

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références

- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
- [ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [POM] Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques, Alain Pommelet
- [FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet
- [BER] Calcul différentiel topologique élémentaire, Wolfgang Bertram ♠
- [DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

Développements

- Projection sur un convexe fermé
- Théorème des extrema liés
- Lemme de Morse

1 Existence et unicité

Définition 1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- Un point x_0 est un minimum de f sur \mathbb{R}^n si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \geq f(x_0)$.

Un point x_0 est un minimum local de f sur \mathbb{R}^n s'il existe un voisinage \mathcal{V}_{x_0} de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$ $f(x) \geq f(x_0)$.

- Un maximum et un maximum local se définissent de la même manière en renversant les inégalités.

- Un extremum est un minimum ou un maximum.

[ML3an] p.729

1.1 Utilisation de la compacité

Proposition 2 Soit $f : (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, avec (E, d) compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $c, d \in E$ tels que

$$f(c) = \inf_{x \in E} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$$

[GOUan] p.31

Application 3 Equivalence des normes en dimension finie

Dans un e.v.n. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. [GOUan] p.50

Proposition 4 Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) . Alors l'application

$$E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y)$$

est 1-lipschitzienne (donc uniformément continue et donc continue) sur E . [GOUan] p.17-18

Proposition 5 Soit K une partie compacte non vide d'un espace métrique (E, d) . Alors il existe $x \in K$ tel que, pour tout $y \in E$,

$$d(y, K) = d(y, x)$$

[POM] p.56

Proposition 6 Soient K_1 et K_2 deux compacts d'un espace métrique (E, d) . Alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que

$$d(x_1, x_2) = d(K_1, K_2) := \inf_{\substack{x \in K_1 \\ y \in K_2}} d(x, y)$$

[GOUan] p.33

Proposition 7 Soient (E, d) un espace métrique, K un compact de E et F un fermé de E tels que $K \cap F \neq \emptyset$. Alors $d(K, F) \neq 0$.

Remarque 8 Ce résultat est faux si l'on suppose seulement K fermé ... En effet, en prenant

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\}$$

K et F sont fermés, disjoints et pourtant $d(K, F) = 0$.

Proposition 9 Soient (E, d) un espace métrique compact et une application continue $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y, \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Alors f admet un unique point fixe. [GOUan] p.34

1.2 Utilisation de la coercivité

Définition 10 Soient E un e.v.n. de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On dit que f est coercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Proposition 11 Soient F un fermé (non borné) d'un e.v.n. E de dimension finie et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et coercive. Alors il existe $x \in F$ tel que

$$f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$$

[GOUan] p.33

Proposition 12 Soient E un e.v.n. E de dimension finie, K un compact de E et F un fermé de E . Alors il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que

$$d(x, y) = d(K, F)$$

[GOUan] p.33

1.3 Utilisation de la convexité

Définition 13 Soit C une partie convexe d'un espace normé E . Une application $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si

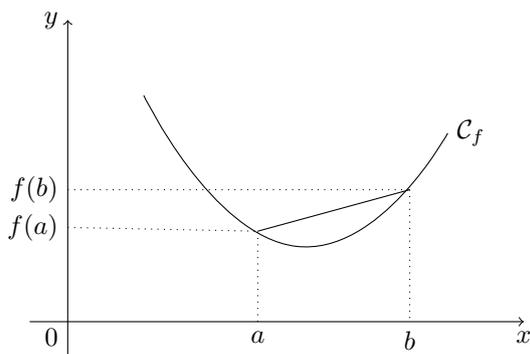
$$\forall a, b \in I, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Elle est dite concave - f est convexe.

Lorsque l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0, 1[$, on dit que f est strictement convexe. [GOUan] p.94

Remarque 14 Lorsque $C = I$ est un intervalle de \mathbb{R} , l'inégalité de convexité dans la définition se traduit graphiquement par le fait que tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au dessus du graphe de f .



[GOUan] p.94

Proposition 15 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur \mathbb{R} . Alors f est constante. [GOUan] p.98

Proposition 16 Soit C une partie convexe d'un espace normé E et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une application convexe, alors il existe au plus un minimum f sur C .

1.4 En mélangeant tout ça ...

Proposition 17 Compacité \oplus Convexité
Soient K un compact convexe d'un e.v.n. et une application continue $f : K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad \|(f(x) - f(y))\| \leq \|x - y\|$$

Alors f admet un unique point fixe. [GOUan] p.52

Théorème 18 Convexité \oplus Coercivité
Soient E un espace de Hilbert et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que :

(i) f soit continue,

(ii) f est coercive

(iii) f soit strictement convexe,

Alors il existe un unique maximum global. [FILB] p.139

Application 19 Les fonctionnelles quadratiques
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} {}^t x A x - {}^t b x$$

Alors il existe un unique $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ qui est aussi la solution du système $Ax = b$. [FILB] p.139-140

2 Extremum dans les espaces de Hilbert [BRZ] p.79-80

Théorème 20 ♠ Projection sur un convexe fermé
♠ Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.

Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$\|x - u\| = \min_{y \in K} \|x - y\| \quad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

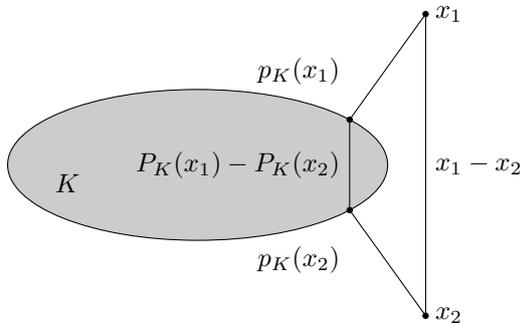
$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x - u, y - u \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K \quad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Corollaire 21 En notant, $P_K(x_1)$ la projection de x_1 sur K et de même pour x_2 , on a :

$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad \|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

Remarque 22 Sur un dessin, le résultat est évident.



Théorème 23 Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) $y \in p_K(x)$
- 2) $y \in K$ et $(x - y) \in K^\perp$

3 Utilisation de la différentiabilité

3.1 Conditions du premier et du second ordre [ML3an] p.729 → p.734

Définition 24 Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Un point x_0 de \mathcal{U} est un point critique de f si f est différentiable et si $Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$.

Théorème 25 • Condition du premier ordre : Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable en x_0 . Si x_0 est un extremum local de f sur \mathcal{U} , alors

$$Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})},$$

autrement dit, x_0 est un point critique de f .

• Condition du second ordre :

Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en x_0 . Alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f sur \mathcal{U} si et seulement si la hessienne $Hf(x_0)$ est définie positive (resp. définie négative).

Remarque 26 La réciproque du premier point est fautive et du second point également si on enlève le caractère "définie" de la hessienne ! Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ définie sur \mathbb{R} vérifie $f'(0) = f''(0) = 0$ donc 0 est un point critique et la hessienne en 0 est positive (car elle est nulle). Or 0 n'est pas un extremum local de f .

Proposition 27 Soient \mathcal{U} un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et convexe. Si x_0 est un point critique de f , alors x_0 est un minimum pour f sur \mathcal{U} .

Définition 28 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Un point x_0 est un point selle de f sur \mathbb{R}^n si x_0 est un point critique de f tel que pour tout voisinage \mathcal{V}_a de a , il existe $(y, z) \in \mathcal{V}_a^2$

$$f(y) < f(x_0) < f(z).$$

Application 29 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.

Points critiques : $(0, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$

Nature des points critiques :

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hf_{(0, \sqrt{2})} = Hf_{(0, -\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(0, 0)$ n'est pas un extremum. C'est en fait un point selle car $h(0, 1) = -3/4 < 0$ et $h(1, 0) = 1 > 0$.

Comme $Hf_{(0, \sqrt{2})}$ et $Hf_{(0, -\sqrt{2})}$ sont définies positives, $(0, \sqrt{2})$ et $(0, -\sqrt{2})$ sont des minimums locaux de f .

De plus, comme $f(x, y) - f(0, \sqrt{2}) = f(x, y) - f(0, -\sqrt{2}) = x^2 + (\frac{y^4}{4} - 1)^2 \geq 0$. Ces minimums sont même globaux.

Application 30 ♠ Lemme de Morse ♠

Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans \mathbb{R}^n , de classe C^1 , tel que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

3.2 Conditions sous contraintes [BER] p.191 → 195

Théorème 31 ♠ Théorème des extrema liés ♠

Soit $S = \{x \in \mathcal{U} \mid g(x) = 0\}$, où $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 . On suppose que, pour tout $x \in W$, $Dg(x)$ est surjective. Soit aussi $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

Si p est un point critique de $f|_S$, alors il existe une forme linéaire $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$Df(p) = \lambda \circ Dg(p)$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons $Df(p)(v) = \lambda(Dg(p)(v))$, ou encore, en écrivant $\lambda(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$: il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (dits des multiplicateurs de Lagrange) tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(p)(v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Dg_i(p)(v)$$

Application 32 Grâce au théorème des extrema liés, on peut démontrer de façon amusante le théorème spectral :

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

Application 33 Inégalité arithmético-géométrique
Soient x_1, \dots, x_n des nombres réels positifs. On a

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

[GOUan] p.319-320

Mise en boîte à peu de frais

Pour un volume donné, le parallélépipède rectangle d'aire minimum est le cube. [ROU] p.406 → 408

Application 34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_2 = \left(\sum_{i,j} m_{i,j}^2\right)^{1/2}$, où $m_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice M . Alors le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ de norme minimale. [GOUan] p.321

4 Utilisation de l'holomorphic : Principe du maximum [ML3an] p.442-443

Proposition 35 Propriété de la moyenne
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U} . Pour tout disque fermé $\overline{D}(a, r) \subset \mathcal{U}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Théorème 36 Principe du maximal local
Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U} et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local en a , alors f est constante sur un voisinage de a .

Corollaire 37 Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U} connexe et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum en a , alors f est constante sur \mathcal{U} .

Théorème 38 Soient \mathcal{U} un ouvert connexe borné de \mathbb{C} et f une fonction continue sur $\overline{\mathcal{U}}$ et holomorphe sur \mathcal{U} . On pose $M = \max_{\partial\mathcal{U}} |f(z)|$. Alors

$$\forall z \in \mathcal{U}, |f(z)| \leq M$$

De plus, s'il existe un point de \mathcal{U} en lequel le maximum est atteint, alors f est constante sur \mathcal{U} .

5 Optimisation numérique

5.1 Méthode de Newton [ROU] p.152 → 156

Théorème 39 ♠ Méthode de Newton ♠

• Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 , telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0, \forall x \in [c, d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Alors pour $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I, (x_n)$ converge à l'ordre 2 vers a .

• De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a, d]$, la méthode converge et on a :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2 \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

[ROU] p.152

5.2 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

Théorème 40 Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$

avec $f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, y \in \mathbb{R}^n$

sont équivalents.

Définition 41 Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k Ar^k \\ \alpha_k = \frac{\|r^k\|^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 42 ♠ La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour toute matrice symétrique définie positive.

Lemme 43 ♠ Inégalité de Kantorovitch ♠

Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} \|x\|^4$$

Illustrations

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :