Coquillages & Poincaré

Étude des croissances exponentielles

NASSIRI Mohamed

Étude des croissances exponentielles

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

- Utiliser les fonctions exponentielles.
- Déterminer le sens de variation des suites géométriques et des fonctions exponentielles.

Mots – clefs :

Croissance exponentielle - Fonction exponentielle (de base q) - Racine n-ième

Prérequis :

Fonctions - Variations de fonctions - Puissances - Taux d'évolutions

𝄞 *La musique du chapitre : Naive New Beaters - Heal Tomorrow - ft. Izia. Album : A La folie - Date de sortie : 2016.*

Dans ce chapitre, nous allons explorer le concept de croissance exponentielle, qui se manifeste lorsqu'une quantité augmente de manière proportionnelle à sa propre valeur, ce qui mène à des augmentations rapides sur le long terme.

Nous allons également étudier la fonction exponentielle, notée souvent $f(x) = q^x$, où q est la base de l'exponentielle. Cette fonction joue un rôle fondamental dans la modélisation de phénomènes comme la croissance des populations ou l'évolution de certains processus naturels.

Enfin, nous aborderons la racine n-ième, un outil mathématique utile pour inverser les puissances, notamment dans le cadre des calculs liés aux croissances exponentielles.

Ce chapitre vous permettra de mieux comprendre ces notions et de les appliquer à des situations concrètes.

« En mathématiques, évident est le mot le plus dangereux. »

Eric Temple Bell

Sources & liens :

◦ Manuel scolaire lelivresolaire.fr
◦ Chaîne Youtube Les Bons Profs
◦ Chaîne Youtube m@ths et tiques

Exercice - Echauffement

1. Soit n un nombre entier relatif. Simplifier les écritures suivantes :

a) $2^{-3} = \dots$ b) $5^{-3} \times 5^5$ c) $3^2 \times \dfrac{3^8}{3^3}$ d) $(10^6)^2 \times (10^{-3})^5$ e) $2^{2n} \times 2$ f) $2^{3n+1} \times 2^{-n+1}$

g) $\dfrac{2^{3n+1}}{2^{2n+1}}$ h) $(2^{n+1})^3 \times 2^{-1}$ i) $\dfrac{4^{n+2}}{2^{2n}} \times \frac{1}{8}$ j) $\dfrac{2^{n+3}}{4^{-n}} \times 2^{-n}$ k) $3^{2n}(3^{-2n} + 3^{-n})$

2. Factoriser : $A = 2^5 - 2^3$ $B = 2^{n+2} + 2^n$ $C = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ $D = 2^{2n} - 2^{n+1}$

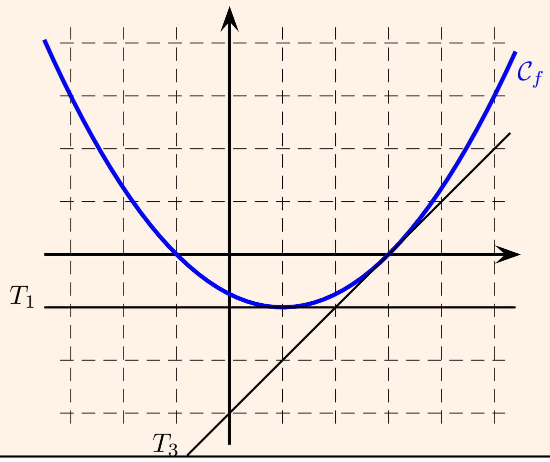
Exercice - Echauffement

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives 1 et 3.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(3)$ puis $f'(1)$ et $f'(3)$.

2. Rappeler l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Donner les équations de T_1 et T_3.



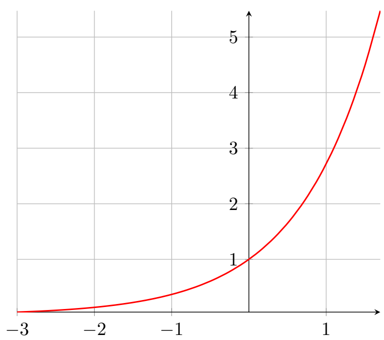
1 Fonction exponentielle de base e

Définition 1

La **fonction exponentielle de base** e *est l'unique fonction définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *solution de l'équation* $f' = f$ *et telle que* $f(0) = 1$.

On la note $x \mapsto \exp(x) = e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$



Propriétés 2 *Ce sont les règles usuelles de calcul sur les puissances :*

$$e^0 = 1 \ , \ e^1 = e \simeq 2,718$$

$$e^{a+b} = e^a\, e^b \ , \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \ , \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \ , \quad (e^a)^b = e^{a\,b}$$

> **Exercice**
>
> 1. Simplifier les expressions : a) $e^5 \times e^3 \times e^{-4}$ b) $\dfrac{e^7}{e^{-2}} \times \dfrac{e^3}{e^{10}}$ c) $(e^x)^5 e^{-2x}$
> d) $\dfrac{e^{2x+3}}{e^{2x-1}}$ e) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$ f) $(e^{x+1})^3 \times e^{-1}$ g) $\dfrac{e^{x+3}}{e^{-x}} \times e^{-x}$ h) $e^{2x}(e^{-2x} + e^{-x})$
> 2. Développer : $A = (e^2 + e^6)(e^{-1} + e)$ $B = (1 + e^x)^2$ $C = (3 - e^x)(3 + e^x)$
> 3. Factoriser : $A = e^5 - e^3$ $B = e^{x+2} + e^x$ $C = e^{x+3} + e^{x+2} + e^{x+1} + e^x$ $D = e^{2x} - e^{x+1}$ $E = 4 - e^{2x}$

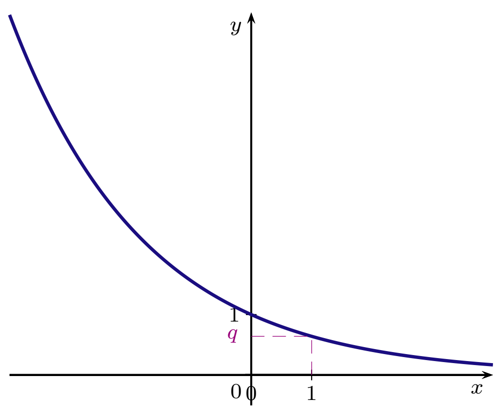
> **Exercice**
>
> Démontrer que pour tout réel x, a) $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} = e^x \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-x}}$.
> b) $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = 4$ c) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ d) $e^{-x} - e^{-2x} = \dfrac{e^x - 1}{e^{2x}}$

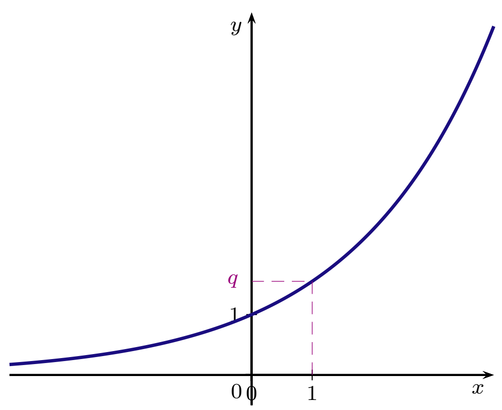
2 Fonction exponentielle de base q, avec $q>0$

Définition 3 *Soit q un réel strictement positif. La* **<u>fonction exponentielle de base q</u>** *est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel q^x (i.e)*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto q^x \end{cases}$$

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.





Proposition 4

— *Pour tous réels x et y, $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ et $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$.*
— *Pour tout réel x, $q^x > 0$.*
— *Pour tout réel x, $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$, et en particulier $q^{0,5} = \sqrt{q}$.*
— *Pour tout réel x et tout entier relatif m, $(q^x)^m = q^{mx}$.*

Propriétés 5 *Une fonction exponentielle f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=q^x$ avec $q>0$ est :*
- *strictement croissante sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $q>1$;*
- *strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $0<q<1$;*
- *constante sur $[0;+\infty[$ si, et seulement si, $q=1$.*

3 Cas particulier de la puissance $\dfrac{1}{n}$

Définition 6 *Soit a et x deux nombres réels strictement positifs et n un nombre entier non nul. L'équation $x^n=a$ admet comme unique solution positive le réel $x=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ appelé racine n-ième de a.*

Propriétés 7 *Si une grandeur subit une évolution de taux t, alors elle atteint la même valeur en subissant n évolutions successives de même taux $(1+t)^{\frac{1}{n}}$ où n est un entier naturel non nul.*

Définition 8 *Le nombre $(1+t)^{\frac{1}{n}}-1$ est appelé taux moyen des n évolutions successives de taux global t.*

Exemple pratique

D'après l'association 60 Millions de consommateurs, le prix des pâtes a augmenté d'environ $11,4$ % entre février 2021 et février 2022.

$$t_{\text{moyen}}=\left(1+\frac{11,4}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\approx 0,00904\approx 0,904\%$$

En moyenne, entre février 2021 et février 2022, le prix des pâtes a augmenté de $0,904\%$ par mois.

Exemple pratique

Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans.
Soit t % le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{15}=0,7 \quad &\iff \quad 1+\frac{t}{100}=0,7^{\frac{1}{15}}\\ &\iff \quad \frac{t}{100}=0,7^{\frac{1}{15}}-1\\ \text{Soit} \quad &\quad \frac{t}{100}\approx -0,0235\end{aligned}$$

Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

Exercice

Les données ci-dessous sont les valeurs du SMIC mensuel brut en euro.

Date	Valeur du SMIC	Augmentation en %
1$^{\text{er}}$ janvier 2015	1457,52	
1$^{\text{er}}$ janvier 2016	1466,62	0,62
1$^{\text{er}}$ janvier 2017	1480,27	0,93
1$^{\text{er}}$ janvier 2018	1498,47	1,23
1$^{\text{er}}$ janvier 2019	1521,22	1,52
1$^{\text{er}}$ janvier 2022	1539,42	1,20
1$^{\text{er}}$ janvier 2021	1554,58	0,98

1. Quel est le coefficient multiplicateur associé à l'évolution du SMIC du 1$^{\text{er}}$ janvier 2015 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2021 ?
2. Déterminer le taux d'augmentation annuel moyen du SMIC, arrondi à $0,001\%$, sur la période courant du 1$^{\text{er}}$ janvier 2015 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2021.

4 Ouverture

Question ouverte : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on s'intéresse (sur $\mathbb{R}_+$ pour faciliter le problème) à la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

Existe-t-il une fonction réciproque à f ? C'est-à-dire qui vérifie le schéma suivant :

$$x \xrightarrow{\text{fonction } f} x^n \xrightarrow{\text{fonction mystère}} ??? = x$$

Culture scientifique : Nous avons parlé de « *croissance exponentielle* ». Pour rappel, on définit la « *fonction exponentielle* » ainsi

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \exp(x) \end{cases}$$

Cette fonction est très utilisée et apparaît naturellement dans de nombreux phénomènes.
Comme pour certaines fonctions vues dans ce chapitre, la fonction exponentielle possède une fonction réciproque tout aussi célèbre qu'elle : la *fonction logarithme népérien* que l'on définit ainsi

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

Les deux fonctions vérifient le schéma suivant :

$$x \xrightarrow{\text{fonction exponentielle}} \exp(x) \xrightarrow{\text{fonction logarithme népérien}} \ln(\exp(x)) = x$$