Introduction aux matrices

Notes de cours

Mohamed Nassiri

Avertissement

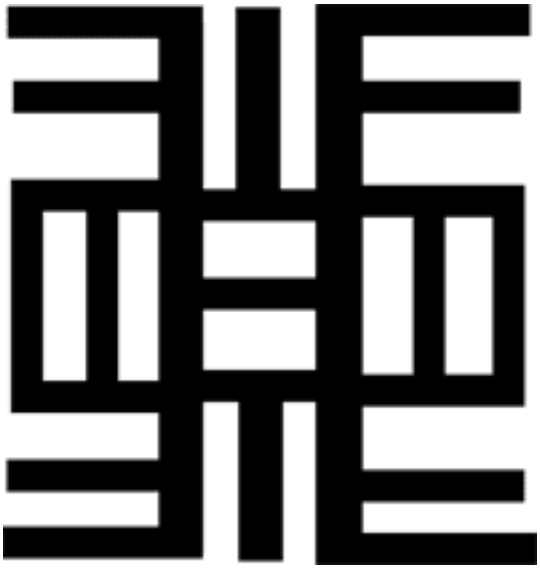
Il s'agit de notes de cours pour l'option mathématiques appliquées aux sciences sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

Copyright © 2022 Mohamed Nassiri

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Ce document est sous licence *Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)*.
Voir le Résumé Explicatif : creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr
Voir le Code Juridique : creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.fr

Dernière version, janvier 2025.



« *Nea onnim no sua a, ohu* [1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Notion de matrice et opérations

1 Notion de matrice 9

2 Opérations sur les matrices 11

2.1 Addition de deux matrices et produit d'une matrice par un réel 11

2.2 Produit de matrices 13

2.3 Inversibilité d'une matrice 15

2.3.1 Inverse d'une matrice en dimension 2 15

2.4 Déterminant d'une matrice 15

2.4.1 Cas particulier en dimension 2 15

2.4.2 Cas particulier en dimension 3 16

2.5 Ecriture matricielle d'un système linéaire 16

2.6 Application des matrices dans l'étude de suites 19

2.6.1 Suites imbriquées 19

2.6.2 Suite récurrente linéaire d'ordre 3 19

II Analyse spectrale

3 Vecteur propre et valeur propre 23

4 Espaces propres 25

5 Polynôme annulateur 27

III Diagonalisation

6 Critères de diagonalisabilité 31

7 Exemple pratique : le polynôme caractéristique 33

8 Suite de matrices $U_{n+1} = AU_n + B$ 37

Notion de matrice et opérations

1 Notion de matrice 9

2 Opérations sur les matrices 11

2.1 Addition de deux matrices et produit d'une matrice par un réel 11

2.2 Produit de matrices 13

2.3 Inversibilité d'une matrice 15

2.4 Déterminant d'une matrice 15

2.5 Ecriture matricielle d'un système linéaire 16

2.6 Application des matrices dans l'étude de suites 19

1. Notion de matrice

Soient m, n et p trois entiers non nuls.

Definition 1.1
• Une **matrice** est un tableau dont les éléments sont des nombres.
• Le **format** (ou encore la **taille**) est défini(e) par le nombre m de lignes et n de colonnes du tableau. On dit que la matrice est de format (ou de taille) $m \times n$.
• Un **terme** (ou un **élément** ou encore un **coefficient**) d'une matrice de format $m \times n$ est reperé par le numéro de la ligne et le numéro de la colonne auxquelles il appartient.

R Les éléments des matrices sont notées de la sorte

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

où $a_{i,j}$ désigne le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne.

■ **Exemple 1.1** $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \sqrt{5} \\ -1 & 5,2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice avec 2 lignes et 3 colonnes donc de taille 2×3. Par exemple, on a $a_{1,2} = 7$. ■

Definition 1.2
• Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée **matrice colonne**.
• Une matrice n'ayant qu'une ligne est appelée **matrice ligne**.
• Une matrice ayant le même nombre nombre n de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée d'ordre** n.
• Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les termes sont nuls sauf lorsque $i = j$.
• La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n.
• La **matrice nulle** de taille $m \times n$, notée $O_{m,n}$, est la matrice diagonale de taille $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls.

■ **Exemple 1.2** • $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 6,2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

• $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ désignent respectivement la matrice identité et la matrice nulle d'ordre 3. ■

R Une matrice diagonale est souvent notée ainsi :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1;\ldots;d_n)$$

• Lorsque la matrice nulle est carrée (d'ordre n), on la note O_n.

Definition 1.3

• Deux matrices A et B de tailles $m \times n$ sont **égales** lorsque, pour tous $i \in \{1;\ldots;m\}$ et $j \in \{1;\ldots;n\}$, on a $a_{i,j} = b_{i,j}$.

• Si $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **transposée** de A la matrice $A^T = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

• On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $A^T = A$. Elle est dite antisymétrique si $A^T = -A$.

■ **Exemple 1.3** La matrice $\begin{pmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -7 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique. ■

R Afin de mieux identifier une matrice symétrique, il suffit de visualiser la diagonale de la matrice comme une « axe de symétrie » comme suit :

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & 2 \\ -7 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Proposition 1.1 On a les formules :

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

Proposition 1.2 $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{S}_n$), l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{A}_n$), l'ensemble des matrices antisymétriques sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1.3 1) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$

2) On pose E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1. Alors

$((E_{ii})_{1\leq i\leq n}, (E_{ij}+E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathscr{S}_n$

$((E_{ij}-E_{ji})_{1\leq i<j\leq n})$ est une base de $\mathscr{A}_n$

Par conséquent, $\dim(\mathscr{S}_n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices et produit d'une matrice par un réel

Definition 2.1 Soient A et B deux matrices de tailles $m \times n$.
• La **somme des matrices A et B**, notée $A+B$, est la matrice C de taille $m \times n$ dont les éléments sont définis pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ par $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ $(i.e)$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i,1} & \dots & b_{i,j} & \dots & b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,j} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,j}+b_{1,j} & \dots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & \dots & a_{i,j}+b_{i,j} & \dots & a_{i,n}+b_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}+b_{m,1} & \dots & a_{m,j}+b_{m,j} & \dots & a_{m,n}+b_{m,n} \end{pmatrix}$$

• Le **produit d'une matrice A par un réel λ**, notée λA, est la matrice M de taille $m \times n$ dont les éléments sont définis pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ par $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$ $(i.e)$

$$M = \lambda A = \lambda \times \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,j} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i,1} & \dots & \lambda a_{i,j} & \dots & \lambda a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,j} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

R Autrement dit :
• L'addition de deux matrices de même format se fait en additionnant les éléments situés « au même endroit » dans chaque matrice.
• Le produit d'une matrice A par un réel λ s'obtient en multipliant tous les éléments de la matrice A par λ.

R Pour additionner deux matrices, il faut absolument que celles-ci soient de même format !

Proposition 2.1 Soient A, B et C trois matrices de même tailles $m \times n$ et α et β deux réels.
- $A+B=B+A$ (**commutativité de la somme de matrices**)
- $A+(B+C)=(A+B)+C$ (**associativité de la somme de matrices**)
- $1\times A = A\times 1 = A$
- $0\times A = A\times 0 = O_{m,n}$
- $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

R Toutes ces propriétés découlent directement des propriétés de commutativité et d'associativité des nombres réels.

Démonstration. Preuve laissée pour le·a lecteur·trice. ■

R Nous avons bien écrit

$$0\times A = A\times 0 = O_{m,n}$$

Il est important de ne pas confondre $O_{m,n}$ et le 0 des réels, et donc,

$$0\times A = A\times 0 \neq 0$$

Definition 2.2
- On appelle **opposé** de A la matrice $M=(-1)A$, notée $-A$, telle que pour tous $i\in\{1;\dots;m\}$ et $j\in\{1;\dots;n\}$, on a $m_{i,j}=-a_{i,j}$.

De plus, on note $A-B$ la matrice $A+(-B)$.

■ **Exemple 2.1** Soient $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -7 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

- $A+B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 2\\ -7 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+6 & -3+2\\ 3+(-7) & 1+0\\ 5+2 & 3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -1\\ -4 & 1\\ 7 & 6\end{pmatrix}$
- $A-B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 2\\ -7 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & -3-2\\ 3-(-7) & 1-0\\ 5-2 & 3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 10 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$
- $4A=4\times\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times 2 & 4\times(-3)\\ 4\times 3 & 4\times 1\\ 4\times 5 & 4\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -12\\ 12 & 4\\ 20 & 12\end{pmatrix}$
- $$\begin{aligned}2A-3B &= 2\times\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}-3\times\begin{pmatrix}6 & 2\\ -7 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 2 & 2\times(-3)\\ 2\times 3 & 2\times 1\\ 2\times 5 & 2\times 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(-3)\times 6 & (-3)\times 2\\ (-3)\times(-7) & (-3)\times 0\\ (-3)\times 2 & (-3)\times 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4 & -6\\ 6 & 2\\ 10 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18 & -6\\ 21 & 0\\ -6 & -9\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4-18 & -6-6\\ 6+21 & 2+0\\ 10-6 & 6-9\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-14 & -12\\ 27 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

2.2 Produit de matrices

Definition 2.3

Soient $L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n} \end{pmatrix}$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $C = \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n \times 1$. Alors le produit $L \times C$ est le nombre réel défini par :

$$L \times C = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} & \dots & l_{1,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ c_{2,1} \\ \vdots \\ c_{n,1} \end{pmatrix} = l_{1,1} \times c_{1,1} + l_{1,2} \times c_{2,1} + \dots + l_{1,n} \times c_{n,1}$$

R Pour que le produit $L \times C$ soit défini, L doit avoir autant de colonnes que C a de lignes.

Definition 2.4

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$, le **produit des matrices A et B**, noté $A \times B$ ou encore AB, **dans cet ordre** est la matrice C à m lignes et p colonnes telle que pour tous $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Autrement dit, l'élément $c_{i,j}$ est le produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

R Lorsque les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont définis, on a en général $A \times B \neq B \times A$! Voici un exemple :
Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 2.2** Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ trois matrices.

- On ne peut pas calculer $A \times B$ car A possède 3 colonnes et B possède 2 lignes.
- On peut calculer $A \times C$ car A possède 3 colonnes et C possède 3 lignes :

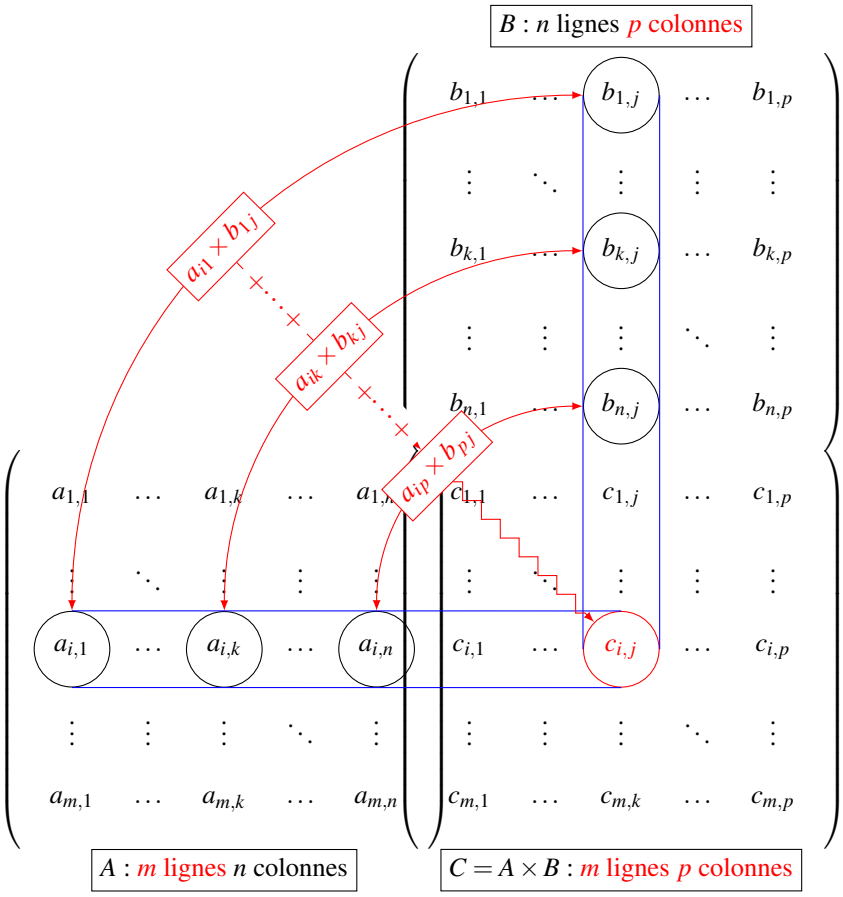
$$A \times C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 8 \end{pmatrix}$$

- On peut calculer $B \times C$ car B possède 3 colonnes et C possède 3 lignes :

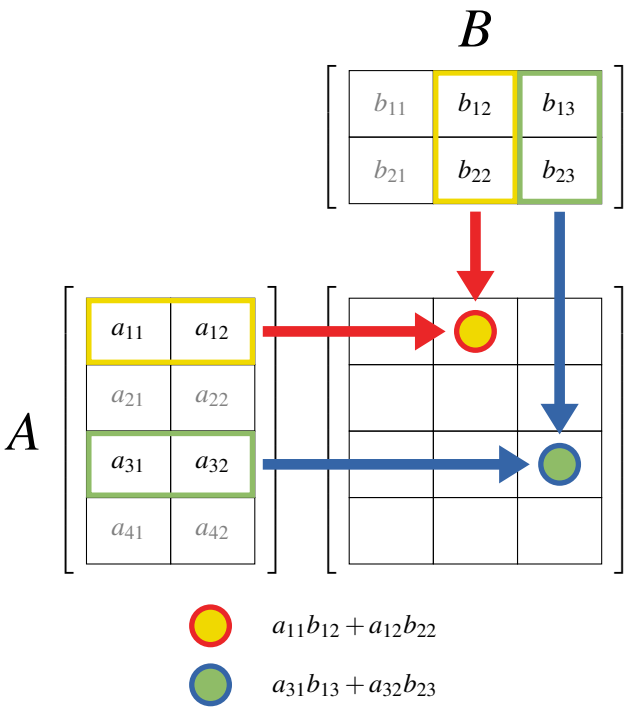
$$B \times C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 8 \\ 39 & 59 \end{pmatrix}$$

■

R Pour mieux visualiser le produit de deux matrices, on peut s'aider du schéma suivant :



R • Pour déterminer le produit de deux matrices, il faut vérifier que la deuxième matrice a autant de lignes que la première a de colonnes.
• On peut placer les matrices ainsi pour facilier le produit :



2.3 Inversibilité d'une matrice

Definition 2.5
• Une matrice carrée A de taille n est dite **inversible**, s'il existe une matrice carrée B de taille n telle que $AB = BA = I_n$.
• Lorsque la matrice A est inversible, la matrice B est unique.
• La matrice B est notée A^{-1} et s'appelle la **matrice inverse** de A.

■ **Exemple 2.3** La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ car

$$A \times B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

2.3.1 Inverse d'une matrice en dimension 2

Proposition 2.2 Une matrice carrée est inversible si, et seulement si, son déterminant est non nul. En particulier, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.4 Déterminant d'une matrice

Definition 2.6 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(K)$. On définit, par récurrence, une application $\det : \mathscr{M}_n(K) \to K$ de la manière suivante :
• Si $n = 1$, (i.e.) $A = (a)$, on pose $\det(A) = a$;
• Si $n > 1$, notons A_{ij} la matrice obtenue en supprimant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne, on pose alors (puisque $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n-1}(K)$) :

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) + \ldots + (-1)^{k+1} a_{1k}\det(A_{1k}) + (-1)^{n+1} a_{1n}\det(A_{1n})$$

Le scalaire $\det(A)$ est dit <u>déterminant de A</u> et on note

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 2.4** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ■

2.4.1 Cas particulier en dimension 2

Definition 2.7
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le **déterminant** de A est le réel, noté $\det(A)$, défini par

$$\det(A) = ad - bc$$

2.4.2 Cas particulier en dimension 3

■ **Exemple 2.5 — Exemple de calcul du déterminant d'une matrice** 3×3. On veut calculer le déterminant de cette matrice :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

première méthode : on choisit une ligne ou une colonne de la matrice et on multiplie chaque coefficient de cette ligne (ou colonne) par le déterminant de la matrice obtenu en rayant la colonne et la ligne de ce coefficient (la matrice obtenue est une matrice 2×2) chaque résultat obtenu doit être multiplié de plus par -1 dans le cas ou sa colonne L et sa ligne C sont telles que $L+C$ est impaire. On ajoute ensuite les 3 résultats. on peut procéder par exemple de cette façon

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -1(2\times 10 - 3\times 8) - 2(1\times 10 - 3\times(-2)) + 5(1\times 8 - 2\times(-2)) \\
&= -1(-4) - 2(16) + 5(12) = 4 - 32 + 60 = 32
\end{aligned}$$

ou bien de cette façon :

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -2(1\times 10 - 3\times(-2)) - 2(-1\times 10 - 5\times(-2)) - 8(-1\times 3 - 5\times 1) \\
&= -2(16) + 0 - 8(-8) = -32 + 64 = 32
\end{aligned}$$

■

2.5 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Definition 2.8 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres réels inconnus.
Pour i et j deux entiers allant de 1 à n, on note $a_{i,j}$ des nombres réels fixés.
Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$, n nombres réels fixés.
On appelle **système linéaire** $(\mathscr{S})$ de n équations à n inconnues, le système d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suivant :

$$(\mathscr{S})\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

■ **Exemple 2.6** On considère le système

$$(\mathscr{S})\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 & = 1 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{array}{lll} a_{1,1} = 1; & a_{1,2} = 1; & a_{1,3} = -1 \\ a_{2,1} = -1; & a_{2,2} = 2; & a_{2,3} = 1 \\ a_{3,1} = 2; & a_{3,2} = 1; & a_{3,3} = -1 \\ b_1 = 1; & b_2 = 0; & b_3 = 1 \end{array}$$

■

R Dans le cas de petits systèmes, on n'utilise plutôt les lettres x, y, z et t au lieu de x_1, x_2, x_3 et x_4.

Definition 2.9 On dit qu'une matrice est <u>échelonnée</u> si les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.

Proposition 2.3

• Le système $\mathscr{S}$ de la définition précédente sous la forme matricielle

$$AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; et \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

• Si la matrice A est inversible, les solutions du système s'obtiennent en calculant les éléments de X :

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B$$

■ **Exemple 2.7** On va résoudre le système

$$(\mathscr{S}) \begin{cases} x+y-z & = 1 \\ -x+2y+z & = 0 \\ 2x+y-z & = 1 \end{cases}$$

Le système $\mathscr{S}$ s'écrit sous la forme matricielle

$$AX = B$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; et \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A l'aide de la calculatrice (on explique la démarche juste après), on calcule la matrice inverse A^{-1}, et on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Les solutions du système s'obtiennent en calculant les éléments de X :

$$\begin{aligned} AX = B \;&\Leftrightarrow\; X = A^{-1}B \\ &\Leftrightarrow\; X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow\; X = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> La solution du système $\mathscr{S}$ est $(x;y;z) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{-2}{3}\right)$ ■

Exercice 2.1

Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y & = & 2 \\ 2x+3y & = & -1 \end{array}\right.$.

1. Exprimer le système (S) sous la forme $AX = B$ où X et B sont des matrices colonnes.

2. Déterminer la solution du système (S).

Exercice 2.2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice inverse de A.

2. En déduire la résolution des systèmes suivants :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 1 \\ -11x+7y & = & -1 \end{array}\right. . \quad (S) : \left\{\begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 23 \\ -11x+7y & = & -51 \end{array}\right. .$$

Exercice 2.3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 2 \\ 2y+3z & = & 3 \\ x+2y+3z & = & 5 \end{array}\right.$.

1. Vérifier que la matrice A' est l'inverse de la matrice A.

2. Exprimer le système (S) sous la forme $AX = B$ où X et B sont des matrices colonnes.

3. En déduire la solution du système (S).

Exercice 2.4

Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants avec la calculatrice ou un logiciel de calcul formel :

1. $\left\{\begin{array}{r} 3x-3y-2z=0 \\ 3x+y+z=-2 \\ -2x+3y+2y=-1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+z=-8 \\ -3x+2y-3z=3 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{r} -x-3y-2z=-1 \\ -3x-2y+2z=0 \\ 3x+3y-z=-1 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{r} -2x-3y-2z=2 \\ -3x-3y+2z=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{array}\right.$

Exercice 2.5

Déterminer, si c'est possible, deux réels a et b vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Exercice 2.6

Déterminer, si c'est possible, trois réels a, b et c vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

2.6 Application des matrices dans l'étude de suites

2.6.1 Suites imbriquées

Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -5u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 6u_n - 2v_n \end{cases}$$

Posons maintenant, pour $n \in \mathbb{N}, \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Ainsi, on a $\mathrm{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

On démontre ensuite, par une récurrence immédiate, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{X}_0$$

Cette relation nous permet alors de déterminer le terme général de (u_n) (première ligne de la matrice X_n) et celui de (v_n) (deuxième ligne de X_n), à condition d'avoir calculé A^n !

2.6.2 Suite récurrente linéaire d'ordre 3

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

Posons également, pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Ainsi, on a $\mathrm{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{U}_n$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Par la même récurrence immédiate, on peut établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{U}_n = \mathrm{A}^n \mathrm{U}_0$$

Là encore, le seul enjeu réside donc dans le calcul de A^n afin d'obtenir U_n dont la première ligne est u_n.

II Analyse spectrale

3 Vecteur propre et valeur propre 23

4 Espaces propres 25

5 Polynôme annulateur 27

3. Vecteur propre et valeur propre

Definition 3.1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Un vecteur colonne X non nul est appelé vecteur propre pour la matrice A associé à la valeur propre λ si on a $AX = \lambda X$.
L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

Exemple 3.1

- Tout vecteur colonne non nul de taille n est vecteur propre pour la matrice identité de taille n pour la valeur propre 1.
- Tout vecteur colonne non nul de taille n est vecteur propre pour la matrice nulle de taille n pour la valeur propre 0.
- Si $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale alors tout vecteur colonne élémentaire E_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i.
- La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de valeur propre réelle.

■

Proposition 3.1 Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle n'admet pas 0 comme valeur propre.

Preuve. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son noyau est nul, c'est-à-dire s'il n'existe aucun vecteur colonne X non nul tel que $AX = 0$, ce qui revient au fait que 0 n'est pas valeur propre. ■

Proposition 3.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Une matrice carrée A de taille n admet la valeur propre λ si et seulement si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Preuve. Pour tout vecteur colonne X, on a les équivalences $AX = \lambda \cdot X \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I)X = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda \cdot I_n)$, donc λ est valeur propre si et seulement si le noyau de $(A - \lambda \cdot I)$ est non nul, c'est-à-dire si $A - \lambda \cdot I$ n'est pas inversible. La forme de certaines matrices donne aussi certains résultats. ■

Proposition 3.3 Les valeurs propres d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) sont les coefficients diagonaux de la matrice.

Preuve. Soit T une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux s'écrivent $a_1, \ldots, a_n$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $T - \lambda \cdot I_n$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux s'écrivent $a_1 -$

$\lambda, \ldots, a_n - \lambda$, et la matrice $T - \lambda \cdot I_n$ n'est pas inversible si et seulement si l'un de ces coefficients est nul. ■

Proposition 3.4 Une matrice a les mêmes valeurs propres que sa transposée.

Preuve. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda \cdot I_n$ non inversible $\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I_n)^{\mathrm{T}}$ non inversible $\Leftrightarrow A^{\mathrm{T}} - \lambda \cdot I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}\left(A^{\mathrm{T}}\right)$. ■

Proposition 3.5 Deux matrices semblables ont le même spectre.

Preuve. Soient A et B deux matrices semblables. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow A - \lambda \cdot I_n$ non inversible $\Leftrightarrow P^{-1}(A - \lambda \cdot I_n)P$ non inversible $\Leftrightarrow P^{-1}AP - \lambda \cdot I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ ■

Proposition 3.6 PropriétéDes vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes pour une même matrice ou un même endomorphisme sont linéairement indépendants.

Proposition 3.7 — Corollaire. Une matrice de taille n ou un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension n ne peut admettre que n valeurs propres distinctes au plus.

4. Espaces propres

Definition 4.1 Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, l'espace propre associé à la valeur propre λ pour A est le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id})$.

Proposition 4.1 L'ensemble des vecteurs non nuls de $\mathrm{E}_\lambda(A)$ est l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ.

Proposition 4.2 Les espaces propres d'une matrice et de sa transposée associés à la même valeur propre ont la même dimension.

Preuve. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On a les égalités
$\dim(\mathrm{E}_\lambda(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_n) = n - \mathrm{rg}\left((A - \lambda \cdot I_n)^{\mathrm{T}}\right)$
$= n - \mathrm{rg}\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda \cdot I_n\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(A^{\mathrm{T}} - \lambda \cdot I_n\right)\right) = \dim\left(\mathrm{E}_\lambda\left(A^{\mathrm{T}}\right)\right)$ ■

Proposition 4.3 Les sous-espaces propres sont en somme directe.

Preuve. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres de A, on note $E_1, \ldots, E_k$ les sousespaces propres associés. Soit $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ et $(y_1, \ldots, y_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} y_i$. On trouve alors $\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i) = 0$ avec pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $x_i - y_i \in E_i$. Si certains vecteurs de la forme $(x_i - y_i)$ sont non nuls, la relation $\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i) = 0$ implique qu'ils forment une famille liée, ce qui contredit l'indépendance linéaire. ■

Proposition 4.4 Les espaces propres associés à la même valeur propre pour deux matrices semblables ont la même dimension.

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On a les égalités
$\dim(E_\lambda(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I_n)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda \cdot I_n)$
$= n - \mathrm{rg}\left(P^{-1}(A - \lambda \cdot I_n)P\right) = n - \mathrm{rg}\left(P^{-1}AP - \lambda \cdot I_n\right) = \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda \cdot I_n)) = \dim(E_\lambda(B))$ ■

Proposition 4.5 Soit D une matrice diagonale et soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(D)$. La dimension de l'espace propre $\mathrm{E}_\lambda(D)$ est le nombre de coefficients diagonaux de valeur λ.

5. Polynôme annulateur

Definition 5.1 Soit A une matrice carrée ou un endomorphisme.

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ un polynôme non nul.

On dit que P est un polynôme annulateur pour A si on a $\sum_{k=0}^{d} a_k A^k = 0$.

Proposition 5.1 Toute valeur propre est racine des polynômes annulateurs.

Proposition 5.2 Les seules valeurs propres possibles d'une projection sont les réels 0 et 1 . Les seules valeurs propres possibles d'une symétrie sont les réels -1 et 1 .

Exercice 5.1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 + A$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}. ■

Exercice 5.2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 3A$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}. ■

Exercice 5.3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $2A - A^2 = I$.

2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}. ■

Exercice 5.4

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, en déduire l'inverse de la matrice A.

2. Calculer A^3 et A^4. Quel est l'inverse de la matrice A^2 ?

Exercice 5.5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3.

2. Vérifier que $A^4 = I_2$.

3. Déduire de la question précédente l'inverse de la matrice A.

4. On pose $B = A^2$. Démontrer, sans calculer l'inverse de B, que $B^{-1} = B$.

Exercice 5.6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$A^2 = \alpha \times A + \beta \times I_3$$

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.

3. Déterminer l'expression de A^{-1}.

III Diagonalisation

6 Critères de diagonalisabilité 31

7 Exemple pratique : le polynôme caractéristique 33

8 Suite de matrices $U_{n+1} = AU_n + B$ 37

6. Critères de diagonalisabilité

Definition 6.1 Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

R En particulier, toute matrice diagonale est diagonalisable.

Proposition 6.1 Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si son application associée est diagonalisable, c'est-à-dire si l'un des critères équivalents ci-dessous est vérifié.
1. Il existe une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres pour A.
2. La somme des espaces propres de A engendre $\mathbb{R}^n$.
3. La somme des dimensions des espaces propres de A vaut n.

Preuve. On montre l'équivalence par double implication.
Toutes les matrices représentatives de l'application associée étant semblables, si l'une d'elle est diagonale, la matrice A est diagonalisable.
Réciproquement, si A est diagonalisable, il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}AP$ donc en notant $\mathscr{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ définie par les vecteurs colonnes de P, la matrice D représente l'application associée à A dans la base $\mathscr{B}$, donc l'application associée est diagonalisable.
Tous les critères équivalents ont été démontrés dans la partie précédente. ■

Proposition 6.2 Une matrice de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

R La réciproque est fausse : la matrice identité n'a qu'une seule valeur propre mais elle est diagonalisable car diagonale.

Proposition 6.3 Une matrice est diagonalisable si et seulement si sa transposée est diagonalisable.

Preuve. Soit A une matrice diagonalisable.
Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = D$, donc $P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}} = D$ avec $\left(\left(P^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = P^{\mathrm{T}}$, donc A^{T} est diagonalisable.
La réciproque s'en déduit du fait que chaque matrice est la transposée de sa transposée. ■

Proposition 6.4 Deux matrices diagonalisables sont semblables si et seulement si elles ont le même spectre et si les espaces propres associés à une même valeur propre ont la même dimension.

Preuve. L'implication directe est déjà démontrée. Soit A et B deux matrices diagonalisables avec le même spectre et les mêmes dimensions d'espaces propres. Il existe deux matrices diagonales D et

Δ telles que A soit semblable à D et B soit semblable à Δ. Mais chaque valeur propre apparait autant de fois sur la diagonale de D et de Δ que la dimension commune du sous-espace propre associé. Les deux matrices diagonales ont donc les mêmes coefficients diagonaux dans un ordre éventuellement différent et sont donc semblables (à l'aide de matrices de permutation). Par transitivité, on obtient que A est semblable à B. ■

Exercice 6.1

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit $D = P^{-1}MP$, calculer D et D^2.
3. Vérifier que $M^2 = PD^2P^{-1}$.
4. On admet que pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Calculer M^5. ■

Exercice 6.2

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux rééels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$. ■

Exercice 6.3

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2, D^3 et D^4.
4. Calculer A^2, A^3 et A^4. ■

Exercice 6.4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice A^3.
4.a. Développer le produit $(A - I_3) \times \left(A^2 + AI_3 + {I_3}^2\right)$.
4.b. En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$ ■

7. Exemple pratique : le polynôme caractéristique

Definition 7.1 Soit A une matrice carrée de taille n. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A).$$

R Le polynôme caractéristique ...caractérise les valeurs propres d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

■ **Exemple 7.1** Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)\left(X^2-6X+8\right) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

■

Proposition 7.1 Un nombre réel ou complexe λ est une valeur propre de A si et seulement si c'est une racine de son polynôme caractéristique.

R Ainsi, lorsqu'on cherche à diagonaliser ou trigonaliser une matrice, on commence souvent par calculer son polynôme caractéristique que l'on factorise afin d'obtenir les valeurs propres de la matrice.

■ **Exemple 7.2**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Corrigé
Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(X) = (X-1)(X-2)(X+4).$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1 , on pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on résout

$$\begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 3x-3y=0 \\ -2x+2y=0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x=y=z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à diag $(1,2,-4)$, la matrice de passage étant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X-1$ et finalement on trouve

$$\chi_B(X) = (X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant, avec les mêmes notations, $Bu = u$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x+3y+2z=0 \\ -2x+4y+2z=0 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x=y=-z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \end{cases}$$

Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z=0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le souespace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,2,2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

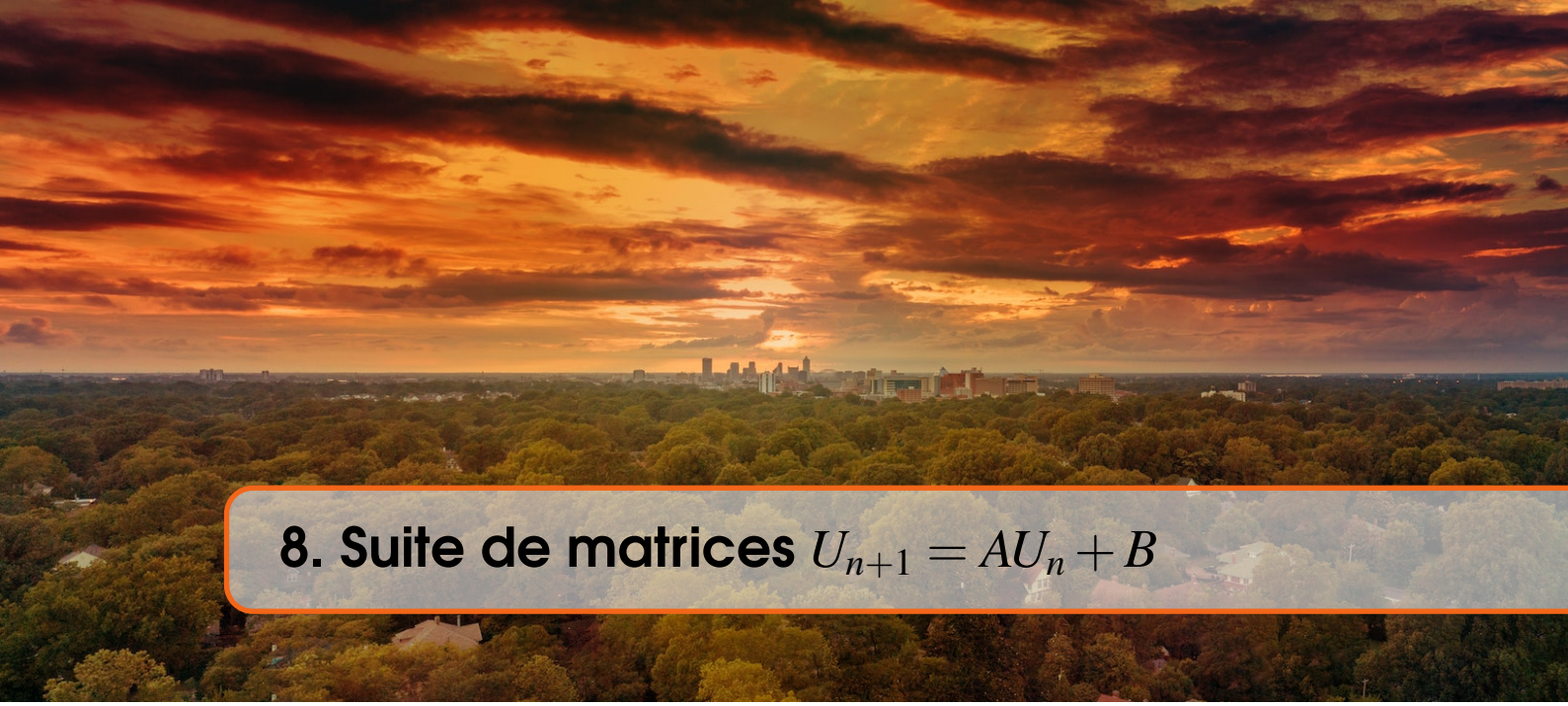
Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = -(1-X)^2(2-X)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1, u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1 , avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0,0,1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

■



8. Suite de matrices $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice 8.1

Une suite de matrices colonnes (U_n) de format $(2,1)$ est définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que la matrice $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

2. On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer AR et RA en fonction de R, puis AS et SA en fonction de S.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = (-1)^n R + 2^n S$

3. Déterminer une formule explicite exprimant U_n en fonction de n. ■

Exercice 8.2

Une suite de matrices lignes (V_n) de format $(1,3)$ est définie par son premier terme $V_0 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $V_{n+1} = V_n A + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice $I - A$ est inversible en déterminant son inverse à la calculatrice.

2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une formule explicite exprimant V_n en fonction de n. ■

Exercice 8.3

Une suite de matrices colonnes (U_n) de format $(3,1)$ est définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la relati on de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice $I - A$ est inversible en déterminant son inverse à la calculatrice.

2. On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que M est inversible en déterminant M^{-1} à la calculatrice.
b. Prouver que $A = MDM^{-1}$.
c. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = MD^nM^{-1}$.
d. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une formule explicite exprimant U_n en fonction de n.