

# *Coquillages & Poincaré*

## **Analyse des suites numériques**

NASSIRI Mohamed



# Analyse des suites numériques

Mohamed NASSIRI

## Objectifs :

- Reconnaître un phénomène discret.
- Calculer  $u_n$  pour un entier  $n$  donné dans le cas d'une suite arithmétique.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite arithmétique.
- Définir et représenter graphiquement les suites géométriques.
- Calculer les termes d'une suite géométrique.
- Déterminer le sens de variation des suites géométriques.

## Mots – clefs :

Suites numériques - Indices - Suites arithmétiques - Suites géométriques - Variations

## Prérequis :

Calcul littéral



*La musique du chapitre : [Lous and The Yakuza - Solo](#). Album : Solo - Date de sortie : 2020.*

---

Dans ce cours, nous allons découvrir les suites numériques, qui sont des successions de nombres suivant une règle précise. Nous étudierons deux types importants de suites : les suites arithmétiques, où chaque terme est obtenu en ajoutant un même nombre au précédent, et les suites géométriques, où chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même facteur.

Ces suites présentent des variations intéressantes : certaines sont croissantes ou décroissantes, tandis que d'autres sont constantes. Comprendre ces variations nous permettra d'analyser comment les suites évoluent, et d'aborder des concepts fondamentaux pour la suite de vos études en mathématiques.

---

*« Si vous voulez vous faire des ennemis, essayer de faire quelque chose de nouveau. »*

Thomas Woodrow Wilson.



## Sources & liens :

- Manuel scolaire [lelivresolaire.fr](http://lelivresolaire.fr)
- Manuel scolaire *Math'x 2<sup>de</sup> Nouveau programme*, Editions didier, 2019.
- Chaîne Youtube [Les Bons Profs](#)
- Chaîne Youtube [m@ths et tiques](#)

# 1 Modélisation par une suite numérique

**Définition 1** Une suite numérique est une liste de nombres réels, ordonnée, et indexée par les entiers naturels (ou numérotée).

 Exemples

a. 1; 2; 3; 4; 5; ...

b. 2; 4; 6; 8; 10; ...

c. 3; 7; 11; 15; 19; ...

d. 2; 4; 8; 16; 32; ...

e. 2; 3; 5; 9; 17; ...

f. 0; 1; 8; 27; 64; 125; ...

g. 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ...

**Définition 2**

- Une suite  $u$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Une suite  $u$  est donc un procédé qui à tout entier  $n$  associe le nombre  $u(n)$ .
- On note en général  $u_n$  le **terme d'indice  $n$**  au lieu de  $u(n)$ , et la suite est notée  $(u_n)$ , ou  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au lieu de  $u$ .
- $u_n$  est **un** nombre de la suite, et  $(u_n)$  désigne **l'ensemble de tous les nombres** de la suite.


 Exemple

Par exemple, avec la dernière suite de l'exercice précédent, on note  $u$  ou  $(u_n)$  la suite, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la suite :

$$u = \{1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \dots\}$$

On a, par exemple, en commençant à compter à 0 :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \dots, \quad u_6 = 8, \quad \dots$$

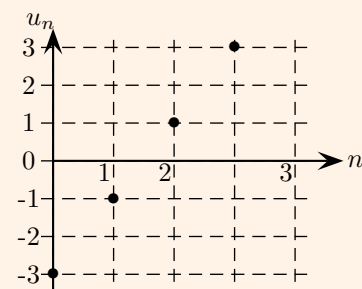
 Exercice. Calculer

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = 2n - 3$ , alors  $u_0 = -3$ ,  
 $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 1$ ,  $u_3 = 3 \dots$

$$u_{20} = \dots$$

$$u_{50} = \dots$$

$$u_{5250} = \dots$$



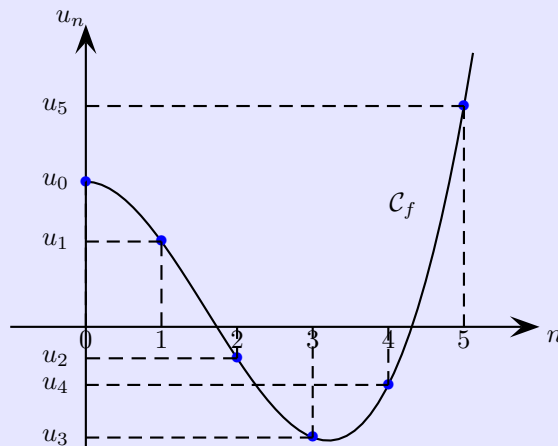
 Remarque

On peut définir une suite de deux façons : **explicitement** ou **par récurrence** (ou implicitement).

• **Explicitement** : à partir d'une fonction  $f$  : le terme général de la suite est alors  $u_n = f(n)$ .

On parle aussi d'**échantillonnage** : la suite  $(u_n)$  est constituée d'échantillons de la fonction  $f$  :

$$u_0 = f(0) ; u_1 = f(1) ; u_2 = f(2) ; \dots$$



• **Par récurrence**, ou implicitement : comme chaque terme de la suite est numéroté, chaque terme a un prédécesseur et un successeur ; on peut donc définir une suite en indiquant son premier terme  $u_0$  et une relation permettant de connaître un terme connaissant son (ou ses) prédécesseur.  
 Par exemple : Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ . Alors,  $u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$ ,  $u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$ ,  $u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$ , ...

 *Exemple*

On définit la suite  $(u_n)$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1,04u_n \end{cases}$$
.

Alors,

$$u_0 = 1000,$$

$$u_1 = 1,04 \times u_0 = 1,04 \times 1000 = 1040,$$

$$u_2 = 1,04 \times u_1 = 1,04 \times 1040 = 1081,6,$$

$$u_3 = 1,04 \times u_2 = \dots$$

$$u_{50} = 1,04 \times u_{49} \dots$$



*Exercice. Calculer*

Calculer les quatre premiers termes de la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$v_{n+1} = \frac{2v_n^2 - 1}{v_n^2 + 2}.$$



*Visionner la notion*

- Calculer les premiers termes d'une suite - Première - m@ths et tiques
- Représenter graphiquement une suite - Première - m@ths et tiques



*Pour s'entraîner*

Exercices sur [lelivrescolaire.fr](http://lelivrescolaire.fr) :



Exercice n°40 page 32. *Calculer.*



Exercice n°41 page 32. *Modéliser* **Tableur.**



Exercice n°42 page 32. *Modéliser* **Algo.**



Exercice n°43 page 42. *Calculer.*



Exercice n°44 page 43. *Calculer.*



Exercice n°45 page 43. *Calculer* ♣.



Exercice n°46 page 43. *Modéliser* **Tableur.**



Exercice n°47 page 43. *Modéliser* **Algo.**



Exercice n°48 page 43. *Calculer.*

## 2 Sens de variation d'une suite

### Définition 3

- Une suite  $(u_n)$  est **croissante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **constante** si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .
- Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

### Méthode

Etudier le sens de variation d'une suite  $(u_n)$  revient donc à comparer, **pour tout entier**  $n$ , les termes consécutifs  $u_{n+1}$  et  $u_n$ . On peut :

- soit étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ ,
- soit étudier le signe de  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ .



### Exercice. Calculer

Etudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a)  $u_n = n^2 - n + 2$

b)  $u_n = \frac{2^n}{3^n}$

c)  $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

d)  $u_n = -\frac{1}{3}n + 3$

e)  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et pour  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = u_n - n$

f)  $u_n = (n-5)^2$

g)  $u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

h)  $u_n = \frac{2^{n+2}}{3^n}$

i)  $u_n = \frac{n^2+1}{2n}$

**Proposition 4** Soit  $(u_n)$  la suite définie **explicitement** par  $u_n = f(n)$ , où  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $(u_n)$  et  $f$  ont le même sens de variation :

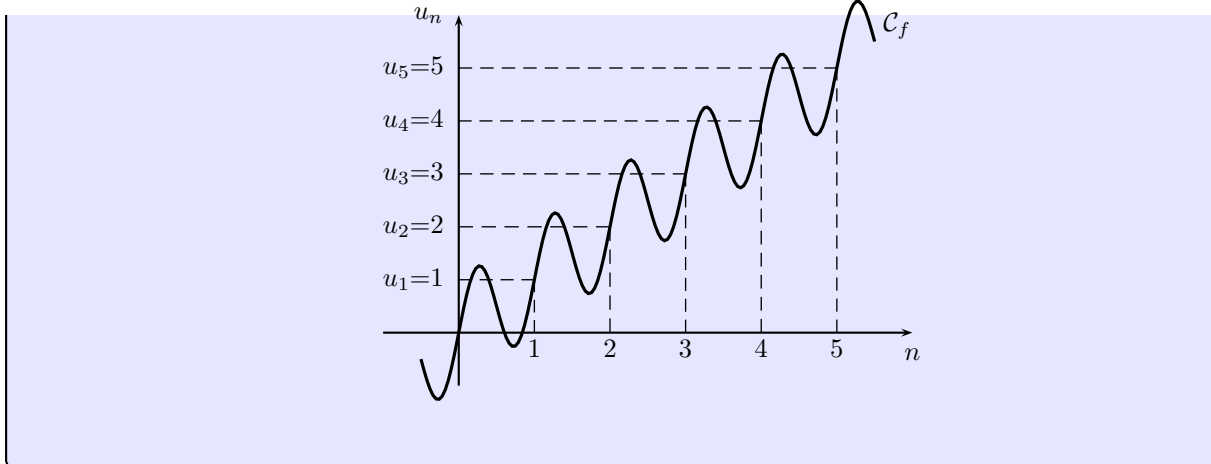
- si  $f$  est croissante, alors la suite  $(u_n)$  est croissante,
- si  $f$  est décroissante, alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.




### Attention!

La réciproque est fautive! Par exemple, soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$  avec la fonction  $f(x) = x + \sin(2\pi x)$ .

Alors, pour tout entier  $n$ ,  $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$ , et donc  $(u_n)$  est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que  $f$  n'est pas monotone sur  $\mathbb{R}$ .



 *Exemple*


Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = 2n - 3$ .  
 Cette suite est croissante puisque :

- **Méthode 1 :**

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 3 - (2n - 3) \\ &= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ,  
 c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

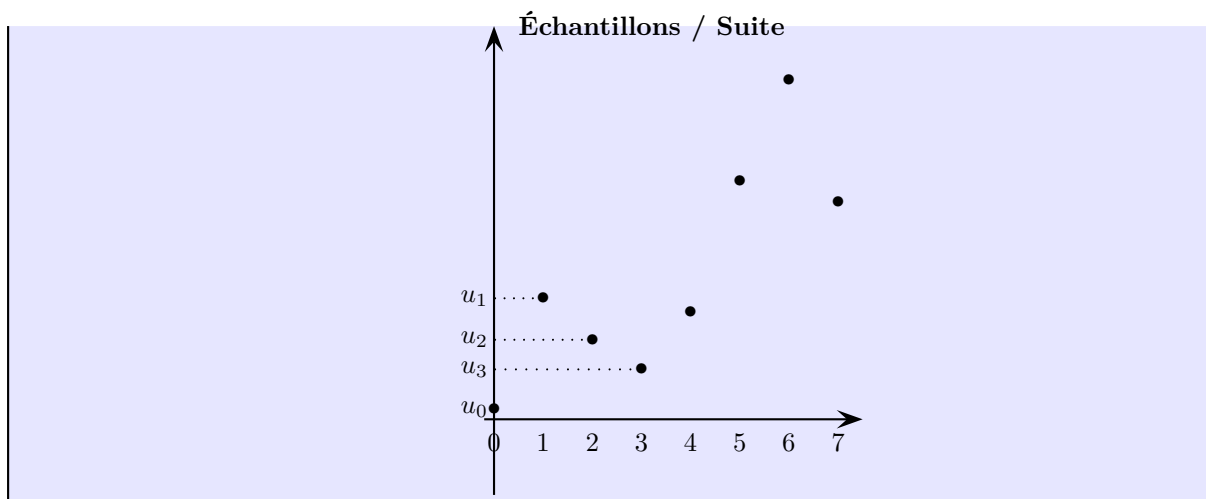
- **Méthode 2 :**  
 La fonction affine  $f(x) = 2x - 3$  est croissante (car son coefficient directeur, 2, est positif). Comme  $u_n = f(n)$ , alors la suite  $(u_n)$  est croissante.


 *Remarque*

Quand on écrit  $u_n = f(n)$ , on ne considère que les images de  $f$  pour des valeurs entières, et non pas pour tous les nombres réels d'un intervalle : on dit alors qu'on **échantillonne**, ou qu'on **numérise**, la fonction  $f$ .

**Fonction et sa courbe**


**Échantillonnage**




 *Exercice. Chercher - Calculer*

Etudier (de deux manières différentes!) le sens de variation des suites définies par :



a)  $u_n = \frac{3n - 2}{n + 1}$       b)  $u_n = -\frac{1}{3}n + 3$       c)  $u_n = (n - 5)^2$       d)  $u_n = n - 1 + \frac{4}{n + 1}$


 *Visionner la notion*

- [Etudier la variation d'une suite \(1\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Etudier la variation d'une suite \(2\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Etudier la variation d'une suite à l'aide d'une fonction associée - Première - m@ths et tiques](#)

 *Pour s'entraîner*

Exercices sur [lelivrescolaire.fr](http://lelivrescolaire.fr) :

 Exercice n°49 page 33. *Calculer.*       Exercice n°53 page 34. *Calculer.*

 Exercice n°52 page 34. *Chercher ♣.*


### 3 Suites particulières

#### 3.1 Suites arithmétiques

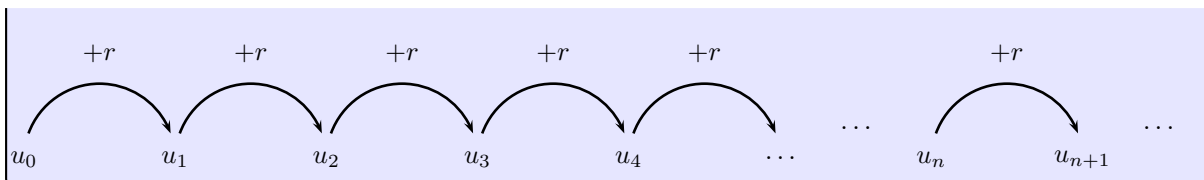
**Définition 5** Une suite arithmétique est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité  $r$ , appelée **raison** de la suite, au terme précédent.

Pour tout entier  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1} - u_n = r$$

 *Remarque*

On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :



 *Exemple*

La suite de entiers naturels pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... est la suite arithmétique de raison  $r = 2$  et de premier terme  $u_0 = 0$ .

**Proposition 6** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- Si  $r > 0$ ,  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $r < 0$ ,  $(u_n)$  est décroissante.

**Proposition 7** Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , alors, pour tout entier  $n$ ,


$$u_n = u_0 + nr$$

 *Remarque*

Il se peut que l'on n'ait pas le premier terme  $u_0$  lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne  $u_n$  à partir d'un terme différent de  $u_0$  :

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r$ , alors, quels que soient les entiers  $m$  et  $p$ ,

$$u_n = (n - p)r + u_p$$

 *Exercice. Calculer*

1. Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier  $n$  par la relation  $u_{n+1} = u_n + 1$ .

Alors,

$$u_1 = \dots$$

$$u_2 = \dots$$

$$u_3 = \dots$$

$(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = \dots$

2. Soit  $(v_n)$  la suite définie par la relation  $v_n = 5n + 2$ .


Alors, pour tout entier  $n$ ,  $v_{n+1} - v_n = \dots$

On en déduit que  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $r = \dots$

3. La suite  $(w_n)$  définie par la relation  $w_n = n^2 + 2$  est-elle arithmétique ?

 *Visionner la notion*

- [Suites arithmétiques - Définition - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Suites arithmétiques - Méthode - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Déterminer l'expression générale d'une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques](#)
- [Démontrer qu'une suite est arithmétique - Première - m@ths et tiques](#)
- [Déterminer une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques](#)
- [Etudier la variation d'une suite arithmétique - Première - m@ths et tiques](#)

 Pour s'entraîner

Exercices sur [lelivrescolaire.fr](http://lelivrescolaire.fr) :



Exercice n°54 page 34. Calculer.



Exercice n°55 page 34. Calculer .



Exercice n°56 page 34. Calculer.



Exercice n°57 page 34. Calculer .



Exercice n°58 page 34. Représenter.



Exercice n°59 page 34. Modéliser.



Exercice n°65 page 35. Chercher.



Exercice n°66 page 35. Représenter **Tableur**.

### 3.2 Suites géométriques

**Définition 8** Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité  $q$ , appelée **raison** de la suite, le terme précédent.

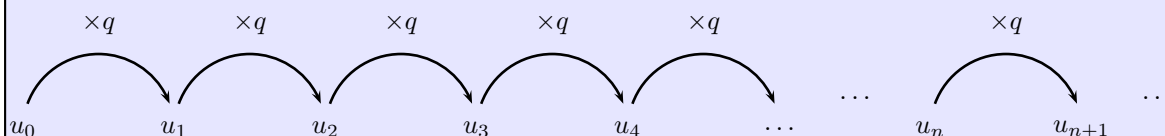
Pour tout entier  $n$ ,

$$u_{n+1} = q \times u_n \iff \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$



Remarque

On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :



Exemple

- La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison  $q = 2$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .
- La suite  $(v_n)$  de terme général  $v_n = (-1)^n$ , pour laquelle  $v_0 = 1, v_1 = -1, v_2 = 1, v_3 = -1, \dots$  est la suite géométrique de premier terme  $v_0 = 1$  et de raison  $q = -1$ .

**Proposition 9** Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- Si  $q > 1$ ,  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $q < 1$ ,  $(u_n)$  est décroissante.

**Proposition 10** Soit  $(v_n)$  une suite géométrique de premier terme  $v_0$  et de raison  $q$ , alors, pour tout entier  $n$ ,

$$v_n = v_0 \times q^n$$



Remarque

Encore une fois, il se peut que l'on n'ait pas le premier terme  $u_0$  lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne  $u_n$  à partir d'un terme différent de  $u_0$  :

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique non nulle de raison  $q \neq 0$ , alors, pour tous entiers  $m$  et  $p$ ,

$$\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$$



*Exercice. Calculer*

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier  $n$  par  $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ . Cette suite est-elle géométrique ?



*Visionner la notion*

- Suites géométriques - Définition - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Suites géométriques - Méthode - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Reconnaître une suite arithmétique et une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Déterminer l'expression générale d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Démontrer qu'une suite est géométrique - Première - m@ths et tiques
- Déterminer une suite géométrique - Première - m@ths et tiques
- Etudier la variation d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques



*Pour s'entraîner*

Exercices sur [lelivrescolaire.fr](http://lelivrescolaire.fr) :



Exercice n°69 page 36. *Calculer.*



Exercice n°70 page 36. *Calculer.*



Exercice n°71 page 36. *Calculer.*



Exercice n°77 page 37. *Chercher.*



Exercice n°78 page 37. *Calculer.*



Exercice n°79 page 37. *Modéliser Tableur.*

## 4 Sommes des termes d'une suite

### Proposition 11

- La somme des  $n$  premiers entiers naturels est :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour tout réel  $q \neq 1$ ,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$



*Remarque*

Pour  $q = 1$ ,  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n$ .

### Proposition 12

- La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{q-1} + u_q = (q - p + 1) \frac{u_p + u_q}{2}$$

- La somme de  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme  $v_0$  et de raison  $q$  est :

$$v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$



*Exercice. Calculer*

Calculer les sommes :

a)  $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$     b)  $P = 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 121$     c)  $Q = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$



*Visionner la notion*

- [Sommes de termes de suites - Formules - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Sommes de termes de suites - Applications - Maths 1ère - Les Bons Profs](#)
- [Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique \(1\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique \(2\) - Première - m@ths et tiques](#)
- [Calculer la somme des termes d'une suite géométrique - Première - m@ths et tiques](#)



*Pour s'entraîner*

Exercices sur [lelivrescolaire.fr](http://lelivrescolaire.fr) :



Exercice n°60 page 34. *Calculer.*



Exercice n°61 page 35. *Calculer.*



Exercice n°62 page 35. *Calculer.*



Exercice n°63 page 35. *Calculer ♣.*



Exercice n°64 page 35. *Modéliser.*



Exercice n°72 page 36. *Calculer.*



Exercice n°73 page 36. *Calculer.*



Exercice n°74 page 36. *Modéliser Médecine.*



Exercice n°75 page 36. *Modéliser ♣ SNT.*



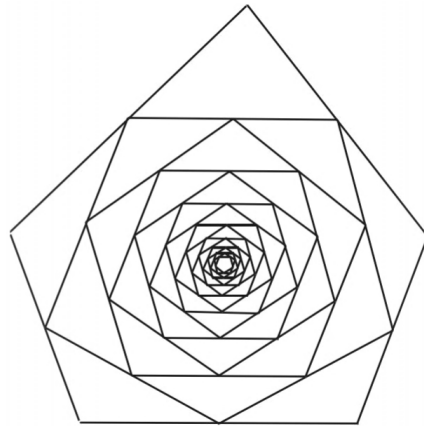
Exercice n°76 page 36. *Calculer 🔧.*

## 5 Ouverture

### Question ouverte :

En partant d'un polygone à  $n$  côtés, le « polygone des milieux » a lui aussi  $n$  côtés puisqu'à chaque côté, on associe un milieu et à chaque milieu, un sommet. Sachant qu'un polygone a autant de sommets que de côtés, alors le polygone des milieux a autant de côtés que celui de départ.

A votre avis, en réitérant l'opération un grand nombre de fois, vers quoi va « tendre » cette suite de polygones ?

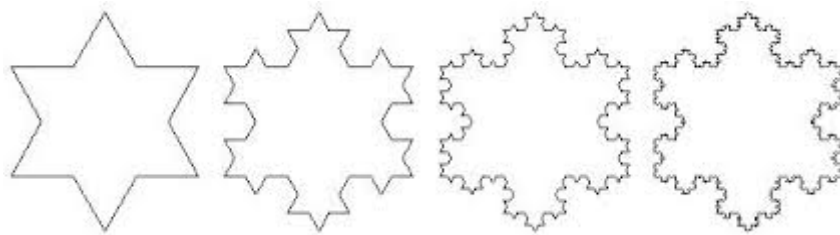


### Culture scientifique : Les fractales

Il s'agit d'un type d'objets géométriques très lié aux suites. Créé par Benoît Mandelbrot en 1974, le flocon de Von Koch en est un bel exemple.

Voici le protocole de construction :

- Une figure initiale : un triangle équilatéral.
- Une règle de transformation : Remplacez le tiers central de chaque segment par un triangle équilatéral sans base.
- Répétez cette opération sur la figure obtenue ; Et, ceci, autant de fois que vous le voulez.



Ce qui est très étrange avec cette figure, c'est qu'elle a un périmètre infini et pourtant une aire finie (car compris dans le cercle circonscrit du triangle initiale)...