Coquillages & Poincaré

Étude des fonctions affines

NASSIRI Mohamed

Étude des fonctions affines

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

• Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une fonction affine.
• Interpréter le coefficient directeur d'une fonction affine comme un taux d'accroissement.
• Déterminer la pente d'une droite donnée graphiquement.
• Déterminer le signe et les variations d'une fonction affine.

Mots – clefs :

Fonction affine - Coefficient directeur - Taux d'accroissement - Pente d'une droite - Variations - Signe - Tableau de signe

Prérequis :

Résolution graphique d'équations et d'inéquations - Calcul litteral - Résolution algébrique - Forme factorisée, développée ou réduite

𝄞 *La musique du chapitre : Ennio Morricone - L'extase de l'or. Album : The Good the Bad and the Ugly - Date de sortie : 1966.*

Nous avons vu les fonctions d'un point de vue général avec les notions d'images, d'antécédents et de résolutions graphiques d'équations et d'inéquations.

Dans ce chapitre, nous allons nous attarder sur les *fonctions affines*. Leur expression font apparaître les notions de *coefficient directeur* (ou encore *pente*) et d'*ordonnée à l'origine*.

D'apparences simples (elles sont représentées graphiquement par des droites), elles nous permettrons, à travers l'étude de leur signe, de résoudre algébriquement des inéquations produit et des inéquations quotient.

« - Dieu crée les dinosaures. Dieu détruit les dinosaures. Dieu crée l'homme. L'homme détruit Dieu. L'homme crée les dinosaures…
- Les dinosaures mangent l'homme. Et la femme hérite de la Terre. »

Ian Malcolm et Ellie Sattler, Jurassic Park, 1993.

Sources & liens :
◦ Manuel scolaire lelivresolaire.fr
◦ Manuel scolaire *Math'x* 2^{de} *Nouveau programme*, Editions didier, 2019.
◦ Chaîne Youtube Les Bons Profs
◦ Chaîne Youtube m@ths et tiques

---

1 Caractérisation des fonctions affines

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 • *Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite* **affine** *lorsqu'il existe deux réels m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.*
• *m s'appelle le* **coefficient directeur** *(ou* **la pente***).*
• *p s'appelle l'***ordonnée à l'origine***.*

Exemples

• Les fonctions suivantes sont affines :

a. $f(x) = 3x + 2$ **b.** $f(x) = 7x - 4$ **c.** $f(x) = \frac{4}{3}x + 2020$

• Les fonctions suivantes ne sont pas affines :

a. $f(x) = 5x^2 + 2$ **b.** $f(x) = 3\sqrt{x} - 12$ **c.** $f(x) = \frac{7}{x} + 300$

Remarque

• Lorsque $m = 0$, la fonction f est **constante**.
• Lorsque $p = 0$, la fonction f est **linéaire**.

Exercice - Chercher

1. Justifier que les fonctions suivantes sont affines en précisant leur coefficient directeur et leur ordonnée à l'origine.

a. $x \mapsto 3x + 4$
b. $x \mapsto -2x$
c. $x \mapsto 5 - 3x$
d. $x \mapsto x$
e. $x \mapsto -\frac{x}{4}$
f. $x \mapsto -x + 6$

2. Déterminer la fonction f qui, à l'ancien prix x, associe le nouveau prix augmenté de 5%.

Algorithmique

Aux fonctions affines, on peut associer un programme de calcul très simple :

- Choisir un nombre x
- Multiplier par m
- Ajouter p

1.2 Représentation graphique

Proposition 2 (admise)
Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, la courbe représentative d'une fonction f est une droite sécante avec l'axe des ordonnées si et seulement si f est une fonction affine.

Remarque
La courbe représentative d'une fonction f a pour équation $y = f(x)$.

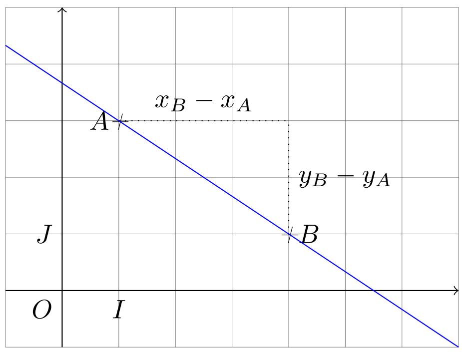
Corollaire 3 (admis)
Soit une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$.
Pour représenter f, il suffit de placer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ avec

$$\begin{cases} f(x_A) = y_A = mx_A + p \\ f(x_B) = y_B = mx_B + p \end{cases}$$

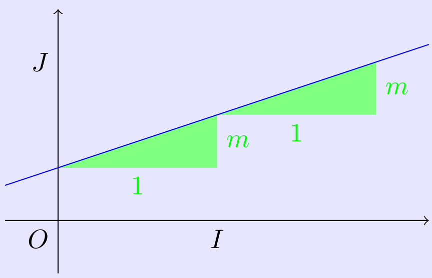
puis de tracer la droite passant par ces deux points.

Corollaire 4 (admis) et définition
Soient une fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = mx + p$ et d la droite qui a pour équation $y = mx + p$.
Soient deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de la droite d.
Alors le **<u>taux d'accroissement</u>** *de f est définie par*

$$m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} \quad \left(\text{noté aussi } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

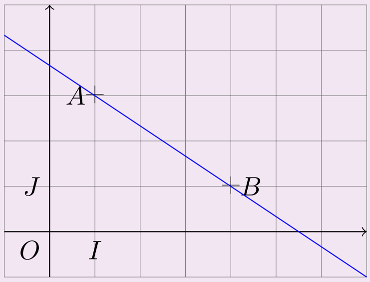


Remarque
En particulier, si la différence des abscisses est de 1, alors m est égal à la différence des ordonnées.



Exemple

Trouver l'équation de la fonction f représentée par la droite ci-dessous, passant par les points A et B.



Pour commencer, il s'agit d'une droite sécante avec l'axe des ordonnées, donc la fonction f est une fonction affine. On cherche donc une fonction f de la forme $f(x) = mx + p$ où l'on doit trouver m et p.

Ensuite, on a $A(1; 3)$ et $B(4; 1)$. Donc, on a

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{4-1} = -\frac{2}{3}$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver p ! Pour cela, on sait que, comme A appartient à la droite, on a :

$$y_A = mx_A + p \quad \Leftrightarrow \quad 3 = -\frac{2}{3} \times 1 + p \quad \Leftrightarrow \quad 3 + \frac{2}{3} = p \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{11}{3}$$

Par conséquent, la fonction f a pour équation $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

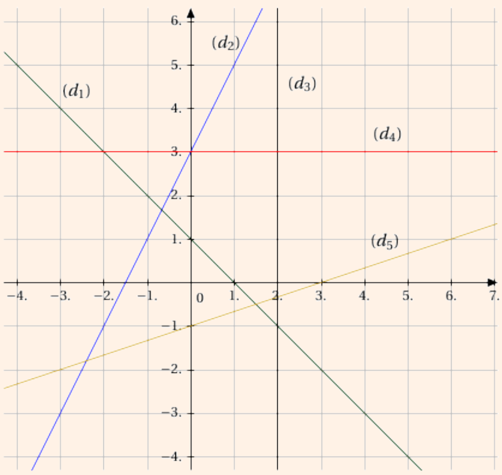
Méthode

- Prendre deux points de la droite et noter ses coordonnées.
- Utiliser la formule du taux d'accroissement pour trouver le coefficient directeur m.
- Pour trouver p, utiliser l'expression de la fonction affine en remplaçant x et y par les coordonnées d'un des deux points.

Exercice - Calculer

1. Déterminer l'expression de la fonction affine f vérifiant $f(-2) = 4$ et $f(3) = 6$

2. Lire graphiquement une équation de chaque droite.



Visionner les notions

- Représenter une fonction affine - Seconde - m@ths et tiques
- Représentations graphiques de fonctions affines et linéaires - Maths 3e - Les Bons Profs
- Déterminer par calcul une fonctions affine - Seconde - m@ths et tiques
- Déterminer graphiquement une fonctions affine - Seconde - m@ths et tiques
- Déterminer une fonction affine - Le rappel de cours - Maths 3e - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°17 page 105. *Chercher*.

Exercice n°21 page 105. *Représenter*.

Exercice n°22 page 105. *Calculer*.

Exercice n°23 page 105. *Représenter*.

Exercice n°24 page 105. *Représenter*.

Exercice n°33 page 106. *Calculer*.

Exercice n°34 page 106. *Calculer* ♣.

Exercice n°37 page 106. *Représenter*.

Exercice n°38 page 106. *Modéliser* ♣.

Exercice n°39 page 107. *Calculer*.

Exercice n°40 page 107. *Chercher* ♣.

Exercice n°42 page 107. *Calculer*.

Exercice n°43 page 107. *Chercher* ♣.

Exercice n°44 page 107. *Chercher*.

Exercice n°45 page 107. *Modéliser*.

Exercice n°48 page 108. *Représenter*.

Exercice n°49 page 108. *Représenter*.

Un peu d'histoire

Dans son *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, Leonhard Euler (15 avril 1707, Bâle - 7 septembre 1783, Saint-Pétersbourg) introduit le mot « affinité » dans un sens mathématique, avec une acception différente, lorsqu'il discute les courbes dont les abscisses et les ordonnées respectives sont dans des rapports déterminés, mais pas nécessairement égaux : « à cause de l'espèce d'analogie qu'on remarque dans les courbes qu'on obtient de cette manière, on dira qu'elles ont entre elles de l'affinité. »

Ses problèmes de vue le rendant quasiment aveugle ont eu peu d'effet sur sa productivité. Par exemple, Euler pouvait répéter l'Énéide de Virgile, du début à la fin, sans hésitation, et pour chaque page de son édition, il pouvait citer la première ligne et la dernière. Il produisait en moyenne un document de mathématiques par semaine au cours de l'année 1775.

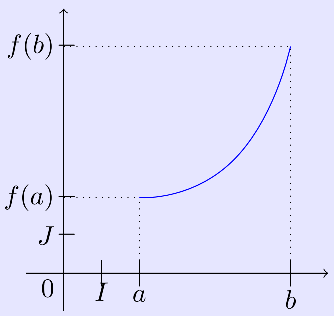
2 Etude d'une fonction affine

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec m et p deux réels.

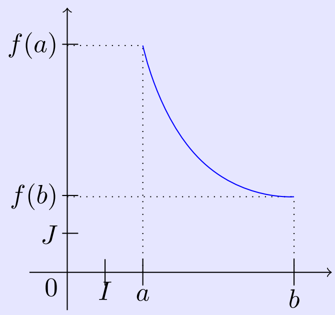
2.1 Sens de variations

Rappel

• f est dite **croissante** sur D lorsque pour tous réels a et b de D tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$



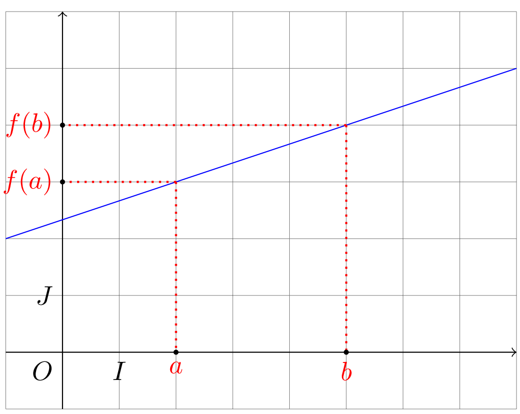
• f est dite **décroissante** sur D lorsque pour tous réels a et b de D tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$



• f est dite **strictement** croissante et décroissante lorsque les inégalités sont strictes.

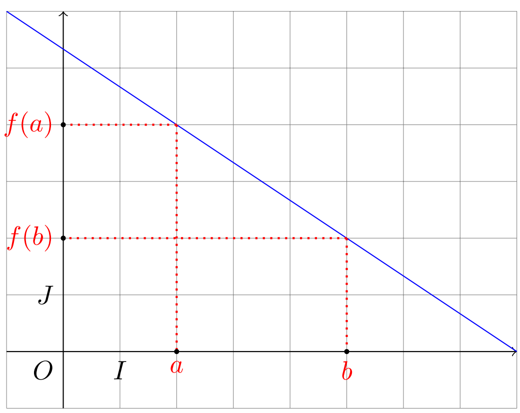
Proposition 5

Si $m > 0$, alors f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

Si $m < 0$, alors f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

Heuristique

Toute la preuve va essentiellement reposer sur le fait que, quand on multiplie une inégalité par un nombre positif ou négatif, le signe de l'inégalité peut changer de sens.
Par exemple, **en multipliant (ou en divisant) par un nombre positif, le sens de l'inégalité ne change pas**. En effet :

$$2 \leq 3 \underset{\times 5}{\Rightarrow} 10 \leq 15$$

En revanche, **en multipliant (ou en divisant) par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change**. En effet :

$$2 \leq 3 \underset{\times(-5)}{\Rightarrow} -10 \geq -15$$

Démonstration

Soient a et b deux réels.

• Cas $m > 0$:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma < mb \\ &\Leftrightarrow ma + p < mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante.

• Cas $m < 0$:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma > mb \\ &\Leftrightarrow ma + p > mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante.

□

Remarque

Si $m = 0$, alors f est constante.

Exemple

• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$ est croissante puisque $2 > 0$.
• La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 12$ est décroissante puisque $-3 < 0$.

Méthode

• Repérer le coefficient directeur.
• Etudier les variations de la fonction à partir de son coefficient directeur.
• Reporter les variations dans un tableau de variations.

Exercice

Préciser les variations des fonctions affines suivantes.
a. $x \mapsto 3x + 4$; **b.** $x \mapsto -2x$; **c.** $x \mapsto 5 - 3x$; **d.** $x \mapsto x$; **e.** $x \mapsto -\dfrac{x}{4}$; **f.** $x \mapsto -x + 6$

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

- Exercice n°19 page 105. *Chercher.*
- Exercice n°25 page 105. *Calculer.*
- Exercice n°32 page 106. *Calculer.*
- Exercice n°62 page 109. *Raisonner.*
- Exercice n°63 page 110. *Chercher* ♣.
- Exercice n°64 page 110. *Raisonner.*
- Exercice n°68 page 110. *Chercher.*
- Exercice n°83 page 111. *Chercher* ♣.

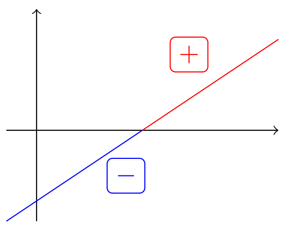
2.2 Signe d'une fonction affine

Rappel

Pour bien démarrer cette section, il peut être utile de revoir la vidéo Déterminer graphiquement le signe d'une fonction - Seconde - m@ths et tiques

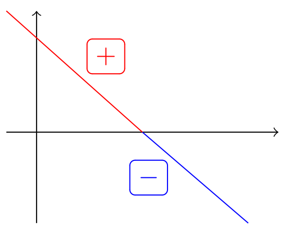
Proposition 6 (admise)

Pour $m > 0$:



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$-$	0	$+$	

Pour $m < 0$:



x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$mx+p$		$+$	0	$-$	

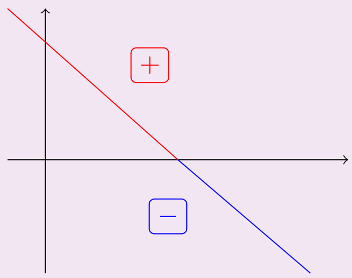
Méthode

- Chercher le zéro de l'expression.
- Etudier le signe de l'expression à partir de son coefficient directeur.
- Reporter les signes dans un tableau de signe.

Exemple

Dresser le tableau de signes de la fonction $x \mapsto -3x+2$

Avant de commencer, on remarque cette fonction est décroissante car son coefficient directeur (-3) est négatif. On est donc dans le cas de figure suivant :



x	$-\infty$		$???$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

On regarde pour quelle valeur de x la fonction s'annule. On a donc :

$$-3x+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x=-2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$$

Par conséquent, on a

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-3x+2$		$+$	0	$-$	

Exercice - Représenter

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

a. $g : x \mapsto -3x+4$ **b.** $g : x \mapsto -\frac{1}{8}x+3$

Visionner la notion

• Fonctions affines et linéaires - Maths seconde - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°20 page 105. *Calculer* ♣.

Exercice n°26 page 105. *Représenter.*

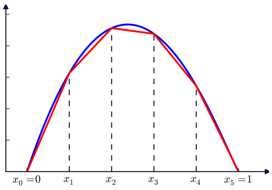
Exercice n°65 page 110. *Chercher.*

Exercice n°66 page 26. *Raisonner.*

Exercice n°67 page 110. *Raisonner* ♣.

3 Ouverture

<u>**Question ouverte :**</u> Comment pourrait-on "approcher" la courbe représentative d'une fonction (ici en bleu) par des « fonctions affines par morceaux » (ici en rouge).



<u>**Culture scientifique :**</u> En statistiques, en économétrie et en apprentissage automatique, un modèle de régression linéaire est un modèle de régression qui cherche à établir une relation linéaire entre une variable, dite expliquée, et une ou plusieurs variables, dites explicatives.
L'idée est qu'à partir d'un nuage de points, on doit trouver la "meilleure" droite qui passe le "plus proche" de vos points.
Dans cet exemple, on a reporté les pointures de chaussure en fonction de la taille des individus, et on a tracé la droite qui passe le "plus proche" de vos points.