Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Mohamed NASSIRI

Un développement asymptotique d'une fonction f dans un certain voisinage est une somme finie de fonctions de référence qui vont nous donner une bonne approximation du comportement de la fonction f dans le voisinage considéré.

Parmi les développements asymptotiques, les développements limités occupent une place importante. Le fait de pouvoir additionner, multiplier, diviser, composer, dériver et intégrer les développements limités est une aubaine. On va pouvoir obtenir des développements limités d'autres fonctions sans trop d'effort.

En restant dans l'intégration, la méthode de Laplace est un résultat remarquable de développement asymptotique de l'intégrale d'une fonction qui dit que si une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ "s'écrase rapidement vers 0" lorsque $x \to b$, alors la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$ est principalement donnée par la valeur f au voisinage de a.

Avec les séries, et plus particulièrement les comparaisons de séries et d'intégrale, on peut obtenir le célèbre développement asymptotique de la série harmonique.

Les applications ne s'arrête pas à l'analyse. Par exemple, on a le très connu résultat en algèbre suivant : $\pi(x) \sim x/\ln x$ (où π est la fonction qui compte le nombre de nombres premiers inférieurs ou égal à x).

Références

[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[FGNan1] Analyse 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Développement asymptotique de la série harmonique
Méthode de Laplace
Méthode de Newton

Dans toute la leçon, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Développements asymptotiques et fonctions

1.1 Développements asymptotiques [GOUan] p.86-87

Définition 1 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle échelle de comparaison un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions définies au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et vérifiant la propriété suivante : si $f, g \in \mathcal{E}$, alors $f = g$, ou bien $f = o(g)$, ou bien $g = o(f)$.*

Exemple 2 *Au voisinage de $+\infty$ ou 0, on prend souvent les échelles de comparaison suivantes :*
- $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), et
- $x \mapsto x^\alpha(\ln x)^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

Définition 3 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ un fonction, x_0 un point d'accumulation de I et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle développement asymptotique à k termes de f (par rapport à une échelle de comparaison $\mathcal{E}$) au voisinage de x_0 toute expression de la forme*

$$c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_kf_k$$

vérifiant
(i) $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$,
(ii) $f_1, ..., f_k \in \mathcal{E}$ avec $\forall i,\ f_{i+1}(x) \underset{x\to x_0}{=} o(f_i(x))$,
(iii) $f(x) \underset{x\to x_0}{=} c_1f_1(x) + ... + c_kf_k(x) + o(f_k(x))$
Lorsqu'il existe un développement asymptotique est unique et c_1f_1 est la partie principale (ou l'équivalent) de f au voisinage de x_0.

Exemple 4 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour toute fonction f continue, 2π-périodique et de classe C^k, les coefficients de Fourier $c_n(f)$ vérifient*

$$c_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{|n^k|}\right)$$

[ELAM] p.306

1.2 Développements limités [GOUan] p.87→89

Définition 5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $0 \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, tels que, au voisinage de 0,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Remarque 6 *Un développement limité est aussi un développement asymptotique par rapport à l'échelle de comparaison constitué des fonctions $x \mapsto x^0$ $(n \in \mathbb{N})$*

Proposition 7 *- Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors il est unique.*
- Si f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0, alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0, et $f'(0) = a_1$.

Remarque 8 *L'existence d'un développement limité d'ordre $n \geq 2$ n'assure pas l'existence de $f''(0)$. Par exemple, la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

n'est pas deux fois dérivable et pourtant vérifie $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

Proposition 9 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ $(0 \in I)$ une fonction admettant un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

- Si f est pair, tous les termes a_k d'indices impairs sont nuls.
- Si f est impair, tous les termes a_k d'indices pairs sont nuls.

Proposition 10 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction n fois dérivable en 0, alors f admet le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 suivant*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Corollaire 11 *On a les développements limités d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 suivants :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ...$$
$$... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

Application 12 *Soit P_n le périmètre du polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle unité. Alors*

$$P_n = 2\pi - \frac{\pi^3}{3n^2} + \frac{\pi^5}{60n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

1.3 Opérations élémentaires sur les développements limités [GOUan] p.88-89

Proposition 13 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ $(0 \in I)$ deux fonctions admettant un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 :*

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n), \qquad g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où P_n et Q_n sont des fonctions polynomiales de degré $\leq n$. Alors
- $f + g$ admet un développement limité d'ordre n donné par $(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + o(x^n)$,
- fg admet un développement limité d'ordre n donné par $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n vérifie $P_n Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$ avec $\deg(R_n) \leq n$.
- Si $g(0) = Q_n(0) \neq 0$, f/g admet un développement limité d'ordre n donné par $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n est le quotient de la division selon les puissances croissantes de P_n par Q_n à l'ordre n.
- Soient $g : I \to \mathbb{R}$ $(0 \in I)$ et $f : J \to \mathbb{R}$ telle que $g(I) \subset J$ deux fonctions admettant respectivement un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de 0 et de g(0) :

$$g(x) = g(0) + P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(g(0) + t) = Q_n(t) + o(t^n)$$

où P_n et Q_n sont des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ avec $P_n(0) = 0$. Alors
$f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n donné par $(f \circ g)(x) = R_n(x) + o(x^n)$, où R_n vérifie $P_n \circ Q_n = R_n + X^{n+1} S_n$ avec $\deg(R_n) \leq n$.

Exemple 14

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$$

2 Applications à l'intégration

2.1 Intégrations et dérivations des développements limités [GOUan] p.88 → 90

Proposition 15 *Intégration terme à terme :*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ $(0 \in I)$ une fonction dérivable sur I telle qu'on ait au voisinage de 0 :

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f admet le développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de 0 suivant :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1})$$

Exemple 16 *En intégrant respectivement les développements limités de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1+x^2}$, on obtient*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Proposition 17 *Dérivation terme à terme :*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ($0 \in I$) une fonction $n \geq 2$ dérivable en 0 telle qu'on ait au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f' admet le développement limité d'ordre $n-1$ au voisinage de 0 suivant :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1})$$

Remarque 18 *Sans l'hypothèse sur $f^{(n)}(0)$, le résultat est faux. Par exemple, la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

admet le développement limité d'ordre 2 $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ et pourtant $f'(x)$ qui existe au voisinage de 0 n'admet pas de développement limité au au voisinage de 0 (car f' n'a pas de limite en 0).

2.2 Relations de comparaison [GOUan] p.159→169

Théorème 19 *Soient $I = [a, b[$ (avec $-\infty < a <\leq +\infty$) et $f, g : I \to \mathbb{R}$ ($0 \in I$) deux fonctions continues par morceaux.*
Si $\int_a^b g(t)$ diverge, alors lorsque $x \to b^-$,

$$f = O(g) \Rightarrow \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right),$$

$$f = o(g) \Rightarrow \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$f \sim g \Rightarrow \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \sim \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

Si $\int_a^b g(t)$ converge, alors lorsque $x \to b^-$,

$$f = O(g) \Rightarrow \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right),$$

$$f = o(g) \Rightarrow \int_x^b f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b g(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$f \sim g \Rightarrow \int_x^b f(t)\mathrm{d}t \sim \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 20 *On a le développement asymptotique suivant, lorsque $x \to +\infty$:*

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + ... + \frac{(k-1)!x}{\ln^k x} + o\left(\frac{x}{\ln^k x}\right)$$

2.3 Méthode de Laplace [ROU] p.349→351

Théorème 21 ♠ *Méthode de Laplace* ♠
Soit $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f[a, b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\mathrm{d}x$
Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 22 *Formule de Striling :*
Soit $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x \ln t - t}\mathrm{d}t$. Alors

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}$$

3 Développements asymptotiques et suites

3.1 Suites récurrentes

Définition 23 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. (u_n) est dite suite récurrente si elle est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue.* **[ELAM] p.38**

Proposition 24 *Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $f(l) = l$.* **[ELAM] p.38**

Théorème 25 ♠ *Méthode de Newton* ♠
• *Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.*
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
• *De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a, d]$, la méthode converge et on a :*

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

[ROU] **p.152**

3.2 Séries [ELAM] p.82→92

Définition 26 *On appelle* <u>*série télescopique*</u> *associée à une suite* (a_n), *la série* $\sum u_n$, *où* $u_n = a_n - a_{n-1}$

Proposition 27 *Soit* $\sum u_n$ *une série télescopique associée à une suite* (a_n). *Alors la série* $\sum u_n$ *et la suite* (a_n) *sont de la même nature, et en cas de convergence, on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} u_n - a_0$$

Exemple 28

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Théorème 29 <u>*Règle de comparaison*</u> *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq 0$. *Alors*
1) si la série $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge et on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

2) si la série $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Théorème 30 <u>*Règle d'équivalence*</u> *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$ *lorsque* $n \to +\infty$. *Alors*
1) Les séries sont de même nature.
2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.
3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Théorème 31 <u>*Règle de domination*</u> *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs telles que* $u_n = O(v_n)$ *(resp.* $u_n = o(v_n)$*) lorsque* $n \to +\infty$.
Si la série $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge et on a*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \text{ lorsque } n \to +\infty$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)\right)$$

Théorème 32 *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction positive et décroissante.*
Alors la série $\sum f(n)$ *(avec* $n \geq a$*) et l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)$ *sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 33 ♠ <u>*Développement asymptotique de la série harmonique*</u> ♠
On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n}$ *pour* $n \geq 1$.
Alors le développement asymptotique de H_n *à quatre termes est :*

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où γ *est la constante d'Euler.* [**FGNan1**] **p.145**

Questions

Exercice : On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2) Donnez un équivalent de u_n.

Solution : 1) Comme $u_0 \geq 0$, alors $u_1 \geq 0$. Par récurrence immédiate, on montre que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-u_n} \leq 1$ et donc que la suite (u_n) est décroissante. La suite (u_n) est donc convergente, de limite $l \geq 0$. Par continuité de la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, on a $l = le^{-l}$, d'où $l = 0$.

2) Si $u_0 = 0$, il est clair que $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si $u_0 > 0$, alors $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, considérons $\alpha > 0$. On a alors,

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} = \frac{1}{u_n^\alpha e^{-\alpha u_n}} = \frac{1}{u_n^\alpha}(1 + \alpha u_n + o(u_n))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \alpha u_n^{1-\alpha} + o(u_n^{1-\alpha})$$

Avec $\alpha = 1$, on a, $\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$ et d'après le théorème de Cesàro, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_0 + \ldots + v_{n-1}}{n} = 1 \underset{\text{télescopage}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}\right) = 1$$

Exercice : Expression intégrale de la constante γ d'Euler :
Soit $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \mathrm{d}x$ pour tout $t > 0$.
1) Calculer $\Gamma'(1)$.
2) Montrer que

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \Gamma'(1) + o(1) \text{ lorsque } y \to 0$$

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + o(1) \text{ lorsque } y \to 0$$

En déduire que

$$\Gamma'(1) = -\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$$

3) En utilisant l'intégrale de Frullani

$$\ln(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1 - e^{-nx}}{x}\right) \mathrm{d}x,$$

montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Solution :

1) Pour tout $t > 0$, la fonction $t \mapsto \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous signe intégral. Par suite,

$$\Gamma'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-x}x^{t-1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-x}e^{(t-1)\ln(x)}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$$

Ainsi,

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

2) Soit $0 < y < 1$.

•

$$\begin{aligned}
\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \ln\left(\frac{1}{y}\right) &= \int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_y^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_y^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \\
&= \underbrace{[\ln(x)(e^{-x}-1)]_y^1}_{\to 0 \text{ lorsque } y \to 0} + \underbrace{\int_y^1 \ln(x)e^{-x}\mathrm{d}x}_{\to \int_0^1 \ln(x)e^{-x}\mathrm{d}x \text{ lorsque } y\to 0} \\
&\quad + \underbrace{[\ln(x)e^{-x}]_1^{+\infty}}_{=0} + \int_1^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\mathrm{d}x \\
&\underset{y\to 0}{\to} \int_0^{+\infty} \ln(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma'(1)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + \Gamma'(1) + o(1) \text{ lorsque } y \to 0 \qquad (1)$$

•

$$\begin{aligned}
\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x = [\ln(1-e^{-x})]_y^{+\infty} &= -\ln(1-e^{-y}) \\
&= -\ln(1-(1-y+o(y))) \\
&= -\ln(y+o(y)) \\
&= -\ln(y) \underbrace{-\ln(1+o(1))}_{=o(1)} \\
&= \ln\left(\frac{1}{y}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{1}{y}\right) + o(1) \text{ lorsque } y \to 0 \qquad (2)$$

•

$$\begin{aligned}
(2)-(1) &\Leftrightarrow \int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x = -\Gamma'(1) + o(1) \text{ lorsque } y \to 0 \\
&\Leftrightarrow \Gamma'(1) = -\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

3) Démontrons la formule de l'intégrale de Frullani pour $b > 0$:

$$\ln(b) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x}_{=I(b)}$$

On a $I'(b)=\int_0^{+\infty} e^{-bx}\mathrm{d}x=\frac{1}{b}$ et $I(1)=0$. Donc $I(b)=\frac{1}{b}$. Pour $b=n+1$, on obtient :

$$\ln(n+1)=\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1-e^{-nx}}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\left(\int_0^{+\infty} e^{-kx}\mathrm{d}x\right)-\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1-e^{-nx}}{x}\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n+1} e^{-kx}-e^{-x}\left(\frac{1-e^{-nx}}{x}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}\left(\frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\right)-e^{-x}\left(\frac{1-e^{-nx}}{x}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}(1-e^{-nx})\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\text{par le théorème de convergence dominée, on a :}\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=-\Gamma'(1)
\end{aligned}$$
