Analyse numérique matricielle : résolution approchée de systèmes linéaires, recherche de vecteurs propres, exemples.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références

[CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet
[DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas
[FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet
[HUB1] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

Développements

Convergence des méthodes itératives
Méthode du gradient à pas optimal

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités [CIA] p.8 → 17

1.1 Normes matricielles

Définition 1 *Une norme matricielle est une application*

$$|||.||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :
(i) $|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *et* $|||A||| \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
(ii) $|||\alpha A||| = |\alpha|\,|||A|||,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
(iii) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
(iv) $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||,\ \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition-Définition 2 *Etant donné une norme vectorielle* $||.||$ *sur* $\mathbb{K}^n$*, l'application*

$$|||.||| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$$

définie par

$$|||A||| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \frac{||Av||}{||v||} = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ ||v|| \leq 1}} ||Av|| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{K}^n \\ ||v|| = 1}} ||Av||$$

est une norme matricielle, appelé norme matricielle subordonnée (à la norme vectorielle $||.||$*).*

Théorème 3 *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors*

$$|||A|||_1 = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \frac{||Av||_1}{||v||_1} = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

$$|||A|||_\infty = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \frac{||Av||_\infty}{||v||_\infty} = \max_{i \in [\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

1.2 Rayon spectral

Définition 4 *En notant* $\lambda_i(A)$*,* $1 \leq i \leq n$*, les valeurs propres d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, le rayon spectral de* A *est le nombre positif défini par*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|\ ;\ i \in [\![1,n]\!]\}$$

Théorème 5 *Soit* $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Alors*

$$|||A|||_2 = \sup_{v \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}} \frac{||Av||_2}{||v||_2} = \sqrt{\rho({}^t\overline{A}A)}$$
$$= \sqrt{\rho(A{}^t\overline{A})} = |||{}^t\overline{A}|||_2$$

La norme $|||.|||_2$ *est invariante par transformation unitaire (i.e.) soit* $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $U{}^t\overline{U} = I_n$*, alors pour toute* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$|||A|||_2 = |||AU|||_2 = |||UA|||_2 = |||{}^t\overline{U}AU|||_2$$

Par ailleurs, si la matrice A *est normale ((i.e.)* ${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$*) alors*

$$|||A|||_2 = \rho(A)$$

Théorème 6 *(i) Soient* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $|||.|||$ *une norme matricielle subordonnée ou non. Alors*

$$\rho(A) \leq |||A|||$$

(ii) Etant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\epsilon > 0$*, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*

$$|||A||| \leq \rho(A) + \epsilon$$

Théorème 7 *L'application*

$$|||.|||_E : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$$

$$A = (a_{i,j}) \mapsto \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2} = (\mathrm{Tr}({}^t\overline{A}A))^{1/2}$$

est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \leq 2$) invariante par transformation unitaire et qui vérifie, pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|||A|||_2 \leq |||A|||_E \leq \sqrt{n}|||A|||_2$$

Théorème 8 (i) *Soient $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$|||B||| < 1$$

Alors la matrice $(I+B)$ est inversible, et

$$|||(I+B)^{-1}||| \leq \frac{1}{1 - |||B|||}$$

(ii) *Si une matrice de la forme $(I+B)$ est singulière, alors nécessairement*

$$|||B||| \geq 1$$

pour toute norme matricielle subordonnée ou non.

Théorème 9 *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i)

$$\lim_{k \to +\infty} B^k = 0$$

(ii)

$$\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0, \quad \text{pour tout vecteur } v$$

(iii)

$$\rho(B) < 1$$

(iv)

$$|||B||| < 1, \text{ pour au moins une norme matricielle subordonnée } |||.|||$$

1.3 Conditionnement

Définition 10 *Soit $|||.|||$ une norme matricielle subordonnée et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Le nombre*

$$\mathrm{cond}(A) = |||A|||\,|||A^{-1}|||$$

s'appelle le conditionnement de la matrice A, relativement à la norme matricielle subordonnée $|||.|||$.

Théorème 11 *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et soit u et $u+\delta u$ les solutions des systèmes linéaires*

$$Au = b$$
$$A(u+\delta u) = b + \delta b$$

On suppose $b \neq 0$. Alors on a

$$\frac{||\delta u||}{||u||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

Théorème 12 *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et soit u et $u+\Delta u$ les solutions des systèmes linéaires*

$$Au = b$$
$$(A+\Delta A)(u+\Delta u) = b$$

On suppose $b \neq 0$. Alors on a

$$\frac{||\Delta u||}{||u+\Delta u||} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{||\delta b||}{||b||}$$

Théorème 13 (i) *Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,*

$$\mathrm{cond}(A) \geq 1$$
$$\mathrm{cond}(A) = \mathrm{cond}(A^{-1})$$
$$\mathrm{cond}(\alpha A) = \mathrm{cond}(A), \ \forall \alpha \in \mathbb{K}^*$$

(ii) *Pour toute matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,*

$$\mathrm{cond}_2(A) := |||A|||_2|||A^{-1}|||_2 = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$$

où $\mu_1(A) > 0$ et $\mu_n(A) > 0$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de A.
(iii) *Pour toute matrice A normale,*

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max_{i \in [\![1,n]\!]\}} |\lambda_i(A)|}{\min_{i \in [\![1,n]\!]\}} |\lambda_i(A)|}$$

où $\lambda_i(A)$, $1 \leq i \leq n$, les valeurs propres d'une matrice A.
(iv) *Pour toute matrice A unitaire ou orthogonale $\mathrm{cond}_2(A) = 1$.*
(v) *Le conditionnement cond_2 est invariant par transformation unitaire.*

2 Résolution de systèmes linéaires

2.1 Méthodes directes

2.1.1 Méthode de Gauss [CIA] p.73 → 82

Méthode 14 *La méthode de Gauss est une méthode générale de résolution d'un système linéaire $Au = b$ (A une matrice inversible). Elle comporte trois étapes :*
(i) *Elimination : Déterminer une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure.*
(ii) *Calcul simultanée de Mb*
(iii) *Résolution du système linéaire*

$$MAu = Mb$$

par la méthode dite de remontée.

Théorème 15 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe au moins une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que MA soit triangulaire supérieure.*

2.1.2 Factorisation LU [CIA] p.82 → 86

Théorème 16 *Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n sous-matrices diagonales*

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{pmatrix},\quad 1\leq k\leq n$$

soient inversibles.
Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{i,j})$ avec $l_{i,i}=1,\ 1\leq k\leq n$, et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A=LU$$

De plus, une telle factorisation est unique.

Théorème 17 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n\end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale. On définit la suite

$$\begin{cases}\delta_0=1,\ \delta_1=b_1\\ \delta_k=b_k\delta_{k-1}-a_kc_{k-1}\delta_{k-2},\quad 2\leq k\leq n\end{cases}$$

Alors

$$\delta_k=\det(A_k),\quad \text{où}$$

$$A_k=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k\end{pmatrix},\quad 1\leq k\leq n$$

et, si $\delta_k\neq 0,\ 1\leq k\leq n$, la factorisation LU de la matrice A est $A=LU$ avec

$$L=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2\frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3\frac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & a_n\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & \\ & & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\end{pmatrix}$$

2.1.3 Factorisation et méthode de Cholesky [CIA] p.87 → 90

Théorème 18 *Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure B telle que*

$$A=B^tB$$

De plus, on peut imposer que éléments diagonaux B soient tous strictement positifs et la factorisation $A=B^tB$ correspondante est alors unique.

2.1.4 Factorisation QR [FILB] p.34 → 37

Définition 19 *Soit $u\in\mathbb{R}^n$. On appelle matrice de Householder la matrice*

$$H_u=I_n-2\frac{u^tu}{||u||^2}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $||u||^2={}^tuu$ lorsque u est non nul, et $H_n=I_n$ lorsque $u=0$.

Proposition 20 *Soit $u\in\mathbb{R}^n$.*
(i) H_u est symétrique (i.e.) $H_u={}^tH_u$
(ii) H_u est inversible et $H_u^{-1}=H_u$
(iii) $H_uv=-v$ pour tout $v\in\mathbb{R}^n$ colinéaire à u et $H_uv=v$ pour tout $v\in\mathbb{R}^n$ orthogonal à u.
(iv) $\det(H_u)=-1$ lorsque $u\neq 0$ et $\det(H_u)=1$ lorsque $u=0$.
En définitive, H_u est la matrice de la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$

Proposition 21 *Pour tout $v\in\mathbb{R}^m$, $m\geq 1$ tel que $||v||=1$, il existe $u\in\mathbb{R}^m$ tel que*

$$H_uv=e_1=(1,0,...,0)^\perp$$

Théorème 22 *Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A=QR$.*

2.2 Méthodes itératives

Définition 23 *Si $(M,N)\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tel que l'on a la décomposition dite décomposition régulière $A=M-N$, on dit que la méthode itérative associée à (M,N) converge si pour tout $u_0\in\mathbb{R}^n$, la suite de premier terme u_0 et définie par $\forall k\in\mathbb{N}$,*

$$u_{k+1}=M^{-1}(Nu_k+b)$$

converge. **[DUM] p.167-168**

Remarque 24 *On utilise parfois la notation suivante :*

$$A=\begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \ddots & & \ddots & -F & \\ & \ddots & D & \ddots & \\ & -E & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}=D-E-F$$

Exemple 25 *Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation :*
Voir Tableau 1 **[CIA] p.102**

Théorème 26 ♠ *Convergence des méthodes itératives* ♠ *La méthode itérative associée à (M, N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.***[DUM] p.167 → 169**

Théorème 27 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme*

$$A = M - N, \quad M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice $({}^t\overline{M} + N)$ est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

[CIA] p.102-103

Théorème 28 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive. La méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$.*
Le rayon spectral de la méthode de relaxation vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode de relaxation ne peut converger que si $0 < \omega < 2$. **[CIA] p.103-105**

2.3 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

Théorème 29 *Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes*

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$
$$\text{avec } f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sont équivalents.

Définition 30 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 31 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 32 ♠ *Inégalité de Kantorovitch* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} ||x||^4$$

3 Recherche d'éléments propres

Proposition-Définition 33 *Théorème de Gershgöring*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

où

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

sont les disques de Gershgöring. **[HUB1] p.226**

Théorème 34 *Soit A une matrice diagonalisable, P une matrice telle que*

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_i)$$

et $|||.|||$ une norme matricielle telle que

$$|||\mathrm{diag}(\lambda_i)||| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |d_i|$$

pour toute matrice diagonale. Alors, pour toute matrice δA,

$$\mathrm{sp}(A + \delta A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$$

où $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \lambda_i| \leq \mathrm{cond}(P)|||\delta A|||\}$. **[CIA] p.34-35**

Proposition 35 *Méthode de la puissance*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq ... \geq |\lambda_n|, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}$$

Prenons un vecteur $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ et considérons la suite

$$x_0 = \frac{x}{||x||}, \ x_1 = \frac{Ax_0}{||Ax_0||}, ..., \ x_{k+1} = \frac{Ax_k}{||Ax_k||}$$

Soit $v_1, ..., v_n$ une base orthonormée de trigonalisation de A telle que $Av_1 = \lambda_1 v_1$.
Alors si $x \notin \mathrm{Vect}(v_2, ..., v_n)$, la suite de vecteurs x_{2k} converge vers un vecteur unitaire qui est vecteur propre de A pour le valeur propre λ_1 **[HUB1] p.24-25**

Méthode 36 *Soit $A := A_1$ une matrice carrée quelconque ; on écrit sa factorisation QR, soit*

$$A_1 = Q_1 R_1$$

, puis on forme la matrice

$$A_2 = R_1 Q_1$$

on écrit sa factorisation QR de la matrice A_2, soit

$$A_2 = Q_2 R_2$$

puis on forme la matrice

$$A_3 = R_2 Q_2$$

et ainsi de suite ... On obtient ainsi une suite de matrices A_k qui sont toutes semblables à la matrice A. **[CIA] p.123-124**

Proposition 37 *On suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et que ses valeurs propres sont toutes de modules différentes. Il existe donc au moins $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$\begin{aligned} &A = PDP^{-1}, \\ &A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \ \textit{et} \\ &|\lambda_1| > |\lambda_2| > ..., > |\lambda_n| > 0 \end{aligned}$$

et que l'on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU. Alors la suite de matrices $(A_k)_{k\geq 1}$ est telle que

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{ii} = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n \\ &\lim_{k\to+\infty} (A_k)_{ij} = 0, \quad 1 \leq j < i \leq n \end{aligned}$$

[CIA] p.124-129

Illustrations

Nom de la méthode	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E + F)$	$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E + F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D - E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$	$(D - E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation ($\omega \neq 0$)	$A = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

Tableau 1 : Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :