Coquillages & Poincaré

Introduction à la dérivation de fonctions

NASSIRI Mohamed

www.coquillagesetpoincare.fr

Introduction à la dérivation de fonctions

Mohamed NASSIRI

Objectifs :

- Interpréter un nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution.
- Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.
- Connaître les dérivées des fonctions constante, identité, carré et cube.
- Déterminer la dérivée d'une somme de fonctions, du produit d'une fonction par un nombre réel, d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 3.
- Utiliser la fonction dérivée pour étudier les variations d'une fonction et ses extremums.

Mots – clefs :

Nombre dérivé - Coefficient directeur - Tangente - Fonction polynomiale - Extremums - Variations - Signe - Tableau de signes.

Prérequis :

Résolution graphique d'équations et d'inéquations - Calcul litteral - Résolution algébrique - Forme factorisée, développée ou réduite.

𝄞 *La musique du chapitre : The White Stripes - Seven Nation Army. Album : Elephant - Date de sortie : 2003*

La dérivation est une notion clé en mathématiques qui permet de comprendre comment une fonction évolue. Lorsqu'on parle de nombre dérivé en un point, il s'agit du coefficient directeur de la tangente à la courbe de cette fonction en ce point, autrement dit, la pente instantanée.

Dans ce cours, nous allons principalement nous intéresser aux fonctions polynomiales, pour lesquelles la dérivation permet d'étudier les variations de la fonction, c'est-à-dire les moments où elle croît ou décroît.

Grâce à la dérivation, nous serons aussi capables de localiser les extremums, c'est-à-dire les points où la fonction atteint un maximum ou un minimum.

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. »

Antoine Lavoisier, *Traité élémentaire de chimie*, 1789.

Sources & liens :

- Manuel scolaire lelivresolaire.fr
- Manuel scolaire *Math'x* 2^{de} *Nouveau programme*, Editions didier, 2019.
- Chaîne Youtube Les Bons Profs
- Chaîne Youtube m@ths et tiques

---

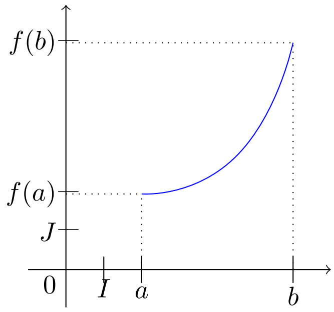
1 Notion de variations

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle D.

1.1 Monotonie

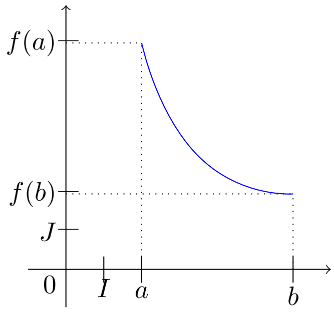
Définition 1 • *f est dite* **croissante** *sur D lorsque pour tous réels a et b de D tels que $a \leq b$, on a*

$$f(a) \leq f(b)$$



• *f est dite* **décroissante** *sur D lorsque pour tous réels a et b de D tels que $a \leq b$, on a*

$$f(a) \geq f(b)$$



• *f est dite* **monotone** *sur D lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur D.*

• *f est dite* **strictement** *croissante et décroissante lorsque les inégalités sont strictes.*

Remarque
On dit qu'une fonction croissante **conserve l'ordre** tandis qu'une fonction décroissante **inverse l'ordre**.

Exemple
Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante. En effet, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a :

$$a \leq b \Rightarrow \underbrace{a^2}_{f(a)} \leq \underbrace{b^2}_{f(b)}$$

Attention
Il faut faire attention au "sens de l'inégalité" quand on réalise des opérations. Par exemple, **en multipliant (ou en divisant) par un nombre positif, le sens de l'inégalité ne change pas**. En effet :

$$2 \leq 3 \underset{\times 5}{\Rightarrow} 10 \leq 15$$

En revanche, **en multipliant (ou en divisant) par un nombre négatif, le sens de l'inégalité change**. En effet :

$$2 \leq 3 \underset{\times(-5)}{\Rightarrow} -10 \geq -15$$

Méthode

• Être attentif à l'ensemble de définition.
• Prendre deux éléments a et b dans cet ensemble tels que $a \leq b$.
• Réaliser les opérations nécessaires pour arriver à $f(a)$ et $f(b)$ en faisant attention à sens de l'inégalité.

Exercice. Raisonner - Calculer

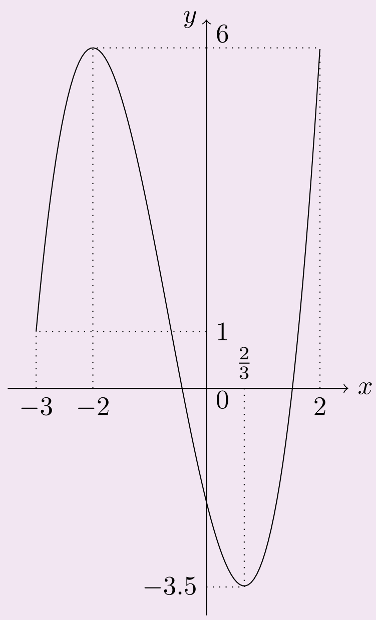
Etudier, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, le sens de variation de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Visionner la notion

Fonctions croissantes et décroissantes - Maths seconde - Les Bons Profs

Définition 2 *Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possibles.*
Si on les connaît, on écrit les images au bout des flèches.
L'ensemble forme le **tableau de variations** *de f.*

Exemple



x	-3		-2		$\frac{2}{3}$		2
$f(x)$	1	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3.5	$\nearrow$	6

Méthode

• Pour dresser un tableau de variations, on lit le graphique de gauche à droite en indiquant une flèche correspondant aux variations de la fonction.
• Lorsqu'une fonction est croissante, deux nombres et leur image sont classés dans le même ordre.
• Lorsqu'une fonction est décroissante, deux nombres et leur image sont classés dans l'ordre inverse.

Exercice - Communiquer

Quelles informations peut-on lire sur le tableau de variations de la fonction f ?

x	-2		1		5
$f(x)$	6	$\searrow$	-3	$\nearrow$	13

Visionner la notion

Tableaux de variations - Fonctions - Maths seconde - Les Bons Profs

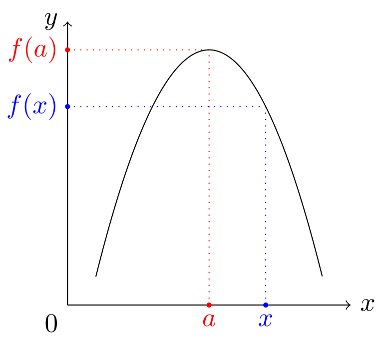
Pour s'entraîner

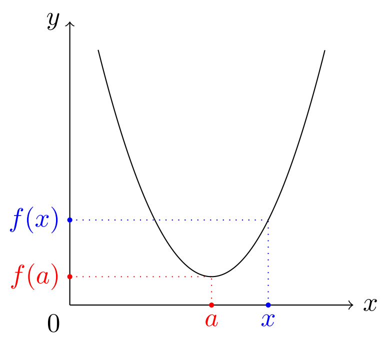
Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice nř27 page 80. *Représenter.*
Exercice nř28 page 81. *Représenter.*
Exercice nř30 page 81. *Modéliser.*
Exercice nř34 page 82. *Modéliser* ♣.

1.2 Extremum (minimum, maximum)

Définition 3 • *Dire que f atteint son* **maximum** *en a sur un intervalle I signifie que pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$. Le maximum de f sur I est $f(a)$.*
• *Dire que f atteint son* **minimum** *en a sur un intervalle I signifie que pour tout x de I, $f(a) \leq f(x)$. Le minimum de f sur I est $f(a)$.*



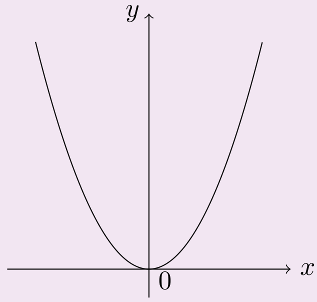


Exemple

Sur $\mathbb{R}$, la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ atteint son minimum en 0 car $f(0) \leq f(x)$ pour tout réel x mais elle n'a pas de maximum. En effet,

$$\underbrace{0}_{f(0)} \leq \underbrace{x^2}_{f(x)}$$

Le point de coordonées $(0; f(0))$ est le point de la parabole « le plus bas » (on parle aussi de « sommet »).



Exercice - Calculer

1. Conjecturer le sens de variation et le maximum M de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 2x - 1$.
2. Factoriser $g(x) - M$.
3. Démontrer que M est le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

A raconter au prochain repas de famille

L'expression *élément extremum* provient directement du latin et signifie *élément maximum* ou *élément minimum*.
Le pluriel de *extremum* est *extremums* ou *extrema*.

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice nř22 page 80. *Raisonner.*

Exercice nř32 page 81. *Modéliser.*

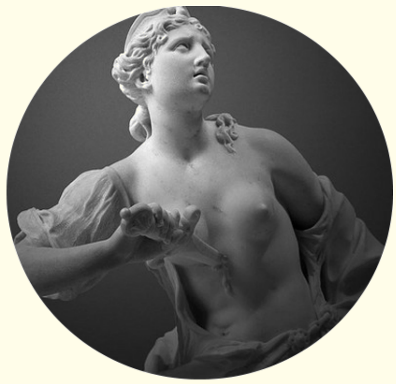
Visionner la notion

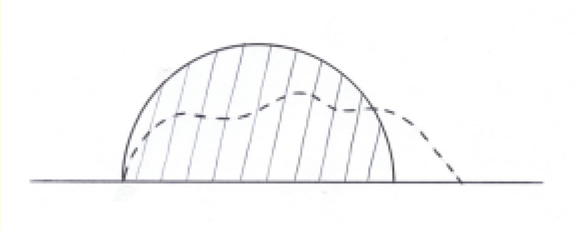
Maximum, minimum d'une fonction - Maths seconde - Les Bons Profs

Un peu d'histoire - **Didon et la peau du taureau**[1]

Didon, princesse de Tyr (Phénicie) au IXème siècle avant notre ère, décide de quitter la Phénicie à la suite de l'assassinat de son mari par son propre frère Pygmalion. Elle prend la mer avec quelques compagnons d'armes, et arrive sur les rivages de l'actuelle baie de Tunis. La suite est contée par Virgile dans l'Enéide :

Devenere locos ubi nunc ingentia cernes
Moenia, surgentemque nové Carthaginis arcem ;
Mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
Taurino quantum possent circumdare tergo.[2]
Virgile, Enéide I, 365.





Selon la légende, Didon aurait transformé en un vaste espace cette attribution dérisoire de terrain, en découpant en fines lanières la peau du taureau. Mettant bout à bout ces lanières elle forme une longue corde, qu'elle dispose en demi-cercle délimitant ainsi, avec le rivage de la baie, le grand terrain sur lequel elle fonda Carthage. Sous forme plus précise, ce qu'il est convenu d'appeler "problème de Didon" est donc le suivant :

Quelle forme donner à une courbe de longueur donnée, allant d'un point à un autre (non donnés a priori) d'une ligne droite, pour qu'elle délimite avec cette droite une surface maximale ?

La solution est le demi-cercle. Ce problème légendaire de recherche de maximum, apparemment le plus ancien de tous, est loin d'être le plus facile. Il fait partie de ce quíon appelle maintenant les problèmes isopérimétriques (figures de périmètre donné et d'aire maximale ou, dans l'espace, figures de surface donnée et de volume maximal). Il fallut attendre le XIXème siècle (Jacob Steiner, 1842) pour avoir la première solution (presque) complète du problème de Didon, et le début du XXème pour une solution complètement rigoureuse !

[1] Séminaire d'épistémologie et d'Histoire des Sciences (11 avril 2006) HISTOIRES DE MAXIMA ET MINIMA, François Rouvière (Laboratoire J.-A. Dieudonné)

[2] C'est ici qu'ils arrivèrent, ici où vous allez voir les superbes remparts et les hautes tours de la naissante Carthage. Ils y achetèrent tout ce que pouvait encercler de terrain la peau d'un taureau, terrain appelé Byrsa de ce fait

2 Nombre dérivé en a d'une fonction

Définition 4

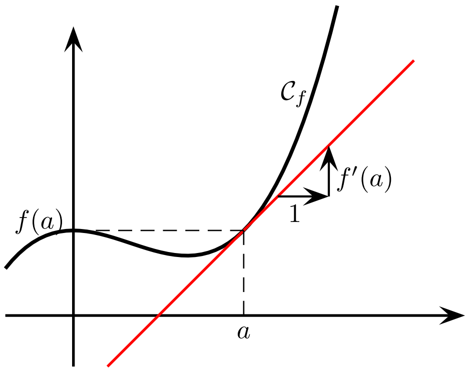
• *On appelle* **<u>taux d'accroissement</u>**, *ou* **<u>taux de variation</u>**, *en a de la fonction f le nombre*

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• *On appelle* **<u>nombre dérivé en a</u>** *la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0.*
On note ce nombre, lorsqu'il existe, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*

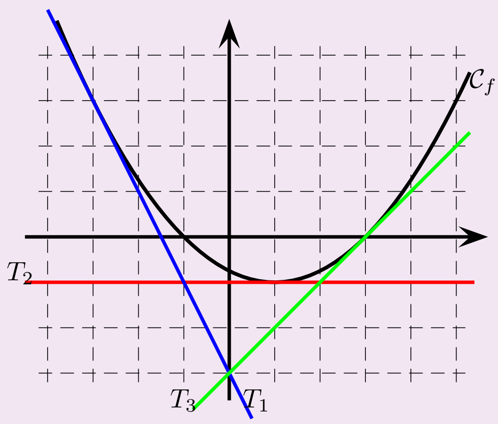


Exemple

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Par conséquent, on a donc :

$$f'(-3) = -2$$
$$f'(1) = 0$$
$$f'(3) = 1$$



Exercice. Représenter - Calculer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.
1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.
2.a. Pour $h > 0$, on pose $m_h = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?
b. Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Visionner la notion
- Le nombre dérivé - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Calculer le nombre dérivé (1) - Première - m@ths et tiques
- Calculer le nombre dérivé (2) - Première - m@ths et tiques
- Déterminer graphiquement le nombre dérivé - Première - m@ths et tiques (début de la vidéo)

Pour s'entraîner
Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°38 page 120. *Calculer.*
Exercice n°39 page 120. *Calculer.*
Exercice n°40 page 120. *Calculer.*
Exercice n°41 page 120. *Calculer.*
Exercice n°43 page 121. *Calculer.*
Exercice n°45 page 121. *Chercher* ♣.
Exercice n°46 page 121. *Raisonner.*
Exercice n°47 page 121. *Chercher* ♣.
Exercice n°50 page 122. *Chercher.*
Exercice n°52 page 122. *Représenter.*

3 Fonction dérivée

Définition 5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *On dit que f est* **dérivable sur I** *si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.*
- *On appelle* **fonction dérivée** *de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.*

Proposition 6 **Ce petit tableau est à apprendre par coeur !**

Fonction f	*Dérivée*	f *est définie sur*	f *est dérivable sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	

Exercice - Calculer

Calculer les fonctions dérivées $f'(x)$ dans les cas suivants.

$f_1(x) = x^3 - 5x^7$ $\qquad f_2(x) = \frac{1}{2}x^4 - x\sqrt{3}$ $\qquad f_3(x) = (x^2+3)x^5$ $\qquad f_4(x) = (3x-2)^2$

Visionner la notion

- Dériver les fonctions usuelles - Première - m@ths et tiques
- Les dérivées usuelles - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

- Exercice n°74→86 page 126. *Calculer.*
- Exercice n°87 page 126. *Calculer* .
- Exercice n°88 page 126. *Calculer* ♣.
- Exercice n°89 page 127. *Calculer.*
- Exercice n°90 page 127. *Raisonner.*
- Exercice n°91 page 127. *Calculer.*

4 Sens de variation d'une fonction

Proposition 7 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Remarque

Lorsque l'on étudie les variations d'une fonction, on synthétise cette étude dans un **tableau de variations** comme dans l'exemple suivant.

Exemple

Etudions les variations de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

• <u>Calcul de la dérivée :</u>

$$f'(x) = 3 \times x^2 - 3 \times 1 - 0 = 3x^2 - 3$$

• <u>Détermination des "zéros" de la dérivée :</u>

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

• <u>Tableau de variations :</u>

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque

Il ne faut pas oublier de calculer les images des zéros de la dérivée par la fonction f (dans notre exemple, on a bien déterminé $f(-1)$ et $f(1)$) !

Méthode

• Dériver la fonction à l'aide des formules usuelles
• Déterminer le(s) valeur(s) de x pour le(s)quelle(s) la dérivée s'annule.
• Déterminer le signe de la dérivée sur l'intervalle de définition.
• Associer les variations associées à chaque signe dans un tableau de variations.

Exercice. Calculer

Dresser le tableau de variation des fonctions de suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ **c)** $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

Visionner la notion

• Signe de la dérivée et variations - Maths 1ère - Les Bons Profs
• Etudier les variations d'une fonction - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner
Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°29 page 144. *Chercher* ♣.

Exercice n°30 page 144. *Chercher.*

Exercice n°32 page 145. *Calculer* ♣.

Exercice n°33 page 145. *Représenter.*

Exercice n°35 page 145 *Représenter* ♣.

Exercice n°36 page 145. *Chercher.*

Exercice n°37 page 147. *Chercher.*

Exercice n°42→50 page 147 *Calculer.*

Exercice n°51 page 147. *Calculer.*

Exercice n°52 page 147. *Calculer.*

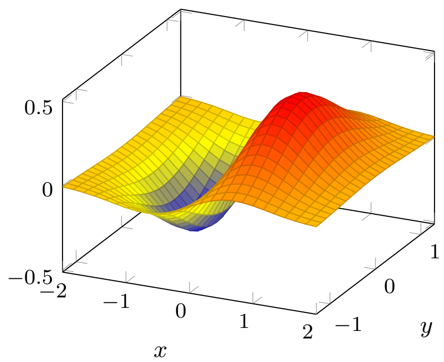
Exercice n°56 page 147. *Calculer* ♣.

5 Ouverture

Question ouverte :

Comment pourrait-on définir la continuité d'une fonction à deux variables (comme ci-dessous) ?

$$f(x,y) = x\exp(-x^2 - y^2)$$



Culture scientifique I : Les fonctions pathologiques

> *« Une fonction f est dite pathologique si elle a déstabilisé plus dun mathématicien et quelle a joué un rôle essentiel dans lhistoire des mathématiques. »*
>
> Christian Aebi

En mathématiques, il existe des fonctions vraiment étranges... Par exemple, la fonction de Dirichlet

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} \ : \ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est une fonction qui n'est continue en aucun point ! Essayez d'y réfléchir, c'est très perturbant... Mais on peut faire encore plus bizarre. Par exemple, la fonction de Weierstrass

$$\begin{aligned} f \ : \ & [0,1] \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & si\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{N}, \\ & q \in \mathbb{N}^*,\ (p,q) = 1 \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel !