Probabilités

Notes de cours

Mohamed Nassiri

Avertissement

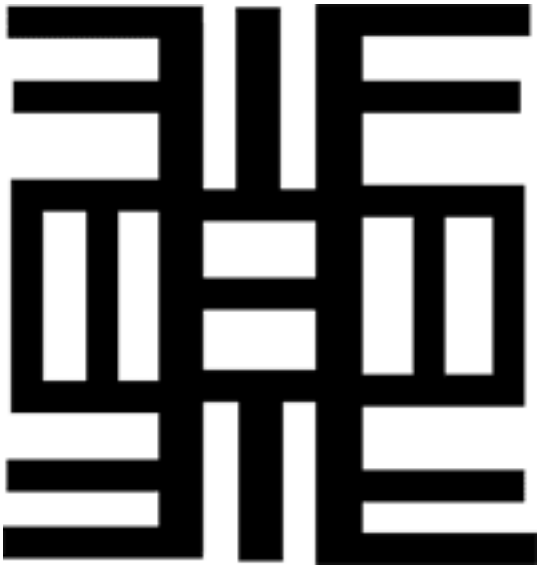
Il s'agit de notes de cours pour l'option mathématiques appliquées aux sciences sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

Copyright © 2022 Mohamed Nassiri

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Ce document est sous licence *Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*.
Voir le Résumé Explicatif : creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr
Voir le Code Juridique : creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.fr

Dernière version, janvier 2025.



« *Nea onnim no sua a, ohu* [1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Rappels sur les probabilités

1 Premières définitions et propriétés 11
1.1 Modélisation d'une expérience aléatoire 11
1.2 Opérations sur les événements 12
1.3 Événement contraire 14
1.4 Expérience à 2 ou 3 événements successifs 14

2 Conditionnement et indépendance 17
2.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles 17
2.2 Théorème de Bayes 17
2.3 Événements indépendants 19
2.4 Théorème des probabilités totales 20

II Variables aléatoires réelles

3 Variables aléatoires réelles discrètes 23
3.1 Variables aléatoires réelles discrètes et loi de probabilité 23
3.2 Espérance mathématique et variance 24

4 Variables aléatoires réelles continues 25
4.1 Variable aléatoire réelles continue et loi de probabilité 25
4.2 Fonction de répartition 26
4.3 Densité de probabilité 26
4.4 Espérance mathématique et variance 27

5 Transformation de variables aléatoires 29
5.1 Transformation affine et somme de variables aléatoires 29
5.2 Espérance d'une somme de variables aléatoires 30
5.3 Variance d'une somme de variables aléatoires 31
5.4 Applications 32
5.4.1 Applications à la loi binomiale 32
5.4.2 Échantillons de n variables aléatoire identiques et indépendantes 33
5.5 Inégalités de concentration 36
5.5.1 Inégalité de Markov 36
5.5.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev 37
5.5.3 Inégalité de concentration 38

6 Couples de variables aléatoires 41
6.1 Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes 41
6.2 Lois marginales d'un couple de variables (X,Y) 41
6.3 Indépendance de deux variables discrètes 42
6.4 Covariance d'un couple de variables aléatoires 43

III Loi de probabilités usuelles

7 Loi de probabilités discrètes 47
7.1 Loi uniforme discrète 47
7.1.1 Définitions 47
7.1.2 Espérance et variance 47
7.1.3 Espérance et variance 47
7.2 Loi de Bernoulli 48
7.2.1 Définitions 48
7.2.2 Espérance et variance 48
7.3 Loi binomiale 50
7.3.1 Définitions 50
7.3.2 Espérance et variance 52
7.3.3 Symétrie, récurrence et stabilité de la loi binomiale 53
7.4 Loi de Poisson 53
7.4.1 Approximation d'une loi binomiale 53
7.4.2 Définitions 54
7.4.3 Espérance et variance 55
7.4.4 Stabilité de la loi de Poisson 55
7.5 Loi binomiale négative 56
7.5.1 Définitions 56
7.5.2 Espérance et variance 56
7.5.3 Loi géométrique 56

8 Loi de probabilités continues 57
8.1 Loi uniforme continue 57
8.1.1 Définition 57

8.2 Loi normale **57**
8.2.1 Définitions 57
8.2.2 Espérance et variance 58
8.2.3 Stabilité de la loi normale 58
8.3 Loi normale centrée réduite **59**
8.3.1 Définitions 59
8.3.2 Espérance et variance 60
8.3.3 Relation avec la loi normale 60
8.3.4 Extrait de la table de la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$ 62

IV **Des très beaux résultats**

9 Loi des grands nombres **67**
9.1 Cas particulier de la loi binomiale **67**
9.2 Cas général **68**

10 Théorème central limite **69**
10.1 Théorème central limite **69**
10.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale **69**
10.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson **72**

11 Intervalle de confiance et de fluctuation **75**
11.1 Intervalle de fluctuation **75**
11.2 Intervalle de confiance **76**

Rappels sur les probabilités

1 Premières définitions et propriétés 11
1.1 Modélisation d'une expérience aléatoire 11
1.2 Opérations sur les événements 12
1.3 Événement contraire 14
1.4 Expérience à 2 ou 3 événements successifs . . 14

2 Conditionnement et indépendance . . 17
2.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles . . 17
2.2 Théorème de Bayes 17
2.3 Événements indépendants 19
2.4 Théorème des probabilités totales 20

1. Premières définitions et propriétés

1.1 Modélisation d'une expérience aléatoire

Definition 1.1 • Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
• Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
• L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note Ω

R
• *Hasard* vient de l'arabe *az-zahr* qui signifie ń jet de dé ż.
• *Aléa* vient du latin *alea* qui signifie ń coup de dé ż.
• *Chance* vient du latin *cadere* qui signifie ń choir, tomber ż.

■ **Exemple 1.1** On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.
Cette expérience a 6 issues possibles et l'univers associé est

$$\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$$

■

Definition 1.2 Définir une **loi de probabilité** pour une expérience dont l'univers est $\Omega = \{x_1;x_2;...;x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues un nombre p_i positif ou nul, appelé **probabilité**, tel que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

R
Lorsque chaque issue a la même probabilité de se produire qu'une autre, on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

■ **Exemple 1.2** On lance un dé tétraédrique dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
Si le dé n'est pas truqué, on est dans une situation d'équiprobabilité. On obtient donc la loi de probabilité suivante

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

On peut également regrouper les résultats sous forme d'un tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_i	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	p_1	p_2	p_3	p_4

■

Definition 1.3
- Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω (ensemble des issues).
- Sa **probabilité** $p(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A.
- Si $p(A) = 0$, l'événement A est dit **impossible**.
- Si $p(A) = 1$, l'événement A est dit **certain**.

Proposition 1.1 **(admise)** Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

■ **Exemple 1.3** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on note la carte obtenue. Calculer les probabilités des événements :
1. A : « La carte est un valet. »
2. B : « La carte est un pique. »

Solutions :
Les 32 issues étant équiprobables (tirage au hasard), on a :
1. $p(A) = \dfrac{\text{nombre de valets}}{32} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$
2. $p(B) = \dfrac{\text{nombre de piques}}{32} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$ ■

1.2 Opérations sur les événements

Definition 1.4 Si A et B sont deux événements d'un univers Ω,
- $A \cap B$, **intersection** de A et B, est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B.
- $A \cup B$, **réunion** de A et B, est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **ou** B (au moins l'un des deux).
- Les événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

R Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cap B) = 0$.

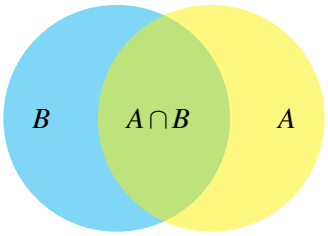
■ **Exemple 1.4** On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 »	$A = \{5;6\}$
B « Obtenir un résultat pair »	$B = \{2;4;6\}$
A ET B « Obtenir un résultat pair ET strictement supérieur à 4 »	$A \cap B = \{6\}$
A OU B « Obtenir un résultat pair OU strictement supérieur à 4 »	$A \cup B = \{2;4;5;6\}$

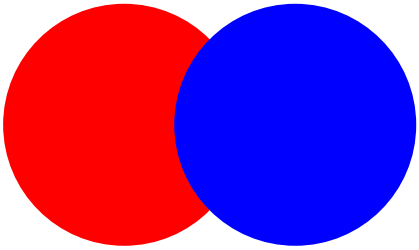
■

Proposition 1.2 **(admise)** Soit A et B deux événements. On a

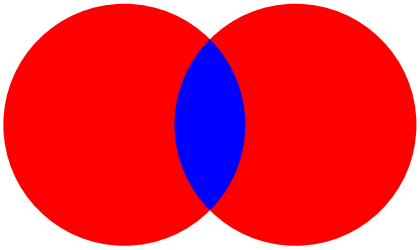
$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$



R Il existe encore deux notations utiles en probabilité :
• $A \backslash B$ qui signifie ń A privé de B ż ou ń le complémentaire de B dans A ż et ;
• $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
On comprend un peu mieux avec une illustration (l'ensemble illustré est en rouge !) :



$A \backslash B$



$A \Delta B$

■ **Exemple 1.5** On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous :

	Filles	**Garçons**	**Total**
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent qui a participé à cette étude. On considère les événements :
- A « L'adolescent choisi préfère les films d'action », et
- F « L'adolescent choisi est une fille ».
Calculer $p(A \cup F)$.

Solution :
On souhaite donc utiliser la formule

$$p(A \cup F) + p(A \cap F) = p(A) + p(F)$$

Pour cela, il faut donc déterminer $p(A)$, $p(F)$ et $p(A \cap F)$. Allons-y !

• Détermination de $p(A)$:

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'adolescents préférant les films d'action}}{180} = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

• Détermination de $p(F)$:

$$p(F) = \frac{\text{nombre de filles}}{180} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$$

• Détermination de $p(A \cap F)$:

$$p(A \cap F) = \frac{\text{nombre de filles préférant les films d'action}}{180} = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

• Calcul de $p(A \cup F)$:

$$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = \frac{80}{180} + \frac{120}{180} - \frac{45}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$$

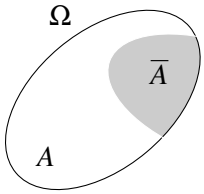
■

1.3 Événement contraire

Definition 1.5

L'**événement contraire** (ou **événement complémentaire**) de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.
Autrement dit, on a

$$A \cap \overline{A} = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup \overline{A} = \Omega$$



R A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

■ **Exemple 1.6** On lance un dé cubique :
A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $\quad A = \{5;6\}$
$\overline{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\quad \overline{A} = \{1;2;3;4\}$ ■

Proposition 1.3 Pour tout événement A, on a

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Démonstration. Par définition, on a

$$A \cap \overline{A} = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup \overline{A} = \Omega$$

Donc, d'après la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$, en remplaçant B par $\overline{A}$, on a

$$\begin{aligned} & p(\underbrace{A \cup \overline{A}}_{\Omega}) + p(\underbrace{A \cap \overline{A}}_{\varnothing}) = p(A) + p(\overline{A}) \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{p(\Omega)}_{=1} + \underbrace{p(\varnothing)}_{=0} = p(A) + p(\overline{A}) \\ \Leftrightarrow \quad & p(A) + p(\overline{A}) = 1 \end{aligned}$$

■

■ **Exemple 1.7** On lance un dé cubique :
A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $\quad A = \{5;6\}$
$\overline{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\quad \overline{A} = \{1;2;3;4\}$
On a donc $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. D'après la formule, on a donc

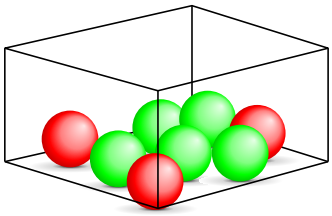
$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

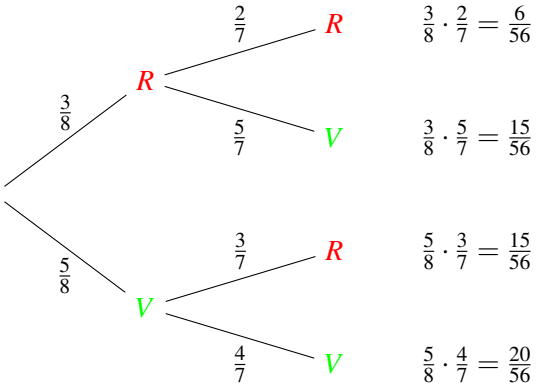
■

1.4 Expérience à 2 ou 3 événements successifs

■ **Exemple 1.8**

Dans une urne, il y a 8 boules dont 3 sont rouges et 5 sont vertes. On tire successivement sans remise deux boules et on note leur couleur.
L'expérience peut se schématiser par l'arbre suivant :





On aurait pu schématiser l'expérience par le tableau suivant (mais cela est moins intuitif...) :

2e tirage / 1er tirage	R	V
R	$p(\{(R;R)\}) = \frac{6}{56}$	$p(\{(R;V)\}) = \frac{15}{56}$
V	$p(\{(V;R)\}) = \frac{15}{56}$	$p(\{(V;V)\}) = \frac{20}{56}$

■

2. Conditionnement et indépendance

2.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles

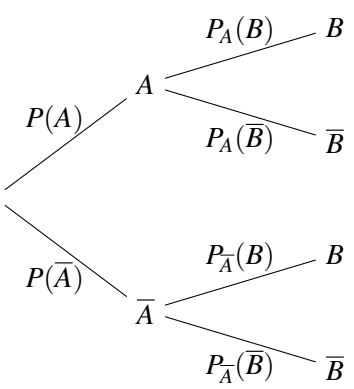
Definition 2.1 Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

R
- $P_A(B)$ se lit « *P de B sachant A* ».
- Il existe parfois une autre notation pour les probabilités conditionnelles : $P(B|A)$ au lieu de $P_A(B)$.

Proposition 2.1 **(admise)**
- La somme des probabilités des branches issues d'un noeud est égale à 1.

La probabilité de l'événement à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.



$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$$

2.2 Théorème de Bayes

Proposition 2.2 **Formule de Bayes**

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Alors on a :

$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$$

ou encore

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$$

Heuristique. Cette proposition découle essentiellement de la symétrie de la formule

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

En effet, on peut *intervertir* les rôles de A et B en remarquant que $A \cap B = B \cap A$. ■

Démonstration. Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) \quad \text{et} \quad P(B \cap A) = P_B(A) \times P(B)$$

Comme $A \cap B = B \cap A$, on obtient donc

$$P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P_A(B) = \frac{P_B(A) \times P(B)}{P(A)}$$

■

■ **Exemple 2.1** Dans une classe de lycée, soit F l'événement « *un élève est une fille* » et R « *un élève pratique le rotokas*[1] ».

	Fille (F)	**Garçon ($\overline{F}$)**	**Total**
Rotokas (R)	10	7	17
Pas rotokas $\overline{R}$	4	9	13
Total	14	16	30

On interroge au hasard une fille de la classe. Quelle est la probabilité qu'elle pratique le rotokas ?

On cherche donc à calculer $P_F(R)$ et on va utiliser la formule

$$P_F(R) = \frac{P(F \cap R)}{P(F)}$$

Or, on a :

$$P(F) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} P(F \cap R) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Par conséquent,

$$P_F(R) = \frac{P(F \cap R)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{3} \times \frac{15}{7} = \frac{5}{7}$$

[1] Parlé par 4000 personnes à peine sur l'île de Bougainville en Papouasie-Nouvelle-Guinée, le rotokas a la réputation d'être la langue possédant le moins de phonèmes au monde puisqu'on n'en recense que 11 pour un alphabet de 12 lettres. ■

Exercice 2.1 En reprenant l'énoncé de l'exemple précédent, on interroge au hasard une personne de la classe pratiquant le rotokas. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
Calculer cette probabilité de deux manières différentes. ■

2.3 Événements indépendants

Definition 2.2 On dit que deux événements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

R Dire que A et B sont indépendants signifie donc qu'avoir des informations concernant la réalisation de A ne renseigne pas sur la réalisation de B.

R « *Incompatibles* » est différent de « *indépendants* ». En effet, si A et B sont deux évènements incompatibles de probabilités non nulles, on a $P(A \cap B) = 0$ avec $P(A) \times P(B) \neq 0$.

■ **Exemple 2.2** On lance un dé non pipé à 6 faces et on note :
• A l'événement « *Obtenir un nombre pair* », et
• B l'événément « *Obtenir un multiple de 3* ».
Par conséquent, on a donc $A \cap B$ est l'événement « *Obtenir 6* ». On a donc

$$P(A) = \frac{1}{2} \ ; \ P(B) = \frac{1}{3} \ \text{ et } \ P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

On remarque que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants. ■

Proposition 2.3
• A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$
• A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$

Heuristique. On ne réalisera la démonstration que pour le premier point ; le second point se démontre de la même façon.
On utilisera principalement la formule suivante sous ces deux formes :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

■

Démonstration. Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$.

• $\underline{\Rightarrow :}$ On suppose que A et B sont indépendants et donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Ainsi :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)} \times P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

• $\underline{\Leftarrow :}$ On suppose que $P_A(B) = P(B)$. Ainsi :

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P(B) \times P(A)$$

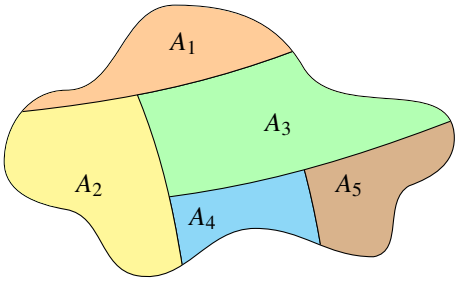
Donc les événements A et B sont indépendants. ■

2.4 Théorème des probabilités totales

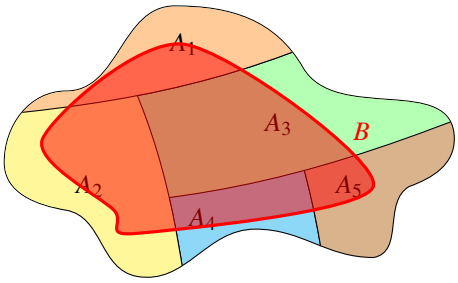
Proposition 2.4 (admise) Théorème des probabilités totales
On considère un univers Ω et $\{A_1;A_2;A_3;\ldots;A_n\}$ une partition de l'univers en n événements $A_1;A_2;A_3;\ldots;A_n$ de probabilité non nulle.
Pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

R En fait, cette formule, malgré son apparence complexe, est assez simple à comprendre. Considérons l'univers Ω suivant partitionné avec $\{A_1;\ldots;A_5\}$.



Et voici, par exemple, comment l'événement B pourrait être illustré



Ce que dit la formule de la proposition précédent, c'est que la partie en rouge (B) peut se décomposer en 5 morceaux comme suit :

$$B = B \cap A_1 + B \cap A_2 + B \cap A_3 + B \cap A_4 + B \cap A_5$$

« Ajouter » les probabilités et vous avez votre formule !

II Variables aléatoires réelles

3 Variables aléatoires réelles discrètes . 23

3.1 Variables aléatoires réelles discrètes et loi de probabilité 23

3.2 Espérance mathématique et variance 24

4 Variables aléatoires réelles continues 25

4.1 Variable aléatoire réelles continue et loi de probabilité 25

4.2 Fonction de répartition 26

4.3 Densité de probabilité 26

4.4 Espérance mathématique et variance 27

5 Transformation de variables aléatoires 29

5.1 Transformation affine et somme de variables aléatoires 29

5.2 Espérance d'une somme de variables aléatoires 30

5.3 Variance d'une somme de variables aléatoires 31

5.4 Applications 32

5.5 Inégalités de concentration 36

6 Couples de variables aléatoires 41

6.1 Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes 41

6.2 Lois marginales d'un couple de variables (X,Y) 41

6.3 Indépendance de deux variables discrètes . . 42

6.4 Covariance d'un couple de variables aléatoires 43

3. Variables aléatoires réelles discrètes

3.1 Variables aléatoires réelles discrètes et loi de probabilité

Dans tout ce chapitre, on considérera une expérience aléatoire dont on notera Ω l'univers des possibles. on supposera cet univers fini. On notera P une probabilité sur Ω.

Definition 3.1
Une variable aléatoire réelle X définie sur l'univers Ω est une fonction définie sur à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a donc :

$$X : \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto X(\omega) \end{cases}$$

R
- une variable aléatoire **n'est pas une variable**, mais une fonction !
- une variable aléatoire **n'est pas aléatoire**, mais complètement déterminée !

■ **Exemple 3.1** On lance une pièce de monnaie. Si on obtient pile, on gagne 5 €et si on obtient face, on gagne 2 €.
On peut alors définir une variable aléatoire X correspondant au gain obtenu en euro.
X est définie sur l'univers $\Omega = \{\text{pile}\,;\,\text{face}\}$.
On a alors $X(\text{pile})= 5$ et $X(\text{face})= 2$.
X peut donc prendre deux valeurs : 5 et 2. ■

Definition 3.2 Soit une variable alétoire X pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La **loi de probabilité de** X est l'ensemble des probabilités $P(X = x_i)$ de chaque valeur x_i.
On consigne en général ces résultats dans un tableau :

Valeurs x_k prises par X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Probabilité $p_k = P(X = x_k)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

■ **Exemple 3.2** Jouons au jeu suivant : On lance un dé non pipé une fois successivement.
- Si on tombe sur 6, on gagne 10 euros.
- Si on tombe sur 1, on gagne 5 euros.
- Dans tous les autres cas, on perd 6 euros.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (gain ou perte) lors d'une partie.

Voici comment l'on peut présenter la loi de probabilité de X :

Valeurs x_k prises par X	-6	5	10
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

■

3.2 Espérance mathématique et variance

Definition 3.3 Pour une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avec les probabilités $p_1 = p(X = x_1)$, $p_2 = p(X = x_2)$, $\ldots$, $p_3 = p(X = x_n)$, on définit l'**espérance** mathématique comme suit :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

la **variance** ainsi :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \left(x_k - E(X)\right)^2$$

et l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

■ **Exemple 3.3** Reprenons l'exemple de notre jeu précédent. On avait le tableau suivant :

Valeurs x_k prises par X	-6	5	10
Probabilité $P(X = x_k)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 &= -6 \times \frac{4}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{-24}{6} + \frac{5}{6} + \frac{10}{6} \\ &= \frac{-24 + 5 + 10}{6} = \frac{-9}{6} = -1,5 \end{aligned}$$

■

R Il est important de bien comprendre ce que l'on vient de calculer ! Il s'agit d'une *espérance*, c'est-à-dire que, dans notre exemple, on peut « espérer » perdre 1,5 euros (ou gagner -1,5 euros) en jouant un *nombre de fois suffisamment grand* !

Proposition 3.1 — Théorème de König-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

4. Variables aléatoires réelles continues

4.1 Variable aléatoire réelles continue et loi de probabilité

Dans un ensemble de possibilités, ou univers, $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_n\}$ une variable aléatoire (v.a.) X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est définie par la donnée des probabilités :

$$p_1 = \text{Prob}(X = x_1)\ ; \quad p_2 = \text{Prob}\,(X = x_2); \ldots\ ; \quad p_n = \text{Prob}(X = x_n)\ ,$$

qui vérifient les relations :

$$\text{pour tout entier } i \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

La correspondance $\{x_i; p_i\}$ est la *loi de probabilité* de X, que l'on présente généralement dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$\text{Prob}(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Si les valeurs possibles de X sont réparties de façon continue sur un intervalle fini ou infini, X est appelée variable aléatoire continue. Une telle variable est définie lorsque l'on connaît la probabilité pour que X prenne une valeur dans tout intervalle du type $[a; b]$. On se donne pour cela la fonction dite de *répartition* de X : $F(x) = \text{Prob}(X < x)$, qui permet de calculer pour tout intervalle :

$$\text{Prob}(a < X < b) = \text{Prob}(X < b) - \text{Prob}(X < a) = F(b) - F(a)$$

Si la fonction de répartition F est continue, cas que nous allons particulièrement étudier dans toute la suite, alors F peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\ .$$

La fonction f s'appelle alors la densité de probabilité de X, et se doit de vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

Definition 4.1 — Variable aléatoire continue réelle. Une variable aléatoire continue réelle est une v.a.r qui peut prendre une infinité de valeurs et non plus un nombre fini de valeurs comme les v.a.r discrètes.

■ **Exemple 4.1** Une v.a.r continue peut représenter par exemple le tirage aléatoire d'un nombre réel dans l'intervalle $[0; 1]$, ou encore la durée de vie d'une machine ou d'un composant. ■

4.2 Fonction de répartition

Definition 4.2 — Fonction de répartition. Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = P(X \leqslant t)$

R On s'intéresse à cette fonction de répartition car pour une v.a.r continue, $P(X = t)$ est nulle (voir plus bas).

Proposition 4.1
- F est une fonction croissante
- $P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - F(t)$
- $P(a < t \leq b) = F(b) - F(a)$
- $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$

R La notion de fonction de répartition existe aussi pour les v.a.r discrètes, c'est alors une fonction en escalier.

4.3 Densité de probabilité

Definition 4.3 — Densité de probabilité. Une v.a.r continue X est définie par une fonction f, appelée **densité de probabilité** de la v.a.r continue X, fonction qui est telle que :
- f est définie et positive sur $\mathbb{R}$ (pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$), et
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Proposition 4.2 Soit P une probabilité de densité f, alors $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(t)dt$.

Proposition 4.3
- $P(a < X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$
- Pour tout t réel, $P(X = t) = P(t \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_t^t f(x)\,dx = 0$,
- et donc, $P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

Exercice 4.1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que la fonction f définit une densité de probabilité. ■

Exercice 4.2 Soit $\lambda = \dfrac{1}{10}$ et f la fonction définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$.
1. Montrer que f est une densité de probabilité. C'est la densité de la *loi exponentielle* de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f.
3. Une standardiste vient de prendre son travail et attend son premier appel. Nous admettrons que le temps d'attente, exprimé en secondes, du premier appel suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{10}$.
   Donner la probabilité que la standardiste attende moins de 10 secondes, plus de 30 secondes et entre 20 et 30 secondes.

■

4.4 Espérance mathématique et variance

Proposition 4.4 Dans le cas d'une variable aléatoire continue, si les intégrales généralisées existent alors :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (E(X) - t)^2 f(t)\, dt \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice 4.3 En reprenant l'exemple précédent, calculer l'espérance de la v.a.r continue. ■

5. Transformation de variables aléatoires

5.1 Transformation affine et somme de variables aléatoires

Definition 5.1 Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω et a un nombre réel. On peut définir une variable aléatoire Y telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = aX(\omega)$. On note $Y = aX$.

■ **Exemple 5.1** On lance un dé équilibré à six faces et on joue au jeu suivant : le nombre de points obtenus est le résultat du dé multiplié par 5.
En notant respectivement X et Y les variables aléatoires correspondant au résultat du dé et aux points obtenus, on a $Y = 5X$. ■

Definition 5.2 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers Ω.
On peut définir une variable aléatoire Z telle que, pour tout élément $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$. Cette variable aléatoire est appelée **somme de variables aléatoires X et Y**. On note $Z = X + Y$.

■ **Exemple 5.2** On lance un 5 dé équilibré à six faces et on compte la somme des nombres obtenues.

Soit X la variable aléatoire correspondant à cette somme.

Alors, on peut écrire X sous la forme $X = X_1 + \cdots + X_5$ où pour tout $k \in \{1;2;3;4;5\}$, X_k correspond au résultat du dé numéro k. ■

Exercice 5.1 Une boîte contient des jetons rouges et des jetons jaunes indiscernables au toucher. Les jetons rouges correspondent à un gain de 3 €et les jetons jaunes à un gain de 2 €. On tire avec remise deux jetons de la boîte.
On note R l'événement « On a obtenu une boule rouge » et J l'événement « On a obtenu une boule jaune ». On travaille avec $\Omega = \{R;J\}^2$.
On note X_1 et X_2 les variables aléatoires désignant les gains obtenus respectivement au 1er et au 2e tirage.

1. Calculer les valeurs de $X_2((R;R))$, $X_1((R;J))$, $X_2((R;J))$, $X_1((J;R))$ et $X_2((J;J))$.
2. Soit X la variable aléatoire correspondant au gain total obtenu à l'issue des deux étapes. Exprimer X en fonction de X_1 et X_2. ■

5.2 Espérance d'une somme de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1;\omega_2;...;\omega_n\}$ et on note $\{x_1;x_2;...;x_p\}$ l'ensemble des valeurs prises pas X ou n et p sont des entiers naturels non nuls.

R On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire X, prenant les valeurs dans l'ensemble $\{x_1;x_2;\ldots;x_s\}$ est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{s} x_i P(X = x_i)$$

Proposition 5.1 En reprenant les notations précédentes, on a $E(X) = \sum_{i=0}^{n} X(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.

■ **Exemple 5.3** Dans le cadre d'un lancer de dé cubique équilibré, on gagne 2€ si on obtient un nombre pair et on perd 6€ si on obtient un nombre impair.
L'espérance de la variable aléatoire X correspondant au gain remporté s'élève à :

$$E(X) = X(1)P(\{1\}) + ... + X(6)P(\{6\}) = (-6) \times \frac{1}{6} + ... + 2 \times \frac{1}{6} = -2€$$

■

Proposition 5.2 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω. Alors :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Preuve. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur Ω tel que $Z = X+Y$.
On a alors $E(X+Y) = E(Z) = \sum_{i=0}^{n} Z(\omega_i)P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=0}^{n} (X+Y)(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.
On a par ailleurs $(X+Y)(\omega_i) = X(\omega_i) + Y(\omega_i)$.
Donc $E(X+Y) = \sum_{i=0}^{n} (X)(\omega_i)P(\{\omega_i\}) + \sum_{i=0}^{n} Y(\omega_i)P(\{\omega_i\})$.
D'où $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ en identifiant les deux sommes précédentes à $E(X)$ et $E(Y)$. ■

Proposition 5.3 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un nombre réel. Alors :

$$E(aX) = aE(X) \quad \text{et} \quad E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$$

Preuve. • Propriété à démontrer : « $E(aX) = aE(X)$ »

Pour $a = 0$ la propriété est évidente. Considérons maintenant $a \neq 0$.
En notant $x_1;\ldots;x_n$, les valeurs prises par X, alors aX prend les valeurs $ax_1;\ldots;ax_n$.
Par définition $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(aX = ax_i)$.
Or $aX = ax_i$ si, et seulement si, $X = x_i$ donc $P(aX = ax_i) = P(X = x_i)$.
Ainsi, $E(aX) = \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = a \times \sum_{i=0}^{n} ax_i P(X = x_i) = aE(X)$

• Propriété à démontrer : « $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$ »

On a $E(aX+Y) = E(aX) + E(Y)$ donc $E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$. ■

■ **Exemple 5.4** On joue à un jeu se déroulant en deux étapes.

- Dans la phase 1, on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat obtenu est 1 ou 6, on gagne 9 points. Sinon, on perd 6 points.
- Dans la phase 2, on lance une pièce équilibrée. Si on obtient face,on gagne 6 points. Sinon, on perd 2 points.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre total de points obtenus. Calculons $E(X)$.

- Soient X_1 la variable aléatoire correspondant au gain obtenu à la première étape et X_2 la varaible aléatoire correspondant au gain obtenu à la seconde étape. Dans ces conditions, on a $X = X_1 + X_2$.
- On étudie ensuite les lois de probabilité de X_1 et X_2.

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On peut maintenant calculer les espérances de ces deux variables aléatoires : $E(X_1) = -1$ et $E(X_2) = 2$.
- En conclusion, on a $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = -1 + 2 = 1$

■

5.3 Variance d'une somme de variables aléatoires

Dans cette partie, on considère toujours une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$ et on note $\{x_1; x_2; ...; x_p\}$ l'ensemble des valeurs prises pas X ou n et p sont des entiers naturels non nuls.

R On rappelle que la variance d'une variable aléatoire X, prenant les valeurs dans l'ensemble $\{x_1; x_2; \ldots; x_s\}$ est définie par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{s} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$$

Proposition 5.4 Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont on note $V(X)$ la variance. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

Preuve. Si $a = 0$, la propriété est évidente.
On suppose que $a \neq 0$.
En notant $x_1; ...x_n$ les valeurs prises pas X, alors aX prend les valeurs $ax_1; ...ax_n$.
Par définition, $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - E(aX))^2 P(aX_i = ax_i)$
Donc $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} (ax_i - aE(X))^2 P(aX_i = ax_i)$
D'où $V(aX) = \sum_{i=0}^{n} a^2 (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i)$
Ainsi $V(aX) = a^2 \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X_i = x_i) = a^2 V(X)$ ■

■ **Exemple 5.5** On considère une variable aléatoire X vérifiant $V(X) = 12$, alors $V(5X) = 5^2 V(X) = 25 \times 12 = 300$. ■

Definition 5.3 Soient $X_1, X_2, ..., X_n$, n varaibles aléatoires à valeurs respectivement dans $E_1, ...E_n$. On dit que $X_1, X_2, ..., X_n$ sont **indépendantes** lorsque, pour tous $x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n$:

$$P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap ... \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

Proposition 5.5 **(admise)**
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, alors :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

■ **Exemple 5.6** On reprend le jeu et la variable aléatoire de l'exercice précédent. Calculer $V(X)$.

On avait obtenu les lois de probabilité suivantes

x_i	-6	9
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

x_i	-2	6
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- On calcule $V(X_1)$: on avait obtenu $E(x_1) = -1$ donc $V(X_1) = \frac{2}{3}(-6-(-1))^2 + \frac{1}{3}(9-(-1))^2 = \frac{150}{3} = 50$
- On calcule $V(X_2)$: on avait obtenu $E(x_2) = 2$ donc $V(X_1) = \frac{1}{2}(-2-2)^2 + \frac{1}{2}(6-2)^2 = 16$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes. On a donc $V(X) = V(X_1) + V(X_2) = 50 + 16 = 66$. ■

5.4 Applications

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et p désigne un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

5.4.1 Applications à la loi binomiale

Definition 5.4
Deux variables aléatoires sont dites **identiquement distribuées** lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.

Proposition 5.6 (admise)
Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Proposition 5.7 Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)}$

Preuve. • Propriété à démontrer : « $E(X) = np$ »

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors, il existe n variables aléatoires de Bernoulli de paramètres p telles que $X = X_1 + \ldots + X_n$.
Ainsi, pour tout $k \in \{1;\ldots;n\}$, $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$.
Or,

$$E(X) = E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = p + \ldots + p = np$$

• Propriété à démontrer : « $V(X) = np(1-p)$ »

Les variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ étant indépendantes, par définition du schéma de Bernoulli, on a :

$$V(X) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$$

• Propriété à démontrer : « $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)}$ »

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

■

■ **Exemple 5.7** Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,3$.
On a $E(X) = np = 20 \times 0,2 = 4$
On a $V(X) = np(1-p) = 20 \times 0,2 \times 0,8 = 3,2$
On a $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3,2} = 1,789$ ■

5.4.2 Échantillons de n variables aléatoire identiques et indépendantes

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$ et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires définies sur Ω supposées indépendantes et identiquement distribuées. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ la somme de ces n variables aléatoires et $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ la moyenne de ces n variables aléatoires.

Proposition 5.8 Pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, on a :

1. $E(S_n) = nE(X_k)$
2. $V(S_n) = nV(X_k)$
3. $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$

Preuve. • Propriété à démontrer : « $E(S_n) = nE(X_k)$ »

La linéarité de l'espérance donne $E(S_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$. Or ces variables aléatoires suivent la même loi. Elles ont donc la même espérance. D'où, pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, $E(S_n) = nE(X_k)$

• Propriété à démontrer : « $V(S_n) = nV(X_k)$ »

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, on obtient, pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, $V(S_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n) = nV(X_k)$

• Propriété à démontrer : « $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X_k)$ »

$\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X_k)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X_k)} = \sqrt{n}\sigma(X_k)$. ■

R Cette propriété généralise les résultats obtenus sur la loi binomiale en considérant dans ce cas la variable aléatoire X comme somme de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

■ **Exemple 5.8** On lance 5 dés équilibrés à six faces. on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

Pour $k \in \{1; \ldots; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Chaque dé étant équilibré, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

1. Déterminons E(X) :
   On a $E(X) = 5E(X_1)$.
   Or la loi de probabilités de X_1 est

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   On a $E(X_1) = 1 \times \dfrac{1}{6} + \ldots + 6 \times \dfrac{1}{6} = 3,5$. Donc $E(X) = 5E(x_1) = 5 \times 3,5 = 17,5$
2. Déterminons V(X) :
   Les variables aléatoires $X_1; \ldots; X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, on a $V(X) = 5V(X_1)$.
   Or $V(X_1) = \dfrac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \ldots + \dfrac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 = \dfrac{35}{12}$, d'où $V(X) = 5 \times \dfrac{35}{12} = \dfrac{175}{12}$.

■

Proposition 5.9 Pour tout $k \in \{1; \ldots; n\}$, on a :

1. $E(M_n) = E(X_k)$
2. $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$
3. $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$

Preuve. • Propriété à démontrer : « $E(M_n) = E(X_k)$ »

Soit $k \in \{1; \ldots; n\}$, la linéarité de l'espérance et la propriété précédente donnent

$$E(M_n) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n)}{n}\right) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X_k) = E(X_k)$$

• Propriété à démontrer : « $V(M_n) = \dfrac{V(X_k)}{n}$ »

On sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $V(aS_n) = a^2V(S_n)$ Donc

$$V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X_k) = \frac{V(X_k)}{n}$$

• Propriété à démontrer : « $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$ »

$$\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\frac{V(X_k)}{n}} = \frac{\sigma(X_k)}{\sqrt{n}}$$

■

R $E(M_n)$ peut s'interpréter comme ceci : en prenant un grand nombre de fois des échantillons de taille n et en calculant à chaque fois la moyenne de l'échantillon obtenu, la moyenne théorique de ces résultats est égale à $E(x_k)$.

■ **Exemple 5.9** On lance un dé à six faces et on considère la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si le dé s'arrête sur un chiffre pair et la valeur 0 sinon. X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On répète deux fois de suite cette expérience. On considère alors l'échantillon $(X_1;X_2)$ de taille 2 de variables aléatoires X_1 et X_2 suivant la même loi que X. Il est ainsi possible d'évaluer le résultat d'une telle expérience en étudiant la variable aléatoire moyenne de X_1 et X_2.

On appelle M_2 la variable aléatoire moyenne de l'échantillon $(X_1;X_2)$. Alors M_2 peut prendre les valeurs suivantes :

Valeur de X_1	0	0	1	1
Probabilités de X_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Valeur de X_2	0	1	0	1
Probabilités de X_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Probabilités de (X_1,X_2)	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Valeur de M_2	$\frac{0+0}{2} = 0$	$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1+1}{2} = 1$
Probabilités de M_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$

On obtient ainsi la loi de probabilité de M_2 :

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(M_2 = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

■

Exercice 5.2 Soit n un entier naturel non nul. On considère un échantillon de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ identiquement distribuées.
On donne la loi de probabilité de X_1 cidessous.

x_i	5	10	15
$P(X_1 = x_i)$	$0,2$	$0,4$	$0,4$

Soit M_n la variable aléatoire définie par $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. On donne $\sigma(M_n) = \sqrt{2}$.
Déterminer la valeur de n.

5.5 Inégalités de concentration

5.5.1 Inégalité de Markov

Definition 5.5 Une variable aléatoire est dite **positive ou nulle** dans un univers Ω, lorsque toutes les valeurs prises par celle-ci sont des réels positifs ou nuls.

R Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$.

■ **Exemple 5.10** La variable aléatoire donnant le nombre de faces numérotées 1 obtenues sur dix lancers d'un dé est positive ou nulle. ■

Théorème 5.1 — Inégalité de Markov.
Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle d'espérance $E(X)$.
Alors, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire réelle positive ou nulle dont on note x_i les n valeurs pour l'entier i entre 1 et n.
Par définition de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Séparons cette somme en deux blocs en considérant les valeurs supérieures ou égales à a et celles strictement inférieures à a. On obtient

$$E(X) = \sum_{x_i \geqslant a_i} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i)$$

Pour tout entier i compris entre 1 et n, on sait que $x_i \geqslant 0$ (car X est positive ou nulle) et $P(X = x_i) \geqslant 0$ (par définition d'une probabilité) donc

$$\sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i) \geqslant 0$$

On en déduit que

$$E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} x_i P(X = x_i)$$

Par ailleurs, dans cette partie de la somme, pour tout entier i compris entre 1 et $n, x_i \geqslant a$ donc

$$E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} x_i P(X = x_i) \geqslant \sum_{x_i \geqslant a} aP(X = x_i)$$

Or,

$$\sum_{x_i \geqslant a} aP(X = x_i) = a \sum_{x_i \geqslant a} P(X = x_i) = aP(X \geqslant a)$$

Par conséquent, $E(X) \geqslant a \sum_{x_i \geqslant a} P(X = x_i)$ ou encore $E(X) \geqslant aP(X \geqslant a)$.
Puisque $a > 0$, on obtient enfin

$$P(X \geqslant a) \geqslant \frac{E(X)}{a}$$

■

R

- Il est essentiel que la variable aléatoire X soit positive ou nulle !
- Cette inégalité permet de trouver un majorant, mais pas forcément le plus petit possible.

■ **Exemple 5.11** En 2015, le salaire brut mensuel moyen en France était de 2442 . On choisit un salarié au hasard et on note X la variable aléatoire donnant son salaire. Les salaires étant positifs ou nuls, on sait que X est une variable aléatoire positive ou nulle.
On peut donc appliquer l'inégalité de Markov sur un exemple :

$$P(X \geqslant 7326)) \leqslant \frac{2442}{7326} \text{ soit } P(X \geqslant 7326) \leqslant \frac{1}{3}$$

■

Exercice 5.3 Une usine produit en moyenne 35 pièces par semaine.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces produites par semaine.

Que peut-on dire de la probabilité que l'usine produise plus de 70 pièces par semaine ? ■

5.5.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 5.10 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif a, on a :

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

Preuve. Comme $a > 0$, les inégalités $|X - E(X)| \geqslant a$ et $[X - E(X)]^2 \geqslant a^2$ sont équivalentes.
De plus, la variable $[X - E(X)]^2$ est positive ou nulle. On applique donc l'inégalité de Markov à la variable $[X - E(X)]^2$ et au réel a^2.
Ainsi,

$$P\left([X - E(X)]^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{E\left([X - E(X)]^2\right)}{a^2}$$

Or, $E\left([X - E(X)]^2\right) = V(X)$ donc

$$P\left([X - E(X)]^2 \geqslant a^2\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

et on a bien

$$P(|\, X - E(X)\, | \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

■

R

- La variable aléatoire $|X - E(X)|$ est positive ou nulle.
- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est loin d'être optimale. En réalité, il est fort possible que la probabilité soit bien inférieure au majorant obtenu.

■ **Exemple 5.12** Le taux moyen de glycémie dans une population est de 1 $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ avec une variance de 0,1.
Une personne présente un taux X critique si son taux ne se situe pas dans l'intervalle $]0,5;1,5[$.
Cet événement se traduit par l'inégalité $|X - E(X)| \geqslant 0,5$.
Sa probabilité vérifie donc

$$P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) \leqslant \frac{0,1}{0,5^2} \text{ soit } P(|X - E(X)| \geqslant 0,5) \leqslant 0,4$$

La probabilité qu'une personne présente un taux critique est inférieure ou égale à 0,4. ■

Proposition 5.11 Sous les mêmes conditions que la propriété précédente, l'inégalité peut être réécrite de la façon suivante

$$P\big(|X-E(X)|<a\big) \leqslant 1-\frac{V(X)}{a^2}$$

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$P\big(|X-E(X)| \geqslant a\big) = 1-P\big(|X-E(X)|<a\big)$$

et d'utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. ■

Exercice 5.4 Lors d'une saison de football, le nombre moyen de buts par match est de 2,5, avec une variance de 1,1.

Majorer la probabilité que le match suivant ne se termine pas avec deux ou trois buts. ■

5.5.3 Inégalité de concentration

Proposition 5.12 — Inégalité de concentration (admise). Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif a, on a :

$$P\big(|M_n-E(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$$

■ **Exemple 5.13** Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,2$. On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X. On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.

Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37]$ soit supérieur à $0,95$.

On cherche à calculer n tel que $P(0,03<M_n<0,37) \geqslant 0,95$. Dans l'idée d'appliquer l'inégalité de concentration, on fait apparaitre l'espérance de X dans l'inégalité. Or $E(X)=p=0,2$.

Ainsi, on cherche n tel que :

$$\begin{aligned}
P(0,03-0,2<M_n-0,2<0,37-0,2) &\geqslant 0,95\\
P(-0,17<M_n-0,2<0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|<0,17) &\geqslant 0,95\\
1-P(|M_n-0,2|>0,17) &\geqslant 0,95\\
P(|M_n-0,2|>0,17) &\leqslant 0,05
\end{aligned}$$

En prenant $a=0,17$ dans l'inégalité de concentration, on a :

$$P\big(|M_n-E(X)| \geqslant a\big) \leqslant 0,05 \text{ avec } \frac{V(X)}{na^2}=0,05$$

Or,

$$V(X)=p(1-p)=0,2\times 0,8=0,16$$

On cherche un entier n tel que :

$$\frac{0,16}{n0,17^2} \leqslant 0,05 \Longleftrightarrow n \geqslant 110,7$$

Pour $n \geqslant 111$, la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0,03;0,37[$ est supérieur à $0,95$. ■

Exercice 5.5 On reprend l'exemple précédent. On souhaite que l'écart entre la proportion de pile obtenue et $\frac{1}{2}$ soit inférieur ou égal à 0,01.
Quelle est la valeur minimale de n pour que le risque d'erreur soit inférieur ou égal à 5% ? ■

6. Couples de variables aléatoires

6.1 Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires discrètes

Soit (X,Y) un couple variables aléatoires discrète sur un univers Ω tel que :

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\} \quad \text{et} \quad Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$$

avec I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$

Definition 6.1 — Loi de probabilité du couple. On appelle loi de probabilité du couple (X,Y) (ou loi jointe ou conjointe de (X,Y)) l'ensemble des données des probabilités :

$$\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

lorsque $i \in I$ et $j \in J$

R Lorsque ces variables sont finies, la loi du couple est souvent présentée sous forme d'un tableau à double entrée, les valeurs prises par X apparaissant par exemple en ligne et celles prises par Y en colonne.

■ **Exemple 6.1** On choisit deux nombres au hasard dans $\{-1,1\}$. On note X leur somme, et Y leur produit. On cherche à déterminer la loi conjointe de (X,Y). Remarquons que l'univers est $\{-1;1\}^2$, que X prend ses valeurs dans $\{-2,0,2\}$ et Y dans $\{-1,1\}$. La loi conjointe de (X,Y) est alors :

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} \quad \text{(correspond au choix 1 et 1)} \quad \mathbb{P}(X = 2, Y = -1) = 0 \quad \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$$

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(X = -2, Y = 1) = \frac{1}{4} \quad \mathbb{P}(X = -2, Y = -1) = 0$$

■

Proposition 6.1 Soit (X,Y) un couple de variables discrètes tel que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$. L'ensemble des événements $(X = x_i)$ pour $i \in I$ et $(Y = y_j)$ pour $j \in J$ forment un système complet d'événements. La somme de leur probabilités vaut donc 1 :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = 1$$

6.2 Lois marginales d'un couple de variables (X,Y)

Definition 6.2 — Lois marginales d'un couple de variables discrètes). Soit (X,Y) un couple de variables discrètes sur cet espace.
Les lois de probabilité de X et Y sont alors appelés lois marginales de (X,Y).

R Comment dt'eterminer les lois marginales à partir de la loi conjointes de (X,Y) ?

Il suffit d'utiliser la formule des probabilités totales !! En effet, si l'on cherche à déterminer $\mathbb{P}(X=x_i)$ connaissant la loi jointe de (X,Y), nous devons nous appuyer sur le fait que l'ensemble des évènements $(Y=y_j)$ avec $j\in J$ est un système complet d'évènements et ainsi que pour tout $i\in J$:

$$\mathbb{P}(X=x_i)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{j\in J}(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right)=\sum_{j\in J}\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_i))$$

R Lorsque les variables X et Y sont finies et que la loi du couple est donnée sous forme d'un tableau à double entrée, les lois marginales de X et Y s'obtiennent en faisant la sommes des éléments sur chaque ligne ou sur chaque colonne.

■ **Exemple 6.2** Soit le couple de V.A.R. finies (X,Y) dont la loi conjointe est donnée par

$X\backslash Y$	-1	1	2	7
-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$

Loi marginale de X : Alors

$$\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)+\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=-1,Y=2)+\mathbb{P}(X=-1,Y=7)=\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{18}=\frac{11}{30}$$

Il s'agit ainsi de la somme des termes de la première ligne !! De même, on a :

$$\mathbb{P}(X=4)=\mathbb{P}(X=4,Y=-1)+\mathbb{P}(X=4,Y=1)+\mathbb{P}(X=4,Y=2)+\mathbb{P}(X=4,Y=7)=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{19}{30}$$

On a ainsi obtenue la loi marginale de X. (On vérifie bien que $\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=4)=1$!!) Loi marginale de Y : On a (en sommant les éléments de chaque colonne !!) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=-1)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=-1)+\mathbb{P}(X=4,Y=-1)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}\\
\mathbb{P}(Y=1)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=1)+\mathbb{P}(X=4,Y=1)=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}\\
\mathbb{P}(Y=2)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=2)+\mathbb{P}(X=4,Y=2)=\frac{1}{18}\\
\mathbb{P}(Y=7)&=\mathbb{P}(X=-1,Y=7)+\mathbb{P}(X=4,Y=7)=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

■

6.3 Indépendance de deux variables discrètes

Definition 6.3 — Indépendance de deux V.A.R. finies. Soit (X,Y) un couple de variables discrètes tel que $X(\Omega)=\{x_i,i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j,j\in J\}$. Soit $j_0\in J$. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tout couple $(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ on a :

$$\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j))=\mathbb{P}(X=x_i)\times\mathbb{P}(Y=y_j)$$

Autrement dit si et seulement si pour tout couple $(x_i,y_j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ les évènements

$(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants.

R Dans le cas où X et Y sont deux variables indépendantes, la connaissance des lois de probabilités de X et Y permet de déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).

Exercice 6.1 On lance un dé cubique équilibré. On note X_1 le résultat de ce lancé.
On lance un dé cubique pipé tel que le 6 a deux fois plus de chance de sortir que tout autre faces (celles-ci étant toutes équiprobables). On note X_2 le résultat du second lancé.
Les variables X_1 et X_2 sont supposées indépendantes. Compléter la loi du couple (X_1,X_2)

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					
6					

■

Exercice 6.2 Un sac contient 4 boules numérotée de 1 à 4 . On tire deux boules avec remise.
On note X_1 le numéro de première, X_2 celui de la seconde et Y le plus grand des deux !
1. Déterminer la loi de X_1, celle de X_2 puis celle de Y.
2. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
Les variables X_1 et Y sont-elles indépendantes ? ■

Proposition 6.2 Soient X et Y deux V.A.R. finies. Soit f et g deux fonctions réelles. Si X et Y sont indépendantes alors les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont également indépendantes.

R Ainsi si X et Y indépendantes alors X^2 et Y^2 sont indépendantes !

Proposition 6.3 — Indépendance et calculs d'espérances/variances.
(1) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes possédant toutes deux une espérance et indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

En utilisant la propriété ci-dessus. Si f et g sont des fonctions réelles et si X et Y indépendantes alors

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes possèdant toutes deux un moment d'ordre 2 et indépendantes, alors :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

6.4 Covariance d'un couple de variables aléatoires

Definition 6.4 — Covariance. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X et Y possède (une espérance et) une variance. On appelle covariance de X et Y, noté $\mathrm{Cov}(X,Y)$, le nombre réel :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

R Quelques remarques importantes...
- La covariance d'un couple de variables peut être négative...contrairement à la variance d'une variable.

- $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$.
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- On a pour tout couple de variables : $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leqslant V(X)V(Y)$

Definition 6.5 — Variables non corrélées. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont non-corrélées lorsque : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Proposition 6.4 — Propriétés calculatoires liées à la covariance. 1) Linéarité à droite et à gauche :
Soient a,b deux réels et X,Y,Z trois variables aléatoires possèdant une variance

$$\mathrm{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(Y,Z)$$
$$\mathrm{Cov}(X,aY+bZ) = a\,\mathrm{Cov}(X,Z) + b\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

2) Soient X et Y deux variables aléatoires possédant une variance alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Proposition 6.5 — Variance d'une somme de variables aléatoires. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aléatoires possédant une variance alors

$$V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Exercice 6.3 Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telle que $X_1(\Omega) = \{1,2\}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \dfrac{3}{4}$

1. Calculer $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. On définit la V.A.R $Y_k = X_k + X_{k+1}$.
(a) Déterminer $Y_k(\Omega)$ puis la loi de Y_k.
(b) Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ? Calculer $V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)$. ■

Proposition 6.6 — Indépendance et non-corrélation. La covariance d'un couple de variables indépendantes est nulle :

$$(X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes }) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$$

D'après cette propriété, deux variables indépendantes sont non corrélées (covariance du couple nulle). Cependant, ces notions sont bien distinctes car la réciproque n'est pas vraie : il existe des variables non corrélées et pourtant dépendantes !

R Contre-exemple : variables dépendantes mais non corrélées.
Si X et Y sont deux variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On observe que les variables aléatoires $X+Y$ et $|X-Y|$ sont dépendantes mais non corrélées.

III Loi de probabilités usuelles

7 Loi de probabilités discrètes 47
7.1 Loi uniforme discrète 47
7.2 Loi de Bernoulli 48
7.3 Loi binomiale 50
7.4 Loi de Poisson 53
7.5 Loi binomiale négative 56

8 Loi de probabilités continues 57
8.1 Loi uniforme continue 57
8.2 Loi normale 57
8.3 Loi normale centrée réduite 59

7. Loi de probabilités discrètes

Par définition, les variables aléatoires discrètes prennent des valeurs entières discontinues sur un intervalle donné. Ce sont généralement le résultat de dénombrement.

7.1 Loi uniforme discrète

7.1.1 Définitions

7.1.2 Espérance et variance

Definition 7.1 — Loi uniforme discrète. Une distribution de probabilité suit une **loi uniforme** lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire, $\forall i, P(X = x_i) = \frac{1}{n}$

■ **Exemple 7.1** La distribution des chiffres obtenus au lancer de dé (si ce dernier est non pipé) suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante :

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

avec pour espérance :

$$E(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = 3,5$$

et pour variance

$$V(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 - E(X)^2 = 2,92$$

où les valeurs x_i correspondent au rang i de la variable X dans la série. ■

7.1.3 Espérance et variance

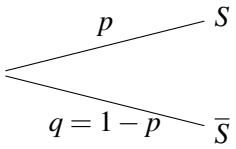
Dans le cas particulier d'une loi discrète uniforme où les valeurs de la variable aléatoire X correspondent au rang $x_i = i (\forall i \in [1, n])$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

7.2 Loi de Bernoulli

7.2.1 Définitions

Definition 7.2 — Épreuve de Bernoulli. Soit p un nombre réel appartenant à $[0;1]$.
On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire n'admettant que deux issues, appelées généralement **succès** S et **échec** $\overline{S}$ et de probabilités respectives p et $q = 1 - p$.



R Les termes « succès » et « échec » ne sont porteurs d'aucune valeur. Ils désignent simplement, de manière générique, les deux issues possibles. Le choix de ces termes est historiquement issu de la théorie des jeux.

■ **Exemple 7.2** • Lancer une pièce de monnaie équilibrée et savoir si pile est obtenu est une épreuve de Bernoulli de succès S « Pile a été obtenu. » dont la probabilité est $p = 0,5$. L'échec $\overline{S}$ est « Face a été obtenu. ».
• Interroger une personne dans la rue en France et lui demander si elle est gauchère est une épreuve de Bernoulli de succès S « La personne est gauchère. » dont la probabilité est $p \simeq 0,13$. ■

Definition 7.3 — Variable aléatoire et loi de Bernoulli. On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsqu'elle est à valeurs dans $\{0;1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p.
Autrement dit, on a $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	p	$1 - p$

■ **Exemple 7.3** On lance un dé cubique équilibré. On appelle succès l'événement : S « Un six est obtenu ».
Sa probabilité est $p = \dfrac{1}{6}$.
On obtient la loi de Bernouilli de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

x_i	1	0
$P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{5}{6}$

■

7.2.2 Espérance et variance

Proposition 7.1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance mathématique de X est $E(X) = p$.
La variance de X est $V(X) = p(1-p)$.

R Afin de démontrer la proposition, nous rappelons les deux formules suivantes :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k \times x_k \quad et \quad V(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - E(X))^2$$

Preuve. L'espérance $E(X)$ de X vaut :

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X=1)\times 1 + P(X=0)\times 0 \\ &= p\times 1 + (1-p)\times 0 \\ &= p \end{aligned}$$

La variance $V(X)$ de X vaut :

$$\begin{aligned} V(X) &= P(X=1)\times(1-E(X))^2 + P(X=0)\times(0-E(X))^2 \\ &= p\times(1-p)^2 + (1-p)\times(0-p)^2 \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p)(1-p+p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

■

R • La variance mesure ainsi la déviation moyenne autour de l'espérance $E(X)$.
• On a alors $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

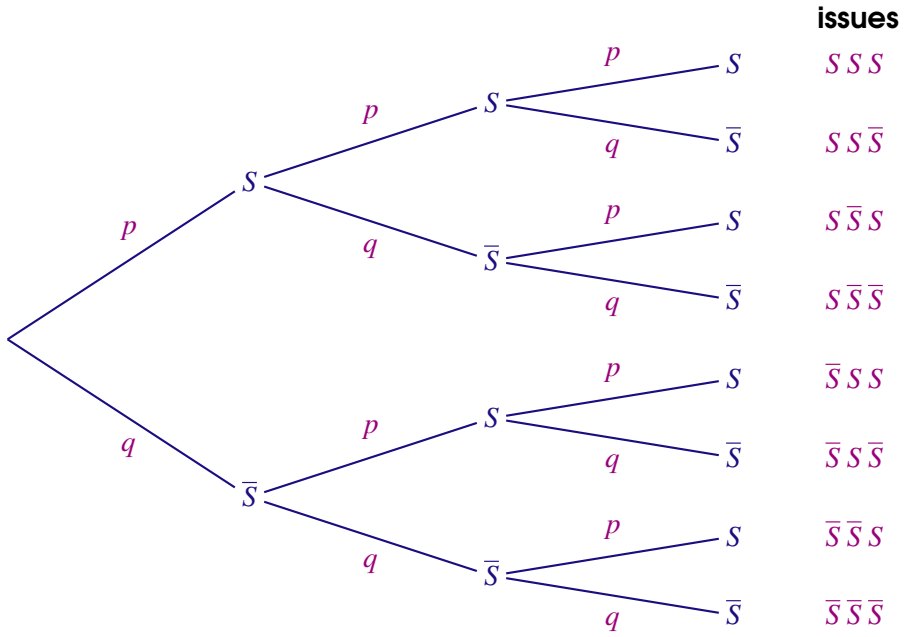
Definition 7.4 — Schéma de Bernoulli. Soit n un nombre entier naturel non nul.
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

Definition 7.5 Soit n un nombre entier naturel non nul.
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

R • Les conditions identiques et indépendantes sont essentielles et doivent être vérifiées dans chaque situation.
• Il peut être facile de concevoir mentalement l'arbre de probabilité associé à un schéma de Bernoulli, mais il n'est pas toujours facile de le tracer.

■ **Exemple 7.4** • On considère une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On prélève une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne. On répète ainsi dix fois l'expérience et on s'intéresse aux boules bleues obtenues.
Chaque tirage est une épreuve de Bernoulli de succès S « La boule est bleue. » dont la probabilité est $\frac{2}{3}$.
Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants : on a bien un schéma de Bernoulli.

• On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.
La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'echec est $p(\overline{S}) = 1-p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\,S\,S\,;\,S\,S\,\overline{S}\,;\,S\,\overline{S}\,S\,;\,\overline{S}\,S\,S\,;\,S\,\overline{S}\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,S\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,\overline{S}\,S\,;\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

■

Exercice 7.1 On tire au hasard successivement et avec remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. A chaque tirage, tirer un as est considéré comme un succès.
1. Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as tirés.
Donner la loi de probabilité de X. ■

7.3 Loi binomiale

7.3.1 Définitions

Definition 7.6 — Loi binomiale. Soient n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0;1]$.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenu lors de n répétitions identiques et indépendantes d'un schéma de Bernoulli dont p est la probabilité du succès.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

R
- La loi binomiale de paramètres n et p se note $\mathscr{B}(n;p)$.
- « $X \sim \mathscr{B}(n;p)$ » se lit « X suit la loi binomiale de paramètres n et p ».

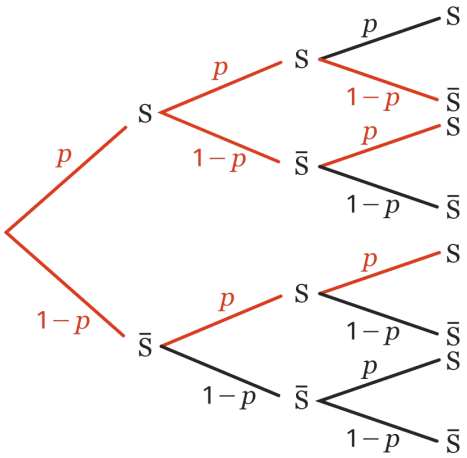
Proposition 7.2
Soient k un entier naturel inférieur ou égal à n et X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p. Alors

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

R Pour rappel :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

■ **Exemple 7.5** Illustration avec $n = 3$.
En rouge les chemins menant à $k = 2$ succès.
Il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins permettant d'obtenir deux succès. Chacun d'eux correspond à une probabilité égale à $p^2 \times (1-p)$.



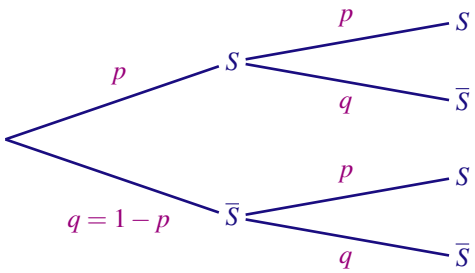
■

■ **Exemple 7.6** On considère une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues, toutes indiscernables au toucher. On prélève une boule dans cette urne, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne. On répète dix fois l'expérience et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues obtenu à la fin des dix tirages. Le tirage de chaque boule est une épreuve de Bernoulli, de succès S « La boule est bleue. » de probabilité $\frac{2}{3}$. Comme les dix tirages se font avec remise, les tirages sont identiques et indépendants. X comptant le nombre de succès, la variable X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{3}$.
La probabilité d'obtenir exactement sept boules bleues (et donc trois boules vertes) est de

$$P(X = 7) = \binom{10}{7}\left(\frac{2}{3}\right)^7\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{10-7}$$

■

R Dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$, on peut modéliser la situation à l'aide d'un arbre.
• **Cas $n = 2$:**
On répète deux fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante.



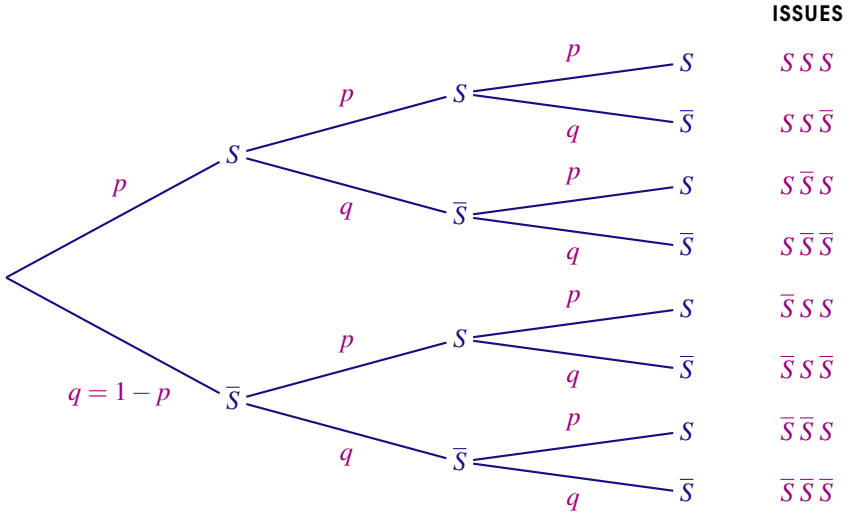
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(2; p)$ de paramètres $n = 2$ et p :

Nombre de succès k	0	1	2
$P(X = k)$	q^2	$2 \times p \times q$	p^2

• **Cas $n = 3$:**
On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p successivement et de façon indépendante.
L'expérience comporte $2^3 = 8$ issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{S\,S\,S\,;\,S\,S\,\overline{S}\,;\,S\,\overline{S}\,S\,;\,\overline{S}\,S\,S\,;\,S\,\overline{S}\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,S\,\overline{S}\,;\,\overline{S}\,\overline{S}\,S\,;\,\overline{S}\,\overline{S}\,\overline{S}\}$$

Pour obtenir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de succès, on dresse un arbre et compte le nombre d'issues contenant k succès.



La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$ de paramètres $n = 3$ et p :

Nombre de succès k	0	1	2	3
$P(X = k)$	q^3	$3 \times p \times q^2$	$3 \times p^2 \times q$	p^3

Proposition 7.3 (admise)
Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:
• $P(X \leqslant k) = 1 - P(X > k)$
• $P(X \geqslant k) = 1 - P(X < k)$

En particulier $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - q^n$, où $q = 1 - p$.

Exercice 7.2 On lance six fois une pièce de monnaie équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'on a obtenu face.
1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X.
2. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
3. Déterminer $P(X \leqslant 1)$ et $P(X \leqslant 4)$.
4. Déterminer $P(X \geqslant 5)$. ■

7.3.2 Espérance et variance

Proposition 7.4 Soit X la variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ de paramètres n et p.
• L'espérance de X est $E(X) = np$,
• la variance de X est $V(X) = np(1-p)$, et
• l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

■ **Exemple 7.7** On reprend l'exemple précédent :
On considère une urne opaque dans laquelle ont été placées une boule verte et deux boules bleues,

toutes indiscernables au toucher. On prélève une boule dans cette urne, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne. On répète dix fois l'expérience et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules bleues obtenu à la fin des dix tirages.
La variable X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{2}{3}$.
On a

$$E(X) = np = 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

Lorsque l'on répète un très grand nombre de fois cette expérience de dix tirages, alors le nombre moyen de boules bleues tirées est environ égal à $\frac{20}{3}$.
On obtient alors

$$V(X) = np(1-p) = 10 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{20}{9}$$

et

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{20}{9}}$$

■

Exercice 7.3 On considère une situation où la probabilité de réussir un entretien d'embauche est égale à 0,12. On interroge dix candidats et on suppose leur embauche indépendante de celle des autres candidats. On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont réussi leur entretien parmi les dix.
1. Calculer $E(X)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice..
2. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$. ■

7.3.3 Symétrie, récurrence et stabilité de la loi binomiale

La loi binomiale dépend des deux paramètres n et p. Elle est symétrique pour $p = 0,5$ et dissymétrique pour les autres valeurs de p. La dissymétrie est d'autant plus forte :
1. pour n fixe, que p est différent de q
2. pour p fixe que n est plus petit. Afin de faciliter les calculs des probabilités, il est possible d'utiliser une formule de récurrence donnant les valeurs des probabilités successives :

Proposition 7.5

$$P(S_n = k) = \frac{n-k+1}{k} \times \frac{p}{q} \times P(S_n = k-1)$$

Proposition 7.6 — Stabilité de la loi binomiale. Si S_n et S_m sont deux variables indépendantes suivant des lois binomiales respectivement $S_n \to \mathrm{B}(n,p)$ et $S_m \to \mathrm{B}(m,p)$ alors $S_n + S_m \to \mathrm{B}(n+m,p)$

7.4 Loi de Poisson

La loi de Poisson découverte au début du XIX ^{e} siècle par le magistrat français Siméon-Denis Poisson s'applique souvent aux phénomènes accidentels où la probabilité p est très faible $(p < 0,05)$. Elle peut également dans certaines conditions être définie comme limite d'une loi binomiale.

7.4.1 Approximation d'une loi binomiale

Lorsque n devient grand, le calcul des probabilités d'une loi binomiale

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

devient très fastidieux. On va donc, sous certaines conditions, trouver une approximation de p_k plus maniable.

Proposition 7.7 — Comportement asymptotique. Si $n \to \infty$ et $p \to 0$, alors

$$X : \mathrm{B}(n,p) \to \mathscr{P}(\lambda)$$

avec $np \to \lambda$

R Cette approximation est correcte si $n \geq 50$ et $np \leq 5$.

■ **Exemple 7.8** Soit une loi binomiale de paramètres $(100;0,01)$, les valeurs des probabilités pour k de 0 à 5 ainsi que leur approximation à 10^-3 avec une loi de Poisson de paramètre $(\lambda = np = 1)$ sont données dans le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	0,366	0,370	0,185	0,061	0,015	0,000
Approximation	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003

Dans le cas de cet exemple où $n = 100$ et $np = 1$, l'approximation de la loi binomiale par une loi de poisson donne des valeurs de probabilités identiques à 10^-3 près. ■

7.4.2 Définitions

Definition 7.7 — Processus de Poisson. On appelle **processus poissonnien** (ou **processus de Poisson**), le modèle probabiliste des situations qui voient un flux d'évènements se produire les uns à la suite des autres de façon aléatoire (dans le temps et dans l'espace), obéissant aux conditions suivantes :
- la probabilité de réalisation de l'évènement au cours d'une petite période ou sur une petite portion d'espace Δt est proportionnelle à Δt soit $p\Delta t$
- elle est indépendante de ce qui s'est produit antérieurement ou à côté,
- la probabilité de deux apparitions sur le même Δt est négligeable.

Ainsi, des évènements qui se réalisent de façon aléatoire comme des pannes de machines, des accidents d'avions, des fautes dans un texte, ... peuvent être considérés comme relevant d'un processus poissonnien.

Definition 7.8 — Loi de Poisson. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(\lambda > 0)$ si les réels p^k sont donnés par $P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ on note : $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$

R Une loi de Poisson est donnée par sa loi de probabilité :
1. $\forall k, P(X=k) > 0$
2. $\sum_{k\geq 0} P(X=k) = \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ or $\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ d'où $\sum_{k\geq 0} P(X=k) = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

■ **Exemple 7.9** Une suspension bactérienne contient 5000 bactéries/litre. On ensemence à partir de cette suspension, 50 boites de Pétri, à raison d'1 cmş par boite. Si X représente le nombre de colonies par boite, alors la loi de probabilité de X est :

$$X \to \mathscr{P}(\lambda = 5)$$

La probabilité qu'il n'y ait aucune colonie sur la boite de Pétri est : $P(X=0) = \frac{5^0 e^{-5}}{0!} = 0,0067$ soit approximativement $0,67\%$ de chance. La probabilité qu'il n'y ait au moins une colonie sur la boite de Pétri est : $P(X>0) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,0067 = 0,9933$ soit $99,3\%$ de chance d'avoir au moins une colonie bactérienne qui se développe dans la boite de Pétri. ■

Proposition 7.8 Comme pour la loi binomiale, il est possible d'utiliser une formule de récurrence pour calculer les valeurs des probabilités successives :

$$P(X=k) = \frac{\lambda}{k} P(X=k-1)$$

7.4.3 Espérance et variance

Proposition 7.9 L'espérance d'une variable aléatoire de Poisson est $E(X) = \lambda$

Preuve. Par définition

$$E(X) = \sum_{k\geq 0} kp_k = \sum_{k\geq 0} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

avec $k \in \mathbb{N}$ valeurs prises par la v.a. X avec

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = \left[\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right] = \lambda\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!}\right]$$

d'où

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k>0} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

■

Proposition 7.10 La variance d'une variable de Poisson est $V(X) = \lambda$

Preuve. Par définition $V(X) = \sum_{k\geq 0} k^2 p_k - E(X)^2 = \sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2$ en posant $k^2 = k + k(k-1)$, alors

$$\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{k}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} + \sum_{k\geq 0} \frac{k(k-1)}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\left[\lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \frac{\lambda^3}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+1}}{k!}\right] + e^{-\lambda}\left[\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{1!} + \frac{\lambda^4}{2!} + \ldots + \frac{\lambda^{k+2}}{k!}\right]$

d'où $\displaystyle\sum_{k\geq 0} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$

d'où $V(X) = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} - \lambda^2 = \lambda$

■

R Il est à noter que dans le cas d'une variable aléatoire de Poisson, l'espérance et la variance prennent la même valeur. Ceci est un élément à prendre en compte lors des tests de conformité à une loi de probabilité.

▪ **Exemple 7.10** Dans le cadre de la culture bactérienne, le nombre moyen de colonies attendu sur la boite de Pétri est : $E(X) = \lambda = \mathbf{5}$ colonies.
Ainsi si l'on effectue plusieurs cultures bactériennes (plusieurs boites de Pétri) à partir de la même solution initiale, on attend en moyenne cinq colonies pour l'ensemble des boites.
En ce qui concerne la variance et l'écart-type , on aura :

$$V(X) = \lambda = 5 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}24 \text{ colonies.}$$

▪

7.4.4 Stabilité de la loi de Poisson

Proposition 7.11 Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson respectivement $X \to \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \to \mathscr{P}(\mu)$ alors $X + Y \to \mathscr{P}(\lambda + \mu)$

7.5 Loi binomiale négative

7.5.1 Définitions

Sous le schéma de Bernoulli (épreuves identiques et indépendantes), on désire obtenir n succès et l'on considère la variable aléatoire discrète X qui représente le nombre d'épreuves indépendantes k nécessaire à l'obtention des n succès.

Definition 7.9 — Loi binomiale négative. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p notée $\mathrm{B}N(n,p)$ si : $P(X=k)=C_{k-1}^{n-1}p^n q^{k-n}$ avec $k,n\in\mathbb{N}$ et $k\geq n$

R Dans le cas de la loi binomiale négative, le nombre de succès n est connu et l'on cherche le nombre d'épreuves k, nécessaire pour obtenir les n succès. Ainsi le dernier évènement est connu car les épreuves cessent avec l'obtention du n^{ieme} succès et l'on choisit $n-1$ objets parmi $k-1$

■ **Exemple 7.11** Pour étudier le domaine vital d'une population de poissons, des émetteurs radio sont fixés au niveau de la nageoire dorsale après une légère anesthésie locale. Suite à divers aléas, on considère que 30% des poissons équipés ne sont pas repérés par la suite. Si l'on considère qu'un minimum de 15 poissons doivent être suivis pour avoir des résultats statistiquement acceptables, la variable aléatoire X " nombre de poissons devant être équipés " suit une loi binomiale négative

$$X\rightarrow \mathrm{B}N(15,0,70)$$

En posant comme hypothèse que les causes de pertes de liaisons radio soient suffisamment nombreuses pour assurer l'indépendance entre chaque épreuve, la probabilité d'être obligé d'équiper 20 poissons est de :

$$P(X=20)=\frac{19!}{14!5!}(0,70)^{15}(0,30)^5=0,13$$

■

7.5.2 Espérance et variance

Proposition 7.12 L'espérance associée à une loi binomiale négative est : $E(X)=\frac{n}{p}$ La variance associée à une loi binomiale négative est : $V(X)=n\frac{q}{p^2}$

7.5.3 Loi géométrique

Definition 7.10 — Loi géométrique. Lorsque le nombre de succès n est égal à 1 , la loi de la variable aléatoire discrète X porte le nom de loi de Pascal ou loi géométrique de paramètre p telle que :

$$P(X=k)=pq^{k-1} \text{ avec } k\in\mathbb{N}^*$$

Voici pourquoi :
Si l'on considère la variable aléatoire X " nombre de naissances observées avant l'obtention d'une fille " avec $p=1/2$ (même probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon), la loi suivit par X est une loi géométrique car :
$X=1$ si $\{X=F\}$ avec $P(X=1)=p$
$X=2$ si $\{X=G\cap F\}$ avec $P(X=2)=qp$
$X=3$ si $\{X=G\cap G\cap F\}$ avec $P(X=3)=qqp=q2p$
d'où $X=k$ si $\{X=G\cap G\cap..\cap.G\cap F\}$ avec $k-1\{X=G\}$ et donc $P(X=k)=pq^{k-1}$

Proposition 7.13 D'où l'espérance associée à la loi géométrique est : $E(X)=\dfrac{1}{n}$
et la variance associée à la loi géométrique est : $V(X)=\dfrac{4}{p^2}$

8. Loi de probabilités continues

Par définition, les variables aléatoires continues prennent des valeurs continues sur un intervalle donné.

8.1 Loi uniforme continue

8.1.1 Définition

La loi uniforme est la loi exacte de phénomènes continus uniformément répartis sur un intervalle.

Definition 8.1 — Loi uniforme. La variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur le segment $[a,b]$ avec $a < b$ si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a,b]$$
$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a,b]$$

8.2 Loi normale

8.2.1 Définitions

On parle de loi normale lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante (conditions de Borel). Cette loi acquiert sa forme définitive avec Gauss (en 1809) et Laplace (en 1812). C'est pourquoi elle porte également les noms de : loi de Laplace, loi de Gauss et loi de Laplace-Gauss.

■ **Exemple 8.1** Ainsi la taille corporelle d'un animal dépend des facteurs environnementaux (disponibilité pour la nourriture, climat, prédation, etc.) et génétiques. Dans la mesure où ces facteurs sont indépendants et qu'aucun n'est prépondérant, on peut supposer que la taille corporelle suit une loi normale. ■

Definition 8.2 — Loi normale. Une v.a.r continue X suit une **loi normale** de paramètres m et σ ($\sigma > 0$) si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

La loi de probabilité est notée $\mathcal{N}(m;\sigma)$.

Exercice 8.1 Étude de la fonction f.

1. Comparer $f(m+x)$ et $f(m-x)$. En déduire une caractéristique de la courbe représentative.
2. Donner le tableau de variations de f
3. Donner dans un même repère une représentation graphique de f pour les couples $(m;\sigma)$ suivants
$$(-2.5;0.5)\ ;\quad (0;0.5)\ ;\quad (2;0.5)\ .$$
4. Donner dans un même repère une représentation graphique de f pour les couples $(m;\sigma)$ suivants
$$(0;0.5)\ ;\quad (0;1)\ ;\quad (0;2)\ ;\quad (0;3)\ .$$

■

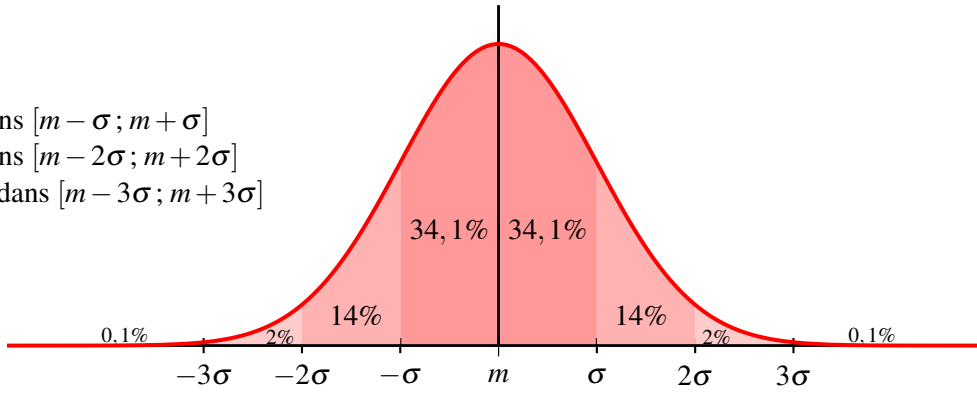
8.2.2 Espérance et variance

Proposition 8.1 Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors

$$E(X)=m \qquad \sigma(X)=\sigma \qquad V(X)=\sigma^2$$

Proposition 8.2

- $\sim 68\%$ des valeurs sont dans $[m-\sigma\,;m+\sigma]$
- $\sim 95\%$ des valeurs sont dans $[m-2\sigma\,;m+2\sigma]$
- $\sim 99,7\%$ des valeurs sont dans $[m-3\sigma\,;m+3\sigma]$



R Le paramètre μ représente laxe de symétrie et σ le degré daplatissement de la courbe de la loi normale dont la forme est celle dune courbe en cloche.

8.2.3 Stabilité de la loi normale

Proposition 8.3 Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires normales indépendantes de paramètres respectifs $(\mu_1,\sigma_1),(\mu_2,\sigma_2)$, alors leur somme X_1+X_2 est une variable aléatoire normale de paramètres $\left(\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$.

Preuve. 1. $E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$ Propriété P_1 de l'espérance. or $E(X_1)=\mu_1$ et $E(X_2)=\mu_2$ d'où $E(X_1+X_2)=\mu 1+\mu 2$
2. $V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$ Propriété P_1 de la variance lorsque X_1 et X_2 sont indépendantes. or $V(X_1)=\sigma_1^2$ et $V(X_2)=\sigma_2^2$ d'où $V(X_1+X_2)=\sigma_1^2+\sigma_2^2$ ■

R Ce théorème se généralise immédiatement à la somme de n variables aléatoires normales indépendantes.

8.3 Loi normale centrée réduite

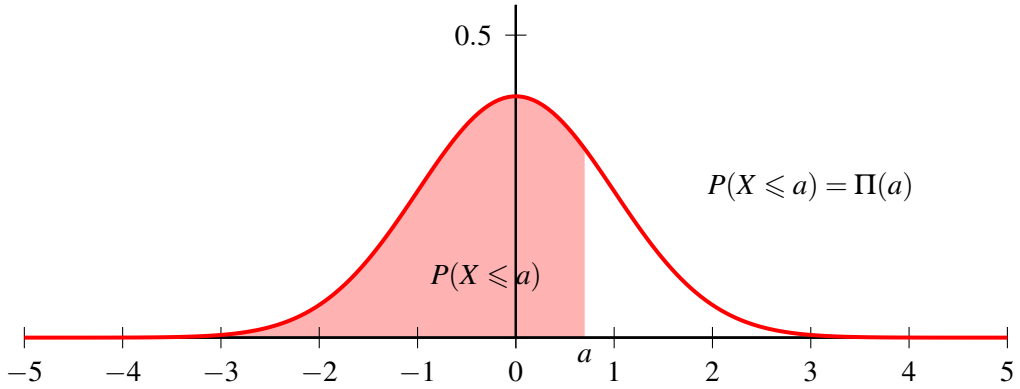
8.3.1 Définitions

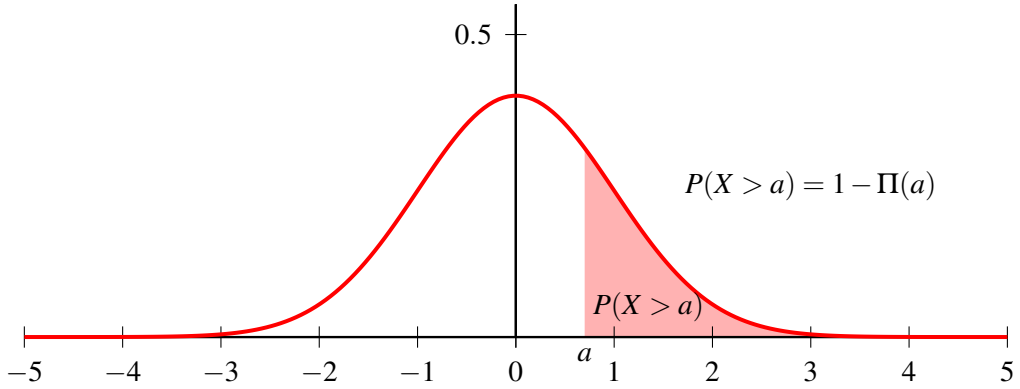
Definition 8.3 — Loi normale centrée réduite. On appelle **loi normale centrée réduite** la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

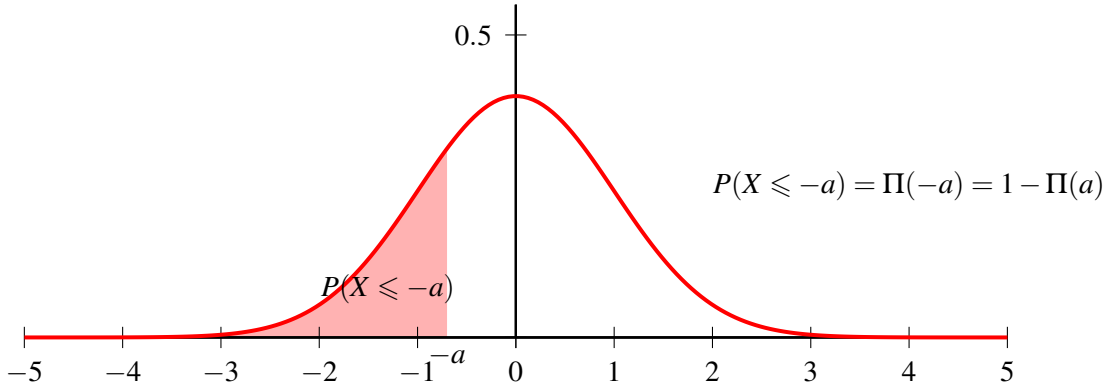
Exercice 8.2 Donner la fonction de densité d'une v.a.r continue qui suit une loi normale centrée réduite. ■

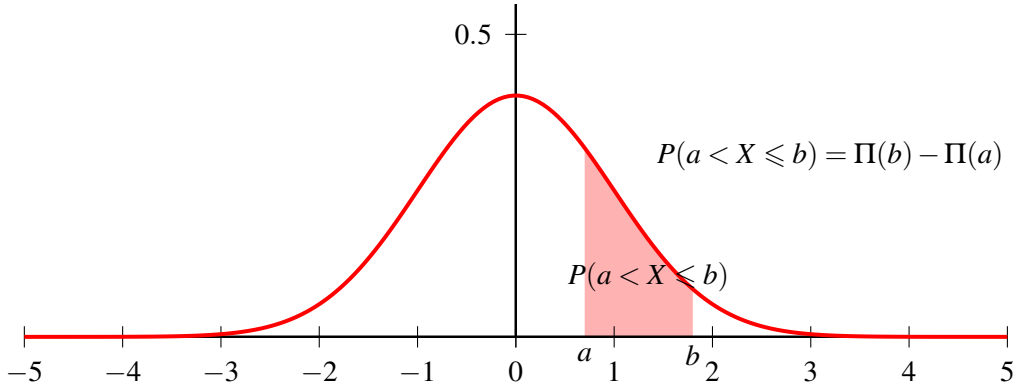
R La fonction de répartition de la loi normale réduite se note généralement Π. Ses valeurs peuvent se lire dans une table ou sur une calculatrice.

La table ne donne que les valeurs de $P(X \leqslant x) = \Pi(x)$ pour x positif.
Pour les autres calculs de probabilité, on procède comme ci-dessus, pour $a > 0$ et $b > 0$.

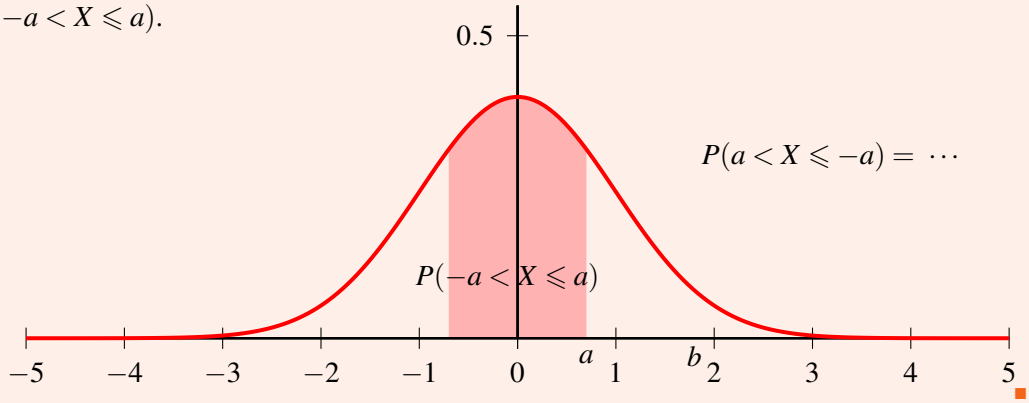








Exercice 8.3 Exprimer, en utilisant la fonction de répartition Π de la loi normale, la probabilité $P(-a < X \leqslant a)$.



Exercice 8.4 X est une v.a. suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
Déterminer les probabilités :
a) $P(X < 1,71)$ b) $P(X \leqslant -0,9)$ c) $P(0,61 < X \leqslant 1,2)$ d) $P(-1 \leqslant X < 1)$

8.3.2 Espérance et variance

8.3.3 Relation avec la loi normale

Proposition 8.4 Si la variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$, alors la variable aléatoire

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Exercice 8.5 X est une v.a. dont la loi de probabilité est la loi normale $\mathcal{N}(15;2)$.

En utilisant la v.a. $T = \dfrac{X-15}{2}$ et la table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, calculer :
a) $P(X < 16)$ b) $P(X > 17)$ c) $P(X \geqslant 14)$ d) $P(10 < X < 20)$ e) $P(-10 < X \leqslant 20)$ f) $P(13 \leqslant X \leqslant 17)$ g) $P(-25 \leqslant X \leqslant -20)$

Exercice 8.6 Une machine produit des objets de masse m en grammes. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse des objets produits, X suit une loi normale de moyenne 250 et d'écart type 2.

Calculer les probabilités qu'un objet pèse :
a) moins de 251 g b) plus de 252 g c) entre 246 et 254 g ■

Exercice 8.7 Une machine fabrique des condensateurs de capacité 5μF en très grande série.

La variable aléatoire X mesurant leur capacité suit la loi normale de moyenne $m = 4,96\mu$F et d'écart type $\sigma = 0,05\mu$F.

On considère qu'un condensateur est acceptable si sa capacité est comprise entre $4,85\mu$F et $5,15\mu$F.

1. Calculer la probabilité pour qu'un condensateur soit acceptable.
2. La machine est bien réglée si 99% de sa production est acceptable. La machine est-elle bien réglée ?

■

Exercice 8.8 Une machine fabrique des pièces circulaires en série. A chaque pièce tirée au hasard, on associe son diamètre x exprimé en millimètre. On définit ainsi une variable aléatoire X. On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu = 32$ et d'écart type $\sigma = 1$ (en mm).

Pour être utilisable, une pièce doit satisfaire à la norme suivante : $31 \leqslant x \leqslant 33$.

1. Quelle est la probabilité p qu'une pièce soit utilisable ?
2. Le coût de fabrication d'une pièce est noté f. Dans un lot de 100 pièces fabriquées, le coût de fabrication est donc de $100f$, tandis que le nombre de pièces utilisables est seulement de $100p$. Ainsi, le prix moyen de fabrication est : $M = \dfrac{100f}{100p} = \dfrac{f}{p}$.
   a. Calculer le prix moyen de fabrication avec la machine précédente si $f = 10,80$€.
   Pour diminuer le pourcentage de pièces défectueuses, on pourrait utiliser une machine plus moderne : son écart type serait de 0,5 mm, et X suivrait alors la loi normale $\mathcal{N}(32;0,5)$, mais le coût de fabrication serait alors de $f_2 = 12$€ avec cette nouvelle machine.
   b. Calculer pour cette nouvelle machine la probabilité p_2 qu'une pièce soit utilisable.
   c. Déterminer le prix de revient moyen M_2 pour cette nouvelle machine. Commenter.

■

Exercice 8.9 Une entreprise dispose d'un parc de 25 machines du même type, fonctionnant indépendamment les unes des autres. Au cours d'une journée une machine peut-être en panne ou fonctionner correctement, la probabilité qu'elle tombe en panne étant de 0,035.

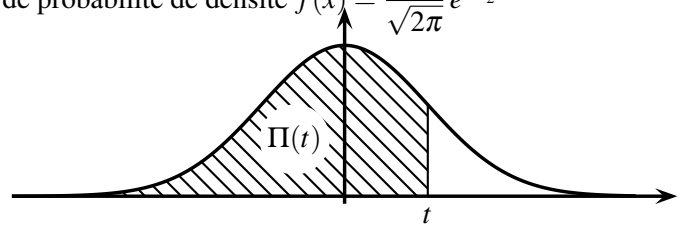
1. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de machines tombées en panne un jour donné parmi les 25 utilisées. On admettra que cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,035$.
   a. Donner l'espérance mathématique et la variance de X.
   b. Déterminer à 10^{-3} près les probabilités des événements suivants :
   • aucune machine ne tombe en panne un jour donnée ;
   • au moins 2 machines tombent en panne un jour donné.
2. Si une machine tombe en panne au cours d'une journée, on fait appel au service de dépannage qui effectue la réparation pour que la machine soit en service le lendemain. Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le temps de réparation en heures. On admet que Y suit la loi normale de moyenne 3 heures et d'écart type 1,5 heures.
   Déterminer les probabilités des événements suivants :
   • la réparation d'une machine dépasse 6 heures ;
   • la réparation d'une machine dure moins de 1,5 heures.

■

8.3.4 Extrait de la table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

La loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est la loi de probabilité de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\Pi(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.5	0.5039	0.5079	0.5119	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5318	0.5358
0.1	0.5398	0.5437	0.5477	0.5517	0.5556	0.5596	0.5635	0.5674	0.5714	0.5753
0.2	0.5792	0.5831	0.587	0.5909	0.5948	0.5987	0.6025	0.6064	0.6102	0.614
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.633	0.6368	0.6405	0.6443	0.648	0.6517
0.4	0.6554	0.659	0.6627	0.6664	0.67	0.6736	0.6772	0.6808	0.6843	0.6879
0.5	0.6914	0.6949	0.6984	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.719	0.7224
0.6	0.7257	0.729	0.7323	0.7356	0.7389	0.7421	0.7453	0.7485	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7733	0.7763	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.791	0.7938	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8105	0.8132
0.9	0.8159	0.8185	0.8212	0.8238	0.8263	0.8289	0.8314	0.8339	0.8364	0.8389
1.0	0.8413	0.8437	0.8461	0.8484	0.8508	0.8531	0.8554	0.8576	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8707	0.8728	0.8749	0.8769	0.8789	0.8809	0.8829
1.2	0.8849	0.8868	0.8887	0.8906	0.8925	0.8943	0.8961	0.8979	0.8997	0.9014
1.3	0.9031	0.9049	0.9065	0.9082	0.9098	0.9114	0.913	0.9146	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9221	0.9236	0.925	0.9264	0.9278	0.9292	0.9305	0.9318
1.5	0.9331	0.9344	0.9357	0.9369	0.9382	0.9394	0.9406	0.9417	0.9429	0.944
1.6	0.9452	0.9463	0.9473	0.9484	0.9494	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9544
1.7	0.9554	0.9563	0.9572	0.9581	0.959	0.9599	0.9607	0.9616	0.9624	0.9632
1.8	0.964	0.9648	0.9656	0.9663	0.9671	0.9678	0.9685	0.9692	0.9699	0.9706
1.9	0.9712	0.9719	0.9725	0.9731	0.9738	0.9744	0.975	0.9755	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9777	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9807	0.9812	0.9816
2.1	0.9821	0.9825	0.9829	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9849	0.9853	0.9857
2.2	0.986	0.9864	0.9867	0.9871	0.9874	0.9877	0.988	0.9883	0.9886	0.9889
2.3	0.9892	0.9895	0.9898	0.99	0.9903	0.9906	0.9908	0.9911	0.9913	0.9915
2.4	0.9918	0.992	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.993	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9937	0.9939	0.9941	0.9942	0.9944	0.9946	0.9947	0.9949	0.995	0.9952
2.6	0.9953	0.9954	0.9956	0.9957	0.9958	0.9959	0.996	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.997	0.9971	0.9971	0.9972	0.9973
2.8	0.9974	0.9975	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9978	0.9979	0.998	0.998
2.9	0.9981	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986

Table pour les grandes valeurs de t

t	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$\Pi(t)$	0.99865	0.99903	0.99931	0.99951	0.99966	0.99976	0.99984	0.99992	0.99996	0.99999

IV Des très beaux résultats

9 Loi des grands nombres 67

9.1 Cas particulier de la loi binomiale 67

9.2 Cas général 68

10 Théorème central limite 69

10.1 Théorème central limite 69

10.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale 69

10.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson 72

11 Intervalle de confiance et de fluctuation 75

11.1 Intervalle de fluctuation 75

11.2 Intervalle de confiance 76

9. Loi des grands nombres

9.1 Cas particulier de la loi binomiale

Proposition 9.1 (admise)
On considère un schéma de Bernoulli comportant n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Pour tout i de 1 à n, on note X_i la variable aléatoire associée à la i -ème épreuve de Bernoulli qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon. On a alors $P(X_i = 1) = p$.
• Chaque variable X_i (pour i allant de 1 à n) suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
• La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n$ est égale au nombre de succès lors des n épreuves et suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Proposition 9.2 (admise)
On appelle **fréquence empirique** des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la variable aléatoire M_n définie par

$$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

Soit t un nombre réel strictement positif.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_n et M_n donne :

$$P(S_n - np\,| \geqslant t) \leqslant \frac{np(1-p)}{t^2} \text{ et } P(|M_n - p| \geqslant t) \leqslant \frac{p(1-p)}{nt^2}$$

R • La première inégalité signifie que la probabilité que la variable S_n prenne des valeurs éloignées d'une valeur t de son espérance np est d'autant plus petite que t est grand.
• $|M_n - p| < t$ équivaut à $p - t < M_n < p + t$
• En utilisant l'événement contraire, si t est un nombre réel strictement positif, on a alors :

$$P(|S_n - np| < t) \geqslant 1 - \frac{np(1-p)}{t^2} \text{ et } P(|M_n - p| < t) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{nt^2}$$

Exercice 9.1 On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes et on note la couleur de la face cachée. On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face cachée est rouge au cours des 100 lancers.
En utilisant la loi des grands nombres dans le cas particulier d'une loi binomiale, déterminer une majoration de $P(21 \leqslant S_n \leqslant 29)$. ■

9.2 Cas général

Definition 9.1
On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$.
M_n s'appelle la **moyenne empirique** des variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Proposition 9.3 — Loi (faible) des grands nombres.
Soit une variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif a, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\big(|M_n - E(X)| \geqslant a\big) = 0$$

Preuve. On applique l'inégalité de concentration à la variable aléatoire M_n.

$$0 \leqslant P\left(|M_n - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{na^2}$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{V(X)}{na^2} = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(|M_n - E(X)| \geqslant a\right) = 0$$

■

R
- On dit que M_n **converge en probabilité** vers $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

Exercice 9.2 On considère un jeu de 52 cartes. On tire treize cartes avec remise et on note le nombre de rois obtenus.
D'après la loi des grands nombres, si on répète cette expérience un grand nombre n de fois et que l'on note M_n la moyenne des résultats obtenus, vers quelle valeur M_n converge-t-elle ? ■

10. Théorème central limite

10.1 Théorème central limite

On lance n fois une pièce de monnaie, et on convient que l'on gagne 1 euro si l'on obtient pile, que l'on perd 1 euro si l'on obtient face. On note S_n l'argent gagné, ou perdu, après n parties. Quelle est la loi de probabilité de S_n ? Intuitivement, il est clair qu'il y a plus de chances que S_n soit proche de 0 plutôt que S_n soit grand. Mais peuton aller plus loin, et donner l'allure de la loi de probabilité de S_n ? Le théorème suivant, dit théorème limite central, affirme que c'est effectivement le cas.

Théorème 10.1 Soit (X_n) une suite de variables indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On pose :

$$\mu = E(X_1), \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$$
$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Alors la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ (la loi normale centrée réduite). En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(Y_n \leq x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

R La grande force de ce théorème est sa généralité : il y a vraiment très peu d'hypothèses sur la suite (X_n). Quelle que soit la loi de probabilité d'un événement aléatoire, si on le répète infiniment souvent, de façon indépendante, sa moyenne finit par se comporter comme une loi normale. C'est ce théorème qui permet d'affirmer que la loi normale est la loi des phénomènes naturels. Si on observe par exemple la taille des individus dans une population, celle-ci va suivre une répartition qui va ressembler à celle de la loi normale (la fameuse courbe en cloche).

10.2 Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

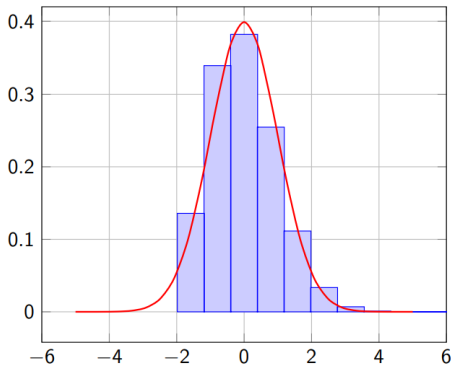
La loi binomiale apparaît dans de nombreuses situations. C'est aussi le cas de la loi normale, car dans certains cas, la loi binomiale (discrète) peut être approchée par une loi normale (continue).

Proposition 10.1 Si $n \geqslant 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$ alors $\mathcal{B}(n;p) \simeq \mathcal{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$

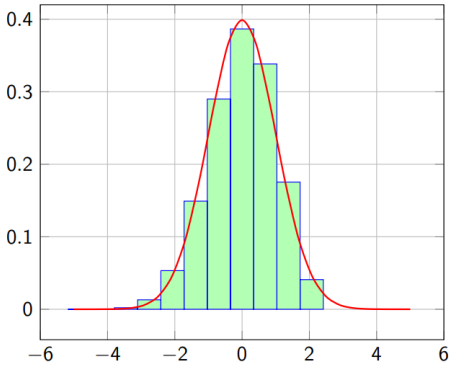
R

- Si $S \sim \mathcal{B}(n;p)$ alors S ne prend que des valeurs entières entre 0 et n.

- Si $X \sim \mathscr{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$ alors X ne prend presque jamais de valeurs entières.



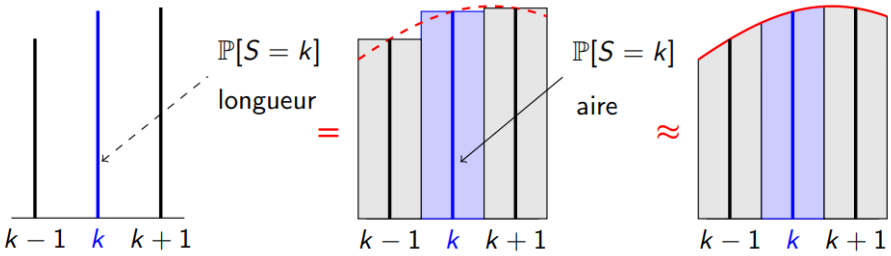
$n = 10, \quad p = 0,2$



$n = 10, \quad p = 0,7$

R

- Comme $S \sim \mathscr{B}(n;p)$ est une variable aléatoire discrète, la probabilité $P(S=k)$ est égale à la hauteur du bâton correspondant dans l'histogramme.
- La hauteur du baton est égale à l'aire d'un rectangle qui est proche de l'aire sous la courbe de la densité de la loi normale.



Proposition 10.2 Si $\mathscr{B}(n;p) \simeq \mathscr{N}(np; \sqrt{np(1-p)})$, alors

$$P(S=k) \simeq P(k-0,5 \leqslant X \leqslant k+0,5)$$

R Le fait d'enlever ou d'ajouter une correction de 0, 5 s'appelle la **correction de continuité**.

■ **Exemple 10.1** La prévalence de la dyslexie est de l'ordre de 5%. Dans un centre aéré de 120 enfants, on note S le nombre de dyslexiques. Quelle est la probabilité d'avoir de 5 à 10 dyslexiques dans le groupe ?

- Comme $S \sim \mathscr{B}(120;0,05)$ avec $n = 120 \geq 30, np = 6 > 5$ et $n(1-p) = 114 > 5$, la binomiale peut être approchée par $X \sim \mathscr{N}(6;2,39)$.

$$\begin{aligned} P[5 \leq S \leq 10] \approx P[4,5 \leq X \leq 10,5] &\approx P\left[\frac{4,5-6}{2,39} \leq Z \leq \frac{10,5-6}{2,39}\right] \\ &\approx P[-0,63 \leq Z \leq 1,88] \approx F(1,88) - F(-0,63) \\ &\approx F(1,88) - 1 + F(0,63) \\ &\approx 0,9699 - 1 + 0,7357 \approx 0,7056 \end{aligned}$$

- La « probabilité » d'avoir entre 5 et 10 dyslexiques est de $70,6\%$.

R Lors d'une approximation de la loi binomiale par une loi normale, le résultat pas très précis, donc il est inutile de garder trop de chiffres après la virgule...

- Vérifions que l'approximation est correcte (à ne pas faire dans la pratique). Comme $S \sim \mathscr{B}(120;0,05)$, on peut calculer

$$\begin{aligned}
P[5 \leq S \leq 10] =& P[S=5]+P[S=6]+\ldots+P[S=10] \\
=& \binom{120}{5}(0,05)^5(0,95)^{115}+\binom{120}{6}(0,05)^6(0,95)^{114} \\
&+\ldots+\binom{120}{10}(0,05)^{10}(0,95)^{110} \\
=& 0,1634+0,1648+0,1412+0,1050+0,0688+0,0402 \\
=& 0,6834
\end{aligned}$$

  Le résultat n'est pas toujours très précis comme on peut le voir ici.
- Que se passe-t-il si on ne fait pas la correction de continuité ?

$$P[5 \leq S \leq 10] \approx P[5 \leq X \leq 10] \approx F(1,67)-1+F(0,42) \approx 0,6153$$

■

■ **Exemple 10.2** La prévalence de la dyslexie : 5%. On considère 1200 enfants et on note S le nombre de dyslexiques. Quelle est la probabilité d'avoir de 55 à 58 dyslexiques dans le groupe ?

- Comme $S \sim \mathscr{B}(1200;0,05)$, on peut approximer par $\mathscr{N}(60;7,55)$

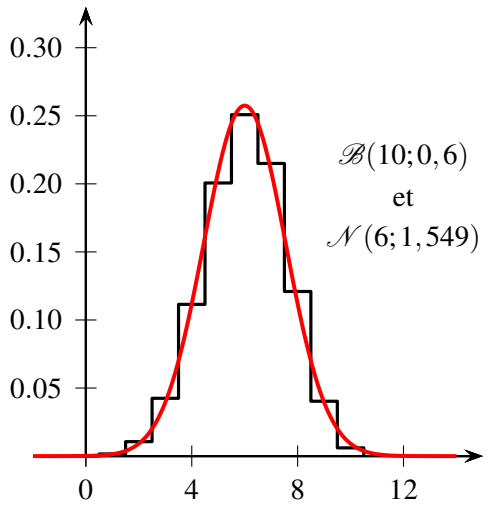
$$\begin{aligned}
P[55 \leq S \leq 58] \approx P[54,5 \leq X \leq 58,5] \approx P\left[\frac{54,5-60}{7,55} \leq Z \leq \frac{58,5-60}{7,55}\right] \\
\approx P[-0,73 \leq Z \leq -0,20] \approx 0,1880
\end{aligned}$$

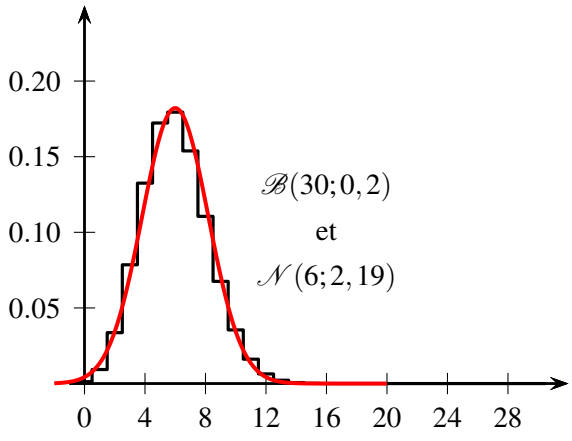
  Si on ne fait pas l'approximation mais le calcul exact avec la binomiale

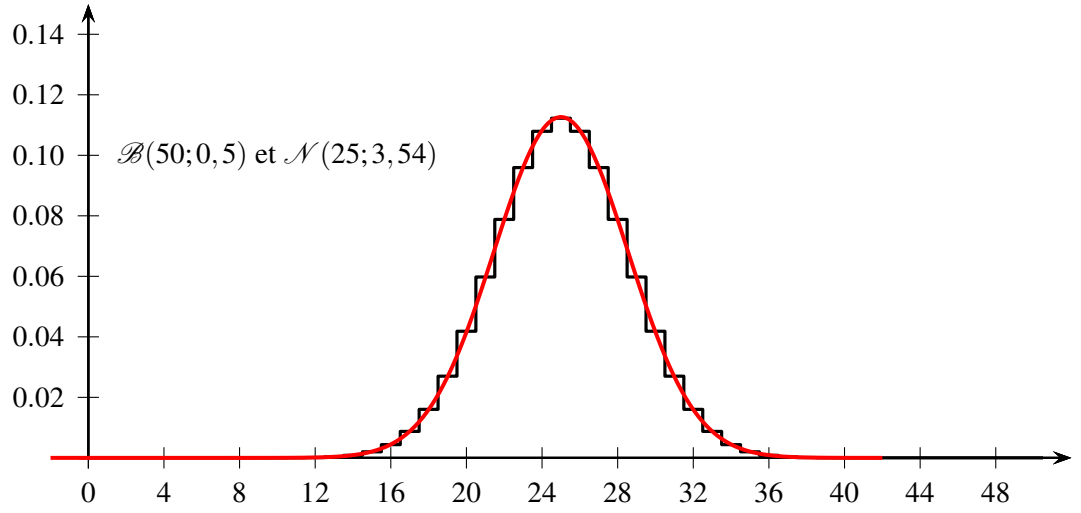
$$\begin{aligned}
P[55 \leq S \leq 58] &= P[S=55]+P[S=56]+P[S=57]+P[S=58] \\
&= \binom{1200}{55}(0,05)^{55}(0,95)^{1145}+\ldots \\
&= 0,0439+0,0472+0,0499+0,0517 = 0,1927
\end{aligned}$$

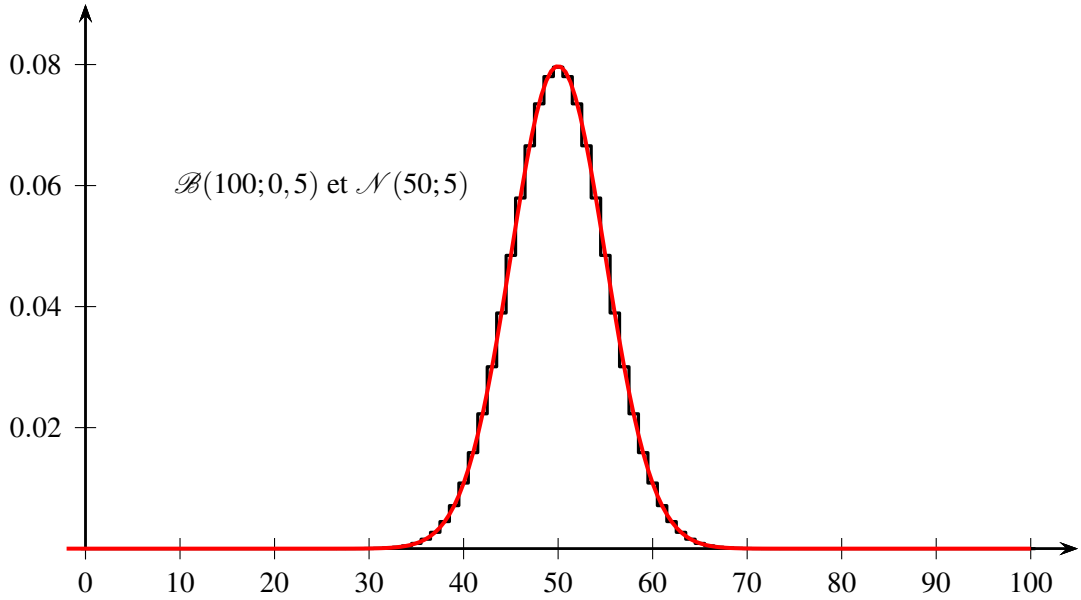
- Il y a une meilleure approximation dans cet exemple modifié ... et surtout... $\binom{1200}{55}$ est problématique pour les calculatrices !

■









10.3 Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson

Proposition 10.3 Si on pose $np = m$, on a alors

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = e^{-m}\frac{m^k}{k!}$$

La loi de Poisson apparait comme la loi limite de la loi binomiale

R Lorsque p est petit ($p \leq 0,1$), n grand ($n \geq 30$) et le produit np pas trop grand ($np \leq 10$), on peut approcher les celles obtenues avec la loi de Poisson $\mathscr{P}(np)$

Preuve. Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.
On se place dans le cas où $n \to +\infty$, $p \to 0$ et le produit $np = a > 0$.

On a alors, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\, p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

soit, en posant $np = a \iff p = \dfrac{a}{n}$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\, p^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n^k \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, tous les facteurs $\left(1-\dfrac{i}{n}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, tendent vers 1, et donc,

$$P(X=k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus,

$$(1-p)^{n-k} = \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} = \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} = 1$$

Proposition 10.4 — Lemme utile. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{-a}$$

Preuve du lemme. On écrit : $\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{n} = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)}$.
Lorsque $n \to +\infty$, $\dfrac{a}{n} \to 0$, et alors on a $\ln\left(1-\dfrac{a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n}$.
Ainsi,

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n} = e^{n\ln\left(1-\frac{a}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n\left(-\frac{a}{n}\right)} = e^{-a}$$

■

On aboutit alors à

$$(1-p)^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-a}$$

ce qui nous permet d'affirmer que :

$$P(X=k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(np)^k}{k!} e^{-a} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

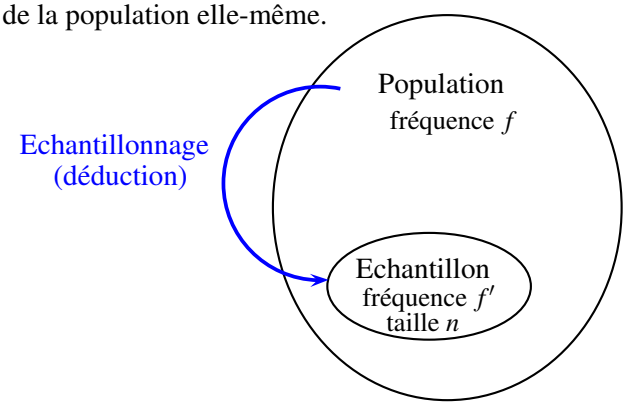
qui est la probabilité de l'événement $X = k$ lorsque la variable aléatoire X suit la loi de Poisson $P(a)$ de paramètre $\lambda = a = np$. ■

11. Intervalle de confiance et de fluctuation

11.1 Intervalle de fluctuation

L'échantillonnage est l'étude des liens existants entre les paramètres, moyenne ou fréquence, des échantillons prélevés dans une population et ceux de la population elle-même.

Dans une population donnée, on connaît la fréquence f d'un caractère.
On répète n fois, de façon indépendante, le choix d'un individu dans cette population de façon à constituer un échantillon de taille n.
On aimerait alors connaître, ou du moins estimer, sur cet échantillon, la fréquence f' du caractère.



Definition 11.1
Lorsqu'on répète n fois la même expérience aléatoire, on obtient une série de n succès ou échecs que l'on appelle échantillon de taille n.
Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, les fréquences de succès ou d'échecs calculées pour chaque échantillon varient d'un échantillon à l'autre.
Ce phénomène s'appelle la **fluctuation d'échantillonnage**.

▪ **Exemple 11.1** On lance une pièce bien équilibrée (donc, la probabilité d'obtention des événements "Pile" et "Face" sont égales à $p = 0,5$) 100 fois successivement :

- pour une 1ère série de 100 lancers, on obtient 54 fois "Pile", soit une fréquence $f' = \dfrac{54}{100} = 0,54$;
- pour une 2ème série de 100 lancers, on obtient 41 fois "Pile", soit une fréquence $f' = \dfrac{41}{100} = 0,41$;
- pour une 3èeme série ...

Bien que ce phénomène soit aléatoire, on sait que (d'après la loi des grands nombres) plus la taille des échantillons augmente, plus les fréquences observées se rapprochent, ou se stabilisent autour, d'une valeur limite $f' = p = 0,5$. ▪

Dans l'exemple précédent, on sait que même si le nombre de succès varie d'une expérience à

l'autre, il sera rare (c'est-à-dire la probabilité sera faible) d'avoir une fréquence de "Pile" très faible ou très grande (disons, par exemple, inférieure à 0,1 ou supérieure à 0,9).

La notion d'intervalle de fluctuation permet de quantifier ce phénomène :la fréquence de succès calculée sur un échantillon de taille n donné est comprise, avec une certaine probabilité, dans un intervalle de valeurs, ou **intervalle de fluctuation**.

Proposition 11.1 **(admise)**
Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, alors, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est environ :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

■ **Exemple 11.2** On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 100 fois successivement, et on compte le nombre de tirages "Pile".
Ce phénomène étant aléatoire, on peut s'attendre à obtenir un nombre quelconque de tirages "Pile" compris entre 0 et 100.
Néanmoins, on imagine bien que, la pièce étant équilibrée, obtenir un faible nombre (par exemple, inférieur à 10) ou un fort nombre (par exemple, supérieur à 90) de "Pile" sera rare.
L'intervalle de fluctuation permet de préciser cela.

La probabilité d'obtenir "Pile" sur un lancé est $p = 0,5$, et donc de ne pas l'obtenir : $q = 1 - p = 0,5$.
On a ici, $n = 100 \geqslant 30$ et $np = n(1-p) = 50 \geqslant 5$, et donc, d'après la propriété précédente, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\,;\, 0,5 + 1,96\frac{\sqrt{0,5\times 0,5}}{\sqrt{100}}\right]$$

$$\simeq [\,0,5 - 0,098\,;\, 0,5 + 0,098\,] = [\,0,402\,;\, 0,598\,]$$

Dans 95% des cas, la fréquence f' de "Pile" obtenue sera dans l'intervalle $[0,402\,;\,0,598]$. ■

R Il existe également l'intervalle de fluctuation au seuil de 99% :

$$\left[p - 2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\, p + 2,58\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

Proposition 11.2 Si $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut-être approximé par l'intervalle

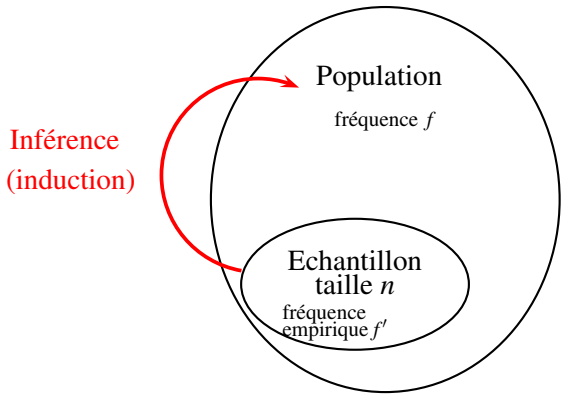
$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

11.2 Intervalle de confiance

L'estimation, ou inférence, statistique consiste à essayer de déterminer les caractéristiques d'une population en ne connaissant des informations que sur un échantillon la composant.
Un des exemples les plus médiatisés de nos jours est celui de sondage : en interrogeant un faible nombre de personnes sur leur intention de vote, on souhaite obtenir une information sur les intentions de vote de la population constituée par tous les électeurs.

R Le journaliste et statisticien américain Georges Gallup a réussi à prédire en 1936 l'élection de Franklin Roosevelt contre Alfred Landon : les instituts de sondage étaient nés.

Dans une population donnée, on connaît la fréquence f' d'un caractère d'un échantillon aléatoire de la population complète.
A partir de la connaissance de cette fréquence empirique f', on souhaite estimer la fréquence f de ce caractère dans toute la population.



Proposition 11.3 (admise)
On considère la variable aléatoire X qui à tout échantillon de taille n associe le nombre d'individus possédant le caractère étudié.
On note f' la fréquence du caractère dans l'échantillon.
Alors, pour n assez grand, l'intervalle

$$I = \left[f' - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f' + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

contient la fréquence f du caractère dans la population avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.
L'intervalle I s'appelle l'**intervalle de confiance au seuil de 95 %**.

■ **Exemple 11.3** Dans un village, lors d'un sondage effectué un mois avant le scrutin auprès de 200 personnes choisies de façon aléatoire, 109 personnes se déclarent favorables au candidat A.
La proportion d'électeurs favorables dans l'échantillon sondé est :

$$p' = \dots$$

L'intervalle de confiance au niveau de 95 % de la proportion p d'électeurs qui vont voter pour le candidat A est :

$$I =$$

On peut donc estimer, avec un niveau de confiance de 95 %, à partir du sondage effectué sur 200 personnes, que le score du candidat A aux prochaines élections sera dans la fourchette

$$[\quad ; \quad]$$

En particulier, à partir de ce sondage, le candidat A ne peut pas en conclure qu'il sera élu car, au niveau de confiance de 95 %, il n'est pas exclu que la proportion de ses électeurs soit dans l'intervalle $[47,4\,\%\,;\,50\,\%[$, et donc inférieure à 50 %. ■