Espaces complets. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Intuitivement, un espace complet, c'est un espace "sans trous". Pour formaliser ceci, on va demander à toute suite de Cauchy de converger. Un premier contre-exemple facile : la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans $\mathbb{R}^*$, est de Cauchy, car convergente vers 0, mais $0 \notin \mathbb{R}^*$. Donc $\mathbb{R}^*$ n'est pas complet (On pouvait le "sentir" car $\mathbb{R}^*$ a un "trou" en 0). Il y a d'autres exemples d'espaces non complets $\mathbb{Q}$, $C^0([0,1], ||.||_1)$, ... Parmi ceux qui sont complets, on le très célèbre $\mathbb{R}$ et par le théorème de Riesz-Fischer, on a que les espaces L^p sont des espaces de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Les quatre points importants sont : "Toute série absolument convergente est convergente", le théorème du point fixe est vraie pour les applications contractantes, une application uniformément continue sur une partie dense se prolonge de façon unique, et le théorème de Baire (dont on ne parlera pas ici). Il s'agit là d'un cadre indispensable pour faire de la "bonne analyse fonctionnelle".

Un type important d'espaces complets sont les espaces de Hilbert. Il s'agit d'une généralisation à la dimension infinie des espaces euclidiens. Les espaces de Hilbert sont très intéressants car on a un petit plus géométrique dans ces espaces : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc.

Références

[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Théorème de Riesz-Fischer
Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Projection sur un convexe fermé

1 Suites de Cauchy et propriétés

1.1 Suites de Cauchy

Définition 1 *Soit (E,d) un espace métrique On dit qu'une suite (u_n) de E est une suite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant de ϵ) tel que, pour tout $m \geq N$ et tout $n \geq N$, on ait $d(u_n, u_m) \leq \epsilon$.* [**ELAM**] **p.34**

Remarque 2 *La condition ci-dessus s'écrit aussi : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq N$: $n \geq N$ implique $d(u_{n+p}, u_n) \leq \epsilon$.* [**ELAM**] **p.34**

Proposition 3 *1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy*
2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est elle-même une suite de Cauchy.
3) Toute suite de Cauchy est bornée. [**ELAM**] **p.34**

Exemple 4 • *La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ est de Cauchy.*
• *La suite $(\sum_{k=0}^{n} 1/k)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas de Cauchy.*

Proposition 5 *Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.* [**ML3an**] **p.85**

1.2 Espaces complets

Définition 6 *On dit qu'un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.* [**GOUan**] **p.20**

Exemple 7 *$\mathbb{R}$ est complet. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.* [**GOUan**] **p.20**

Proposition 8 *Soient $(E_1,d_1),...,(E_n,d_n)$ des espaces métriques. L'espace métrique $E_1 \times ... \times E_n$ est complet (au sens de la norme produit) si et seulement si pour tout i, (E_i,d_i) est complet.* [**GOUan**] **p.20**

Proposition 9 *Soit (E,d) un espace complet et (F_n) une suite décroissante de fermés non vides de*

E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$ (où $\operatorname{diam}(F_n)$ désigne le diamètre de F_n). Alors il existe $x \in E$ tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$. [**GOUan**] **p.20**

2 Les grands théorèmes

2.1 Théorème de prolongement

Théorème 10 *Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F. Alors, il existe une unique application continue g de E dans F qui coïncide avec f sur A. De plus, g est uniformément continue.* [**ML3an**] **p.95**

Application 11 *Construction de l'intégrale de Riemman.* [**ML3an**] **p.95**

2.2 Théorèmes de point fixe

Définition 12 *Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est contractante (ou k-contractante) s'il existe $k \in]0, 1[, \forall (x, y) \in E^2,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$.* [**ML3an**] **p.97**

Théorème 13 *Théorème du point fixe de Picard*
Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe. [**ML3an**] **p.97**

Exemple 14 *Ce théorème est faux si l'on suppose seulement $d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y)$. Par exemple, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Mais si l'on ajoute de la compacité, il redevient vrai.* [**ML3an**] **p.97**

Application 15 *Le système*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos(x + y) \\ y = \frac{1}{2}\sin(x - y) \end{cases}$$

admet une unique solution. [**ML3an**] **p.692**

Proposition 16 *Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe.* [**ML3an**] **p.98**

Application 17 *Théorème de Cauchy-Lipschitz*
Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une unique application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. [**GOUal**] **p.354**

3 Espaces de Banach

Définition 18 *Un espace vectoriel normé complet s'appelle un espace de Banach.* [**GOUan**] **p.20**

Proposition 19 *Tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est complet.* [**DTZ**] **p.43**

Théorème 20 *Soient (E, d) un espace complet, et (u_n) une suite de Cauchy de E. Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.* [**DTZ**] **p.260**

Théorème 21 ♠ *Théorème de Riesz-Fischer* ♠
L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$. [**BRZ**] **p.57**

4 Espaces de Hilbert

4.1 Définitions et premières propriétés [ML3an] p.324 → 326

Définition 22 *Un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$ sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ tel que l'espace vectoriel $(H, ||.|| = \sqrt{\langle ., . \rangle})$ soit complet.*

Exemple 23 *1) $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ est complet pour la norme associée.*
2) $L^2(X, \mu, \mathbb{C})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\int_X |f|^2}$
3) $l^2(I, \mathbb{K})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\sum_{k\in I} |x_k|^2}$

Proposition 24 *Identité de polarisation*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x + y||^2 + ||x - y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y \rangle = \frac{||x + y||^2 + ||x - y||^2}{4} + i\frac{||x + iy||^2 - ||x - iy||^2}{4}$$

Proposition 25 *Identité du parallélogramme*
Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x, y \in H$. Alors,

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

4.2 Orthogonalité [ML3an] p.326 → 330

Définition 26 *Deux éléments $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On note $x \perp y$.*
Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\langle x, y\rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$. On note $A \perp B$.

Proposition 27 *Pour toute partie $A \subset H$, on note*

$$A^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}$$

$A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, appelé orthogonal de A dans H qui vérifie
1) si $B \subset A$, alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$
2) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$
3) $\overline{A}^{\perp} = A^{\perp}$
4) $A^{\perp} = \mathrm{vect}(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{vect}(A)}^{\perp}$
5) $\mathrm{vect}(A) \cap A^{\perp} = \{0\}$

Théorème 28 ♠ *Projection sur un convexe fermé* ♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x - u|| = \min_{y\in K} ||x - y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x - u, y - u\rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Théorème 29 *Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x - y) \in K^{\perp}$

Proposition 30 *Soit K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors l'application $p_K : H \to H, x \mapsto p_K(x)$ est une application linéaire continue qui vérifie :*
1) $p_K \circ p_K = p_K$
2) $\mathrm{Im} p_K = K$ et $\mathrm{Ker} p_K = K^{\perp}$
3) $\mathrm{Id}_H - p_K$ est la projection sur $K^{\perp}$
4) $\mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = H$

Corollaire 31 *1) Si L est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $L \oplus L^{\perp} = H$*
2) Si $A \subset H$ est une partie quelconque de H, alors $\overline{\mathrm{vect}(A)} \oplus A^{\perp} = H$ et $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{vect}(A)}$. En particulier, si $A = K$ est un sous-espace vectoriel de H, alors

$$\overline{K} \oplus K^{\perp} = H \quad \text{et} \quad (K^{\perp})^{\perp} = \overline{K}$$

3) Si K est un sous-espace vectoriel de H, alors K est dans H si et seulement si $K^{\perp} = 0$

Corollaire 32 *Un sous-espace vectoriel K de H est dense dans H si et seulement si toute forme linéaire continue sur H et nulle sur K est nulle sur H.*

4.3 Polynômes orthogonaux

Définition 33 *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de vecteurs de H est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H. [**ML3an**] **p.331**

Proposition 34 *1) Toute famille orthormée est libre*
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i\rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$. [**ML3an**] **p.331**

Définition 35 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [**OBJ**] **p.110**

Théorème 36 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_{\rho}$. [**OBJ**] **p.140 → 143**

5 Espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ et $\mathcal{H}^1_0([0,1])$

Motivation 37 *Soient $f \in L^2(]0,1[)$ et $q \in L^{\infty}(]0,1[)$ des fonctions à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de classe $C^2([0,1])$ qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

où
a est une forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u,v)=\int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

et L est une forme linéaire définie par

$$L(v)=\int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

Définition 38 *On appelle espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$, l'espace de fonctions défini, sur l'intervalle $[0,1]$ par*

$$\mathcal{H}^1([0,1])=\Big\{u\in C([0,1])\mid \exists g\in L^2([0,1]),\ u(x)=u(0)+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\Big\}$$

On appelle espace de Sobolev $\mathcal{H}_0^1([0,1])$, le sous-espace de $\mathcal{H}^1([0,1])$ défini par

$$\mathcal{H}_0^1([0,1])=\{u\in\mathcal{H}^1([0,1])\mid u(0)=u(1)=0\}$$

Remarque 39 *Cette définition est propre à la dimension 1.*

Proposition 40 *Soit $u\in\mathcal{H}^1([0,1])$, il existe une unique fonction $g\in L^2([0,1])$ telle que*

$$u(x)=u(0)+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Définition 41 *La fonction g est alors notée Du et est appelée dérivée faible de u.*

Remarque 42 *Si $u\in C^1([0,1])$, alors $u\in\mathcal{H}^1([0,1])$, et $Du=u'$.*

Remarque 43 *Soit $u\in\mathcal{H}^1([0,1])$, alors pour toute fonction $\phi\in C_c^1([0,1])$,*

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 Du(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

Et réciproquement, si $u\in\mathcal{H}^1([0,1])$ et qu'il existe $g\in L^2([0,1])$ telle que pour toute fonction $\Phi\in C_c^1([0,1])$,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

alors $g=Du$.

Proposition 44 *(i) L'application ϕ définie par*

$$\phi(u,v)=\int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 Du(t)Dv(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $u,v\in L^2([0,1])$, est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^1([0,1])$. On le notera $\langle .,.\rangle$.
(ii) Muni de la norme (associé au produit scalaire) :

$$||u||_{\mathcal{H}^1}=\left(\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}^1([0,1])$ est un espace de Hilbert.

Proposition 45 *Les fonctions de l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ sont höldériennes de rapport $\frac{1}{2}$: pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$*

$$|u(x)-u(y)|\leq ||Du||_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

où $||.||_{L^2}$ désigne la norme dans l'espace $L^2([0,1])$. De plus, l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon continue dans l'espace $C([0,1])$ /

$$||u||_\infty\leq\sqrt{2}||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Proposition 46 *L'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon compacte dans les espaces $C([0,1])$ et $L^2([0,1])$.*

Remarque 47 *L'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ coïncide avec l'espace*

$$\{u\in L^2([0,1])\mid Du\in L^2([0,1])\}$$

où Du est la dérivée faible de u.

Proposition 48 *L'espace $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1([0,1])$, c'est donc un espace de Hilbert réel.*

Lemme 49 *Inégalité de Poincaré*
Soit $u\in\mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a

$$\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t\leq\frac{1}{2}\int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t$$

Corollaire 50 *L'application $u\mapsto ||Du||_{L^2}$ définit sur $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ une norme. Cette norme est équivalente à la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$: pour tout $u\in\mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a*

$$\sqrt{\frac{2}{3}}||u||_{\mathcal{H}^1}\leq ||Du||_{L^2}\leq ||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Définition 51 *Lorsque $u\in\mathcal{H}_0^1([0,1])$ est solution du problème $a(u,v)=L(v)$ issu de (†), u est dite solution faible ou une solution variationnelle de (†).*

Théorème 52 *On se donne $f\in L^2([0,1])$ et $q\in L^\infty([0,1])$ avec $q(x)\geq 0$ pour presque tout $x\in[0,1]$. Alors le problème variationnel*

$$a(u,v)=L(v),\quad \forall v\in\mathcal{H}_0^1([0,1])$$

admet une unique solution $u\in\mathcal{H}_0^1([0,1])$.
Si, de plus, f et q sont des fonctions continues, alors u est une fonction de classe $C^2([0,1])$ qui vérifie

$$\begin{cases}-u''(x)+q(x)u(x)=f(x), & x\in[0,1]\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

Remarque 53 *Si la forme bilinéaire a n'est plus symétrique, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.*

Théorème 54 *Théorème de Lax-Milgram*
Soit V un espace de Hilbert. On considère a une forme bilinéaire continue coercive sur $V\times V$ et L une forme linéaire sur V.
Alors il existe un unique $u\in V$ tel que $a(u,v)=L(v)$ pour tout $v\in V$.

Questions

Exercice : Montrer que $l^p(\mathbb{C})$ n'est pas un espace pré-hilbertien si $p \neq 2$.

Solution : On utilise la caractérisation principale des espaces pré-hilbertiens : l'identité du parallélogramme ($i.e$)

$$\text{(Une norme } ||.|| \text{ sur un espace vectoriel } E \text{ provient d'un produit scalaire)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(||.|| \text{ l'identité du parallélogramme : } ||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)\ \forall (x,y) \in E^2)$$

Soit $p \in [1, +\infty[$. On considère les deux suites :

$$x = (1, 0, 0, ...) \in l^p(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad y = (0, 1, 0, ...) \in l^p(\mathbb{C})$$

D'une part,

$$||x+y||_{l^p}^2 + ||x-y||_{l^p}^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p}$$

D'autre part,

$$||x||_{l^p}^2 + ||y||_{l^p}^2 = 2$$

Ainsi $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ si $2^{2/p} = 2$ et donc si $p = 2$.

Exercice : 1) Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel f^p soit k-contractante (avec $k \in [0, 1[$). Alors f admet un unique point fixe.
2) Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non contractante qui admet un point fixe.
3) Trouver une fonction contractante de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ qui n'a pas de point fixe.
4) Montrer que la fonction f définie par $f : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2], x \mapsto \cos x$ a un point fixe.

Solution :
1) • <u>Unicité :</u> Supposons que f ait deux points fixes a et b ($i.e.$) $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Remarquons qu'un point fixe de f est encore un point fixe de f^p. En effet,

$$f^p(a) = f^{p-1}(\underbrace{f(a)}_{=a}) = f^{p-1}(a) = f^{p-2}(\underbrace{f(a)}_{=a}) = f^{p-2}(a) = ... = f(a) = a$$

Ainsi, a et b sont deux points fixes de f^p. Mais comme f^p est contractante, on a

$$d(\underbrace{f^p(a)}_{=a}, \underbrace{f^p(b)}_{=b}) < kd(a, b)$$

Comme $k \in [0, 1[$, on a donc $d(a, b) = 0$ et donc $a = b$.
• <u>Existence :</u> Si a est un point fixe de f^p, alors

$$f(a) = f(f^p(a)) = f^p(f(a))$$

Donc $f(a)$ est aussi un point fixe de f^p, mais par unicité, on a donc $f(a) = a$ et a est un point fixe de f.

2) La fonction Identité.

3) La fonction $x \mapsto x/2$

4) La fonction f n'est pas contractante, mais f^2 l'est. En effet, $f^2(x) = \cos(\cos x)$ vérifie :

$$\forall x, y \in]0, \pi/2[,\ \exists c \in]0, \pi/2[\text{ tel que } |\cos(\cos x) - \cos(\cos y)| = |\sin(\underbrace{\cos c}_{\leq 1}) \underbrace{\sin c}_{\leq 1}||x - y| \leq |\sin 1||x - y|$$

Comme $\sin 1 < 1$, on a ainsi que f^2 est contractante et donc que f admet un point fixe.

Exercice : Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $(E, ||.||)$ est un espace de Banach
(ii) Toute série d'éléments de E absolument convergente est convergente

---

Solution :
$(i) \Rightarrow (ii)$: On suppose que $(E, ||.||)$ est un espace de Banach. Soit $\sum_{n\geq 0} x_n$ tel que $\sum_{n\geq 0} ||x_n||$ converge. Considérons la suite (réelle !) $X'_n = \sum_{k=0}^{n} ||x_k||$ et la suite $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ pour tout $n \geq 0$. Pour tout entier $q > p$, on a :

$$||X_q - X_p|| = ||\sum_{k=p+1}^{q} x_k|| \leq \sum_{k=p+1}^{q} ||x_k|| = X'_q - X'_p$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} ||x_n||$ converge, (X'_n) est de Cauchy et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$q > p \geq N \quad \Rightarrow \quad |X'_q - X'_p| \leq \epsilon$$

Par suite, on a

$$q > p \geq N \quad \Rightarrow \quad ||X_q - X_p|| \leq \epsilon$$

Donc la suite (X_n) est de Cauchy dans $(E, ||.||)$ qui est complet donc converge.

$(ii) \Rightarrow (i)$: On suppose que toute série absolument convergente est convergente. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $(E, ||.||)$ donc

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall q > p \geq N) \quad \Rightarrow \quad (||u_q - u_p|| \leq \epsilon)$$

On prend $\epsilon = 1$, et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{pour } q \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad ||u_q - u_{n_0}|| \leq 1$$

On prend $\epsilon = 1/2$, et il existe donc $n_1 \in \mathbb{N}$ avec $n_1 > n_0$ tel que

$$||u_{n_1} - u_{n_0}|| \leq 1 \text{ et pour } q \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad ||u_q - u_{n_1}|| \leq 1/2$$

Par récurrence, on construit une suite croissante $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $||u_{n_k} - u_{n_{k-1}}|| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Si on pose $x_k = u_{n_k} - u_{n_{k-1}}$ on voit donc que la série $\sum ||x_k||$ converge et par hypothèse que la série $\sum x_k$ converge dans E.
Or $X_p := \sum_{k=1}^{p} u_{n_k} - u_{n_{k-1}} = u_{n_p} = u_{n_0}$. On en tire donc que la sous-suite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E donc la suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E par le lemme suivant (à connaître !).
Conclusion : $(E, ||.||)$ est un espace de Banach

Lemme : Une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est elle-même convergente.
Démonstration
Soit $l = \lim_{p\to+\infty} u_{n_p}$ et soit $\epsilon > 0$, il existe $P_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p \geq P_0$, on ait $||u_{n_p} - l|| \leq \epsilon$ (convergence de la sous-suite).
D'autre part, il existe $P_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $q \geq p \geq P_1$, on ait $||u_q - u_p|| \leq \epsilon$ (suite de Cauchy).
Soit $P_2 = \max(P_0, P_1)$ et soit $p \geq P_2$, on a

$$||u_p - l|| \leq \underbrace{||u_p - u_{n_p}||}_{\leq \epsilon \text{ car } n_p \geq p \geq P_1} + \underbrace{||u_{n_p} - l||}_{\leq \epsilon \text{ car } p \geq P_0} \leq 2\epsilon$$

Remarque : On a utilisé le fait que $n_p \leq p$. C'est une des propriétés des suites extraites et qui demanque une petite explication.
Il faut montrer que pour $n_0 \geq 0$ et $n_{p+1} > n_p$, on a $n_p \geq p$. Une petite récurrence fera l'affaire.
Pour $p = 0$, on a bien $n_0 \geq 0$.
Supposons la propriété vraie au rang p et montrons la au rang $p + 1$:
$n_{p+1} > n_p \geq p$ la dernière inégalité est justifiée par hypothèse de récurrence. On a donc $n_{p+1} > p$ mais comme n_{p+1} est un entier, on a donc $n_{p+1} \geq p + 1$.