	$H(t\text{-}a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	0
2	$\delta\,(t-a)$	e^{-as}	$-\infty$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\mathcal{R}e\alpha$
4	$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
5	$\mathrm{ch}\alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$	$\lvert\mathcal{R}e\alpha\rvert$
6	$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
7	$\mathrm{sh}\alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$	$\lvert\mathcal{R}e\alpha\rvert$
8	$\mathrm{t}^{\alpha}, \mathcal{R}e\alpha > -1$	$\frac{(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	0
9	$(1-e^{-t})^n$	$\frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}$	0
10	$\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$	$\frac{1}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$\max\{\mathcal{R}e\alpha, \mathcal{R}e\beta\}$
11	$1 + 2(\alpha + \beta)\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta},\ \alpha \neq \beta$	$\frac{1}{s}\frac{(s+\alpha)(s+\beta)}{(s-\alpha)(s-\beta)}$	$\max\{0, \mathcal{R}e\alpha, \mathcal{R}e\beta\}$
12	$1+4\alpha t e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s}\left(\frac{s+\alpha}{s-\alpha}\right)$	$\max\{0, \mathcal{R}e\alpha\}$
13	$\frac{\cos\alpha t-\cos\beta t}{\beta^2-\alpha^2}$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)(s^2+\beta^2)}$	$\max\{\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert, \lvert\mathcal{I}m\beta\rvert\}$
14	$\frac{t\sin\alpha t}{2\alpha}, (\alpha \neq 0)$	$\frac{s}{(s^2+\alpha^2)^2}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
15	$t\cos\alpha t$	$\frac{s^2-\alpha^2}{s^2+\alpha^2}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
16	$\cos^2\alpha t$	$\frac{s^2+2\alpha^2}{s(s^2+4\alpha^2)}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
17	$\sin^2\alpha t$	$\frac{2\alpha^2}{s(s^2+4\alpha^2)}$	$2\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
18	$\sum_{r=0\dots n}\frac{(\alpha t)^r}{r!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}\frac{s^{n+1}-\alpha^{n+1}}{s-\alpha}$	0
19	$1 - e^{-\alpha t}\times \sum_{r=0\dots n}\frac{(\alpha t)^r}{r!}$	$\frac{1}{s}\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}\right)^{n+1}$	$\max\{0, \mathcal{R}e\alpha\}$

Figure 6

20	$\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}$	$\ln\frac{s-\alpha}{s-\beta}$	$\max\{\mathcal{R}e\alpha, \mathcal{R}e\beta\}$
21	$\frac{\sin\alpha t}{t}$	$\arctan\frac{\alpha}{s}$	$\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
22	$\frac{\mathrm{sh}\alpha t}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\frac{s+\alpha}{s-\alpha}$	$\lvert\mathcal{R}e\alpha\rvert$
23	$\frac{\mathrm{sh}^2\alpha t}{t}$	$\frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{4\alpha^2}{s^2}\right)$	$2\lvert\mathcal{I}m\alpha\rvert$
24	$\mathrm{e}^{-\alpha^2t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\mathrm{e}^{\frac{s^2}{4\alpha^2}}(1 - erf\frac{s}{2\alpha})$	$-\infty$
25	$\mathrm{erf}at$	$\frac{1}{s}\mathrm{e}^{\frac{s^2}{4a^2}}\left(1-erf\frac{s}{2a}\right)$	0
26	$\frac{e^{\alpha\sqrt{t+a}}}{\sqrt{t+a}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\left(\frac{\alpha^2}{4s^2}+as\right)}\times\left[1-erf\left(\sqrt{as}-\frac{\alpha}{2\sqrt{s}}\right)\right]$	0
27	$\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{t+a}}$	$\frac{1}{s}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{a}} + \frac{\alpha}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\left(\frac{\alpha^2}{4s}+as\right)}\times\left[1-erf\left(\sqrt{as}-\frac{\alpha}{2\sqrt{s}}\right)\right]$	0
28	$\frac{\left.\begin{matrix}\mathrm{ch}\\ \cos\end{matrix}\right\}\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\pm\frac{\alpha^2}{4s}}$	0
29	$\left.\begin{matrix}\mathrm{sh}\\ \sin\end{matrix}\right\}\alpha\sqrt{t}$	$\frac{\alpha}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\pm\frac{\alpha^2}{4s}}$	0

Figure 7

30	$\frac{e^{\frac{-a^2}{4t}}}{t\sqrt{t}}$	$2\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}}$	0
31	$\frac{e^{\frac{-a^2}{4t}}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}}$	$-\infty$
32	$e^{a\lambda+\lambda^2 t}\times [1- erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)]$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\lambda+\sqrt{s})}$	$\begin{cases} 0,\text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda^2, \lambda < 0 \end{cases}$
33	$e^{a\lambda}\times [1-erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+\lambda\sqrt{t}\right)] + e^{-a\lambda}\times [1-erf(\frac{a}{2\sqrt{t}}-\lambda\sqrt{t})]$	$2\frac{e^{-a\sqrt{s+\lambda^2}}}{s}$	0
34	$-a\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{\frac{-a^2}{4t}}+\left(t+\frac{a^2}{2}\right)\left(1-erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s^2}$	0
35	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{\frac{-a^2}{4t}} - a\left(1-erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$	0
36	$1-e^{\lambda^2 t}\left(1-erf\left(\lambda\sqrt{t}\right)\right)$	$\frac{\lambda}{s(\lambda+\sqrt{s})}$	$\begin{cases} 0,\text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda^2, \lambda < 0 \end{cases}$
37	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^{\lambda^2 t}\left(1-erf\left(\lambda\sqrt{t}\right)\right)$	$\frac{1}{\lambda+\sqrt{s}}$	$\begin{cases} 0,\text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda^2, \lambda < 0 \end{cases}$
38	$\delta(t)-\frac{\lambda}{\sqrt{\pi t}}+\lambda^2 e^{\lambda^2 t}\left(1-erf\left(\lambda\sqrt{t}\right)\right)$	$\frac{\sqrt{s}}{\lambda+\sqrt{s}}$	$\begin{cases} 0,\text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda^2, \lambda < 0 \end{cases}$
39	erf$(\lambda\sqrt{t})$	$\frac{\lambda}{s\sqrt{s+\lambda^2}}$	

Figure 8

40	$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)$	$\ln\Gamma(s)\, s\ln s + \frac{1}{2}\ln s + s - \ln\sqrt{2\pi}$	0
41	$\ln t$	-$\frac{\gamma+\ln s}{s}$	0
42	$\frac{1}{1+e^{-t}}$	$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}\psi_1\left(\frac{s+1}{2}\right)\\ -\psi_1\left(\frac{s}{2}\right)\end{array}\right]$	0
43	$\frac{1-e^{-at}}{1-e^{-t}}$	$\psi_1(s+a)-\psi_1(s)$	0
44	$t^{\alpha}\ln t, (\mathcal{R}e\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\left[\begin{array}{c}\psi_1(\alpha+1)\\ -\ln s\end{array}\right]$	0
45	$\frac{1}{t+a}, (a>0)$	-$e^{-as}Ei(-as)$	0
46	$\arctan t$	$\frac{1}{s}(\sin sCis - \cos sSis)$	0
47	*Ei(-t)*	-$\frac{1}{s}\ln(1+s)$	0
48	*Ci(t)*	-$\frac{1}{2s}\ln\left(1+s^2\right)$	0
49	*Si(t)*	-$\frac{1}{s}$ arctg s	0
50	$\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$	$\left[\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{s^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$	0
51	$\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$	$\left[\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{s^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$	0
52	*C(t)*	$\frac{1}{2s}\left[\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{s^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$	0
53	*S(t)*	$\frac{1}{2s}\left[\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{s^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$	0
54	$L_n(t)$	$\frac{1}{s}\left(\frac{s-1}{s}\right)^n$	0
55	*f(t), périodique de période T*	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-sT}f(t)dt$	0
56	$\sum_{n=0\ldots\infty}\delta(t-na)$	$\frac{1}{1-e^{-as}}$	0
57	$\sum_{n=0\ldots\infty}(-1)^n\delta(t-na)$	$\frac{1}{1+e^{-as}}$	0
58	$\sum_{n=0\ldots\infty}(-1)^n H(t-na)$	$\frac{1}{s(1+e^{-as})}$	0

Figure 9

59	$2\sum_{n=0\ldots\infty} \delta(t-a-2na)$	$\frac{1}{\text{sh}\, as}$	0
60	$2\sum_{n=0\ldots\infty} (-1)^n \times \delta(t-a-2na)$	$\frac{1}{\text{ch}\, as}$	0
61	$\delta(x) + 2\sum_{n=0\ldots\infty} (-1)^n \delta(t-2na)$	$\text{th}\, as$	0
62	$2\sum_{n=0\ldots\infty} g(t-a-2na) \times H(t-a-2na)$	$\frac{\mathcal{L}(g(t)(s)}{\text{sh}\, as}$	$max\{\tau', 0\}$
63	$2\sum_{n=0\ldots\infty} (-1)^n g(t-a-2na) \times H(t-a-2na)$	$\frac{\mathcal{L}(g(t)(s)}{\text{ch}\, as}$	$max\{\tau', 0\}$
64	$g(t)+2\sum_{n=0\ldots\infty} (-1)^n g(t-2na) \times H(t-2na)$	$\mathcal{L}(g(t)(s)\text{th}\, as$	$max\{\tau', 0\}$
65	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{w^2}{4t}} g(w)dw$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\mathcal{L}(g(t)(\sqrt{s})$	τ'^2
66	$\int_0^\infty \frac{t^w g(w)}{\Gamma(w+1)} dw$	$\frac{1}{s}\mathcal{L}(g(t)(\ln s)$	$e^{\tau'}$
67	$\frac{1}{t}H(t-1)$	$-Ei(-s)$	0
68	$\frac{1}{t^3}H(t-1)$	$e^{-s}+sEi(-s)$	0
69	$\frac{1}{\sqrt{t}}H(t-a)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}(1-erf(\sqrt{as}))$	0
70	$\frac{1}{\sqrt{t}}H(a-t)$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}erf(\sqrt{as})$	0
71	$tH(1-t)+H(t-1)$	$\frac{1-e^{-s}}{s^2}$	0
72	$\ln tH(t-1)$	$-\frac{1}{s}Ei(-s)$	0
73	$J_n(at)$	$\frac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{a^2\sqrt{s^2+a^2}}$	0

Figure 10

Annexe 6 : Tables statistiques.

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Figure 11 Loi normale centrée réduite

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	0,031	0,188	0,500	0,813	0,969	1,000							
6	0,016	0,109	0,344	0,656	0,891	0,984	1,000						
7	0,008	0,063	0,227	0,500	0,773	0,938	0,992	1,000					
8	0,004	0,035	0,145	0,363	0,637	0,855	0,965	0,996	1,000				
9	0,002	0,020	0,090	0,254	0,500	0,746	0,910	0,980	0,998	1,000			
10	0,001	0,011	0,055	0,172	0,377	0,623	0,828	0,945	0,989	0,999			
11		0,006	0,033	0,113	0,274	0,500	0,726	0,887	0,967	0,994	1,000		
12		0,003	0,019	0,073	0,194	0,387	0,613	0,806	0,927	0,981	0,997	1,000	
13		0,002	0,011	0,046	0,133	0,291	0,500	0,709	0,867	0,954	0,989	0,998	1,000
14		0,001	0,006	0,029	0,090	0,212	0,395	0,605	0,788	0,910	0,971	0,994	0,999
15			0,004	0,018	0,059	0,151	0,304	0,500	0,696	0,849	0,941	0,982	0,996
16			0,002	0,011	0,038	0,105	0,227	0,402	0,598	0,773	0,895	0,962	0,989
17			0,001	0,006	0,025	0,072	0,166	0,315	0,500	0,685	0,834	0,928	0,975
18			0,001	0,004	0,015	0,048	0,119	0,240	0,407	0,593	0,760	0,881	0,952
19				0,002	0,010	0,032	0,084	0,180	0,324	0,500	0,676	0,820	0,916
20				0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588	0,748	0,868
21				0,001	0,004	0,013	0,039	0,095	0,192	0,332	0,500	0,668	0,808
22					0,002	0,008	0,026	0,067	0,143	0,262	0,416	0,584	0,738
23					0,001	0,005	0,017	0,047	0,105	0,202	0,339	0,500	0,661
24					0,001	0,003	0,011	0,032	0,076	0,154	0,271	0,419	0,581
25						0,002	0,007	0,022	0,054	0,115	0,212	0,345	0,500
26						0,001	0,005	0,014	0,038	0,084	0,163	0,279	0,423
27						0,001	0,003	0,010	0,026	0,061	0,124	0,221	0,351
28							0,002	0,006	0,018	0,044	0,092	0,172	0,286
29							0,001	0,004	0,012	0,031	0,068	0,132	0,229
30							0,001	0,003	0,008	0,021	0,049	0,100	0,181

Figure 12 Loi binomiale p=1/2.

			$\Pr[X \le x]$			
r	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635
2	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086
6	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217
13	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963
28	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892
31	15.655	17.539	19.281	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	46.194	49.480	53.486
33	17.074	19.047	20.867	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	48.602	51.966	56.061
35	18.509	20.569	22.465	49.802	53.203	57.342
36	19.233	21.336	23.269	50.998	54.437	58.619
37	19.960	22.106	24.075	52.192	55.668	59.893
38	20.691	22.878	24.884	53.384	56.896	61.162
39	21.426	23.654	25.695	54.572	58.120	62.428
40	22.164	24.433	26.509	55.758	59.342	63.691
41	22.906	25.215	27.326	56.942	60.561	64.950
42	23.650	25.999	28.144	58.124	61.777	66.206
43	24.398	26.785	28.965	59.304	62.990	67.459
44	25.148	27.575	29.787	60.481	64.201	68.710
45	25.901	28.366	30.612	61.656	65.410	69.957
46	26.657	29.160	31.439	62.830	66.617	71.201
47	27.416	29.956	32.268	64.001	67.821	72.443
48	28.177	30.755	33.098	65.171	69.023	73.683
49	28.941	31.555	33.930	66.339	70.222	74.919
50	29.707	32.357	34.764	67.505	71.420	76.154

Figure 13 **Le khi²**

	$\Pr[X \leq x]$					
r	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
51	30.475	33.162	35.600	68.669	72.616	77.386
52	31.246	33.968	36.437	69.832	73.810	78.616
53	32.018	34.776	37.276	70.993	75.002	79.843
54	32.793	35.586	38.116	72.153	76.192	81.069
55	33.570	36.398	38.958	73.311	77.380	82.292
56	34.350	37.212	39.801	74.468	78.567	83.513
57	35.131	38.027	40.646	75.624	79.752	84.733
58	35.913	38.844	41.492	76.778	80.936	85.950
59	36.698	39.662	42.339	77.931	82.117	87.166
60	37.485	40.482	43.188	79.082	83.298	88.379
61	38.273	41.303	44.038	80.232	84.476	89.591
62	39.063	42.126	44.889	81.381	85.654	90.802
63	39.855	42.950	45.741	82.529	86.830	92.010
64	40.649	43.776	46.595	83.675	88.004	93.217
65	41.444	44.603	47.450	84.821	89.177	94.422
66	42.240	45.431	48.305	85.965	90.349	95.626
67	43.038	46.261	49.162	87.108	91.519	96.828
68	43.838	47.092	50.020	88.250	92.689	98.028
69	44.639	47.924	50.879	89.391	93.856	99.228
70	45.442	48.758	51.739	90.531	95.023	100.425
71	46.246	49.592	52.600	91.670	96.189	101.621
72	47.051	50.428	53.462	92.808	97.353	102.816
73	47.858	51.265	54.325	93.945	98.516	104.010
74	48.666	52.103	55.189	95.081	99.678	105.202
75	49.475	52.942	56.054	96.217	100.839	106.393
76	50.286	53.782	56.920	97.351	101.999	107.583
77	51.097	54.623	57.786	98.484	103.158	108.771
78	51.910	55.466	58.654	99.617	104.316	109.958
79	52.725	56.309	59.522	100.749	105.473	111.144
80	53.540	57.153	60.391	101.879	106.629	112.329
81	54.357	57.998	61.261	103.010	107.783	113.512
82	55.174	58.845	62.132	104.139	108.937	114.695
83	55.993	59.692	63.004	105.267	110.090	115.876
84	56.813	60.540	63.876	106.395	111.242	117.057
85	57.634	61.389	64.749	107.522	112.393	118.236
86	58.456	62.239	65.623	108.648	113.544	119.414
87	59.279	63.089	66.498	109.773	114.693	120.591
88	60.103	63.941	67.373	110.898	115.841	121.767
89	60.928	64.793	68.249	112.022	116.989	122.942
90	61.754	65.647	69.126	113.145	118.136	124.116
91	62.581	66.501	70.003	114.268	119.282	125.289
92	63.409	67.356	70.882	115.390	120.427	126.462
93	64.238	68.211	71.760	116.511	121.571	127.633
94	65.068	69.068	72.640	117.632	122.715	128.803
95	65.898	69.925	73.520	118.752	123.858	129.973
96	66.730	70.783	74.401	119.871	125.000	131.141
97	67.562	71.642	75.282	120.990	126.141	132.309
98	68.396	72.501	76.164	122.108	127.282	133.476
99	69.230	73.361	77.046	123.225	128.422	134.642
100	70.065	74.222	77.929	124.342	129.561	135.807

Figure 14 Le khi²

$\nu \downarrow \quad \alpha \rightarrow$	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	63,657	31,821	12,706	6,314	3,078	1,963	1,376	1	0,727	0,51	0,325	0,158
2	9,925	6,965	4,303	2,92	1,886	1,386	1,061	0,816	0,617	0,445	0,289	0,142
3	5,841	4,541	3,182	2,353	1,638	1,25	0,978	0,765	0,584	0,424	0,277	0,137
4	4,604	3,747	2,776	2,132	1,533	1,19	0,941	0,741	0,569	0,414	0,271	0,134
5	4,032	3,365	2,571	2,015	1,476	1,156	0,92	0,727	0,559	0,408	0,267	0,132
6	3,707	3,143	2,447	1,943	1,44	1,134	0,906	0,718	0,553	0,404	0,265	0,131
7	3,499	2,998	2,365	1,895	1,415	1,119	0,896	0,711	0,549	0,402	0,263	0,13
8	3,355	2,896	2,306	1,86	1,397	1,108	0,889	0,706	0,546	0,399	0,262	0,13
9	3,25	2,821	2,262	1,833	1,383	1,1	0,883	0,703	0,543	0,398	0,261	0,129
10	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372	1,093	0,879	0,7	0,542	0,397	0,26	0,129
11	3,106	2,718	2,201	1,796	1,363	1,088	0,876	0,697	0,54	0,396	0,26	0,129
12	3,055	2,681	2,179	1,782	1,356	1,083	0,873	0,695	0,539	0,395	0,259	0,128
13	3,012	2,65	2,16	1,771	1,35	1,079	0,87	0,694	0,538	0,394	0,259	0,128
14	2,977	2,624	2,145	1,761	1,345	1,076	0,868	0,692	0,537	0,393	0,258	0,128
15	2,947	2,602	2,131	1,753	1,341	1,074	0,866	0,691	0,536	0,393	0,258	0,128
16	2,921	2,583	2,12	1,746	1,337	1,071	0,865	0,69	0,535	0,392	0,258	0,128
17	2,898	2,567	2,11	1,74	1,333	1,069	0,863	0,689	0,534	0,392	0,257	0,128
18	2,878	2,552	2,101	1,734	1,33	1,067	0,862	0,688	0,534	0,392	0,257	0,127
19	2,861	2,539	2,093	1,729	1,328	1,066	0,861	0,688	0,533	0,391	0,257	0,127
20	2,845	2,528	2,086	1,725	1,325	1,064	0,86	0,687	0,533	0,391	0,257	0,127
21	2,831	2,518	2,08	1,721	1,323	1,063	0,859	0,686	0,532	0,391	0,257	0,127
22	2,819	2,508	2,074	1,717	1,321	1,061	0,858	0,686	0,532	0,39	0,256	0,127
23	2,807	2,5	2,069	1,714	1,319	1,06	0,858	0,685	0,532	0,39	0,256	0,127
24	2,797	2,492	2,064	1,711	1,318	1,059	0,857	0,685	0,531	0,39	0,256	0,127
25	2,787	2,485	2,06	1,708	1,316	1,058	0,856	0,684	0,531	0,39	0,256	0,127
26	2,779	2,479	2,056	1,706	1,315	1,058	0,856	0,684	0,531	0,39	0,256	0,127
27	2,771	2,473	2,052	1,703	1,314	1,057	0,855	0,684	0,531	0,389	0,256	0,127
28	2,763	2,467	2,048	1,701	1,313	1,056	0,855	0,683	0,53	0,389	0,256	0,127
29	2,756	2,462	2,045	1,699	1,311	1,055	0,854	0,683	0,53	0,389	0,256	0,127
30	2,75	2,457	2,042	1,697	1,31	1,055	0,854	0,683	0,53	0,389	0,256	0,127
40	2,704	2,423	2,021	1,684	1,303	1,05	0,851	0,681	0,529	0,388	0,255	0,126
80	2,66	2,39	2	1,671	1,296	1,046	0,848	0,679	0,527	0,387	0,254	0,126
120	2,617	2,358	1,98	1,658	1,289	1,041	0,845	0,677	0,526	0,386	0,254	0,126
1000	2,576	2,326	1,96	1,645	1,282	1,036	0,842	0,674	0,524	0,385	0,253	0,126

Figure 15 Loi de Student de degré de liberté ν et de coefficient α.

$\nu 2 \downarrow \quad \nu 1 \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234
2	18,51	19	19,16	19,25	19,3	19,33
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92
14	4,6	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,9	2,79
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74
17	4,45	3,59	3,2	2,96	2,81	2,7
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66
19	4,38	3,52	3,13	2,9	2,74	2,63
20	4,35	3,49	3,1	2,87	2,71	2,6
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55
23	4,28	3,42	3,03	2,8	2,64	2,53
24	4,26	3,4	3,01	2,78	2,62	2,51
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,6	2,49
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46
28	4,2	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34
60	4	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17
1000	3,84	3	2,6	2,37	2,21	2,1

Figure 16 La loi de Fisher de paramètres v1 et v2

$\nu 2 \downarrow \quad \nu 1 \rightarrow$	7	8	9	10	12	15	20
1	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248
2	19,35	19,37	19,38	19,4	19,41	19,43	19,45
3	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,7	8,66
4	6,09	6,04	6	5,96	5,91	5,86	5,8
5	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56
6	4,21	4,15	4,1	4,06	4	3,94	3,87
7	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44
8	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15
9	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94
10	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77
11	3,01	2,95	2,9	2,85	2,79	2,72	2,65
12	2,91	2,85	2,8	2,75	2,69	2,62	2,54
13	2,83	2,77	2,71	2,67	2,6	2,53	2,46
14	2,76	2,7	2,65	2,6	2,53	2,46	2,39
15	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,4	2,33
16	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28
17	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23
18	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19
19	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16
20	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,2	2,12
21	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,1
22	2,46	2,4	2,34	2,3	2,23	2,15	2,07
23	2,44	2,37	2,32	2,27	2,2	2,13	2,05
24	2,42	2,36	2,3	2,25	2,18	2,11	2,03
25	2,4	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01
26	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99
27	2,37	2,31	2,25	2,2	2,13	2,06	1,97
28	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96
29	2,35	2,28	2,22	2,18	2,1	2,03	1,94
30	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93
40	2,25	2,18	2,12	2,08	2	1,92	1,84
80	2,17	2,1	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75
120	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66
1000	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57

Figure 17 La loi de Fisher de paramètres v1 et v2

Table des matières

Table des figures

Bibliographie

A.Fortin. (1995). *Analyse numérique.* Canada: Polythechnique de Montréal.

D.Cellier. (1994). *Statistique.* France: Press université de Rouen.

Dennai, M. (2011). *Mathématiques pour l'ingénieur, Analyse fonctionnelle, Probabilité & statistique.* France: Hermann.

Dennaï, M. (2009). *Mathématiques pour l'ingénieur, Analyse I.* France: Hermann.

Dennaï, M. (2010). *Mathématiques pour l'ingénieur, AnalyseII & Algèbre.* France: Hermann.

H.Cartan. (1985). *Analyse complexe.* France: Hermann.

J.Bass. *Calcul différentiel.* France: Masson.

J.Lelong-Ferrand-J.M.Arnaudiès. (1995). *Algèbre.* France: Dunod.

J.Lelong-Ferrand-J.M.Arnaudiès. (1995). *Equations différentielles, intégrales multiples.* Dunod.

J.Lelong-Ferrand-J.M.Arnaudiès. (1995). *Géométrie.* France: Dunod.

J.M.Monier. (1994). *Cours de mathématiques. Math-sup Analyse 2.* France: Dunod université.

Laville, G. (2004). Courbes et surfaces. France: Ellypses.

M.Metivier. (1968). *Probabilité.* France: Dunod.

Mathematics, M. H. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.

MATLAB®. MathWorks.

Piskounov, N. (1974). *Calcul différentiel et intégral.* URSS: Mir Moscou.

Spiegel, R. M. (1980). *Matrices.* USA: Serie Schaum.