

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Mohamed NASSIRI

Le calcul intégral est présent dans plusieurs branches des mathématiques. Le calcul intégral le plus originel (scolairement) est le calcul à l'aide de primitives. Il nous dit que si F est une primitive de f sur un intervalle $[a, b]$, alors ce même calcul nous conduit également aux *intégrations par parties*. Cette dernière méthode nous permet de calculer les célèbres intégrales de Wallis.

Le *théorème de Fubini* nous permet d'invertir des symboles \int / \int sous certaines conditions. La jolie formule suivante est déduite de ce théorème : Pour $0 < a < b$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln b - \ln a$$

Une autre méthode, très importante également est le *changement de variables*. Elle consiste à "changer les variables" d'intégration pour obtenir une intégrale plus simple à calculer. Une des applications célèbres de ce théorème (avec un zeste de Fubini) est l'*intégrale de Gauss* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Ensuite, on voit quelques méthodes qui utilisent la convergence des suites et séries. Le *théorème de convergence monotone*, le *lemme de Fatou*, et le *théorème de convergence dominée* nous permettent d'invertir les symboles \lim et \int .

Puis, en utilisant la régularité, on a également le *théorème de continuité sous le signe intégral* et le *théorème de dérivabilité sous le signe intégral*. Mais également du côté de l'analyse complexe, on a le *théorème d'holomorphie sous le signe intégral*. Un très bon exemple qui utilise ces théorèmes est la fonction Gamma d'Euler. Dans le cas complexe, on obtient, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, que la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$

Toujours, du côté de l'analyse complexe, on a comme résultat le *théorème des résidus* qui nous permet de calculer l'intégral d'une fonction seulement à partir des résidus de la fonction. On donne l'exemple de l'intégrale

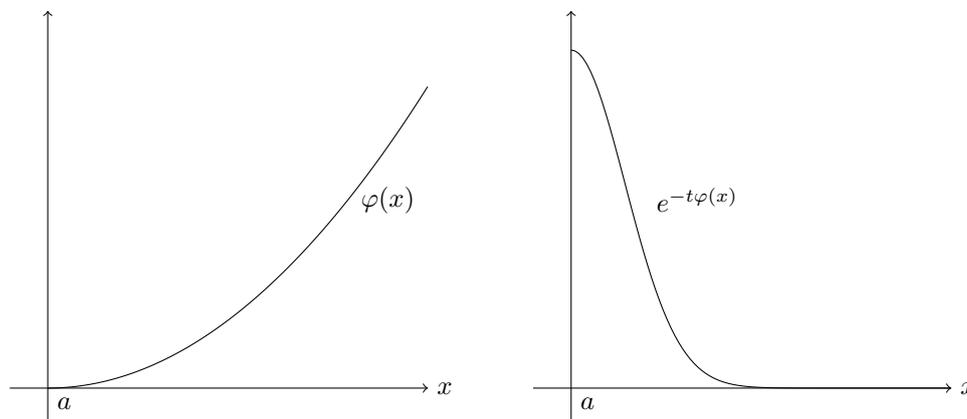
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

qui, sans la méthode des résidus, est un calvaire à calculer ...

Les méthodes numériques nous donnent divers moyens de calculer $\int_a^b f(t) dt$ notamment grâce aux méthodes de Newton-Cotes qui consiste à remplacer la fonction à intégrer par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points où l'on a discrétisé l'intervalle $[a, b]$. Bien évidemment, l'intérêt de ces méthodes est leur convergence quand le pas de discrétisation tend vers 0 mais également le fait qu'on puisse contrôler l'erreur commise pour un certain pas h .

La méthode de Laplace nous permet d'obtenir un résultat asymptotique pour le calcul d'une intégrale. On peut donner une interprétation assez simple de la méthode de Laplace. En remarquant que, pour t

assez grand, la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$ décroît rapidement, la méthode de Laplace dit que *grosso modo* la contribution essentielle à l'intégrale provient d'un voisinage du point a qui est l'abscisse du maximum de la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$. Un dessin vaut mille mots (et surtout le baratin précédent ...).



Références

- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [CAND] Calcul intégral, Bernard Candelpergher
- [HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠
- [ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Méthode de Laplace

Dans cette leçon, E est un espace de Banach sur \mathbb{K} ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} non réduit à un singleton. *une primitive de $f(x)$*

$f(x)$	$F(x)$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{ch} x$	$-\operatorname{sh} x$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x $
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

1 Méthodes internes

1.1 Primitive [GOUan] p.123 → 133

Théorème 1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'application

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est de classe C^1 sur $[a, b]$ et on a

$$\forall x \in [a, b], F'(x) = f(x)$$

Corollaire 3 Toute application continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ admet au moins une primitive F , et pour toute primitive F de f , on a

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 4

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$$

Application 5 *Inégalité de Young*

Exemple 2 Quelques primitives ... ($F(x)$ désigne Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable strictement

croissante telle que $f(0) = 0$. Alors

(i) Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$$

(ii) Pour tout $a, b > 0$

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$$

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $f(a) = b$.

1.2 Intégration par parties

Théorème 6 Soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1 . Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Application 7 Formule de Wallis :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Alors, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right]^2 = \pi$$

et donc

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

1.3 Théorème de Fubini [ML3an] p.258-259

Théorème 8 Soient (X, \mathcal{M}, μ) et (Y, \mathcal{N}, ν) deux espaces mesurés σ -finis.

1. Tonelli :

Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -mesurable. Alors,

(i) pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{N} -mesurable,

(ii) pour tout $y \in Y$, la fonction $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{M} -mesurable,

(iii) la fonction

$$g : X \rightarrow [0, +\infty] \\ x \mapsto \int_Y f_x(y)d\nu(y)$$

est \mathcal{M} -mesurable,

(iv) la fonction

$$h : Y \rightarrow [0, +\infty] \\ y \mapsto \int_X f_y(x)d\mu(x)$$

est \mathcal{N} -mesurable.

(v) Enfin, on

$$\int_X g(x)d\mu(x) = \int_Y h(y)d\nu(y) \\ = \int_{X \times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

2. Fubini :

Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -intégrable. Alors,

(i) pour μ -presque tout $x \in X$, la fonction $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}$ est ν -intégrable,

(ii) pour ν -presque tout $y \in Y$, la fonction $f_y : X \rightarrow \mathbb{C}$ est μ -intégrable,

(iii) la fonction g définie μ -presque partout par

$$g : X \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_Y f_x(y)d\nu(y)$$

est μ -intégrable,

(iv) la fonction h définie ν -presque partout par

$$h : Y \rightarrow \mathbb{C} \\ y \mapsto \int_X f_y(x)d\mu(x)$$

est ν -intégrable.

(v) Enfin, on

$$\int_X g(x)d\mu(x) = \int_Y h(y)d\nu(y) \\ = \int_{X \times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

(i.e.)

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y)d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ = \int_Y \left(\int_X f(x, y)d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ = \int_{X \times Y} f(x, y)d(\mu \otimes \nu)(x, y)$$

Exemple 9 Pour $0 < a < b$, la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln b - \ln a$$

1.4 Changement de variables [GOUan] p.334-335

Théorème 10 (Admis) Théorème de changement de variables :

Soient U un ensemble mesurable compact de \mathbb{R}^n , et

φ un C^1 -difféomorphisme de $\overset{\circ}{U}$ sur $\varphi(\overset{\circ}{U})$, tel que φ et son jacobien $J(\varphi)$ se prolonge continûment sur U . Alors $V = \varphi(U)$ un compact mesurable et pour toute fonction continue $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\int_V f(v)dv = \int_U f(\varphi(u))|J(\varphi)(u)|du$$

Remarque 11 Dans la pratique, on utilise souvent le théorème sous la forme suivante :
Soient $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, on a

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

Corollaire 12 Passage en coordonnées polaires :
Dans \mathbb{R}^2 , on désigne par $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ les coordonnées polaires et $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonnées cartésiennes.
Soit D (resp. Δ) un compact de \mathbb{R}^2 représenté en coordonnées cartésiennes (resp. coordonnées polaires). Alors,

$$\int_D f(x, y)dx dy = \iint_{\Delta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

Application 13 Calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

2 Méthodes externes

2.1 Convergence des suites et séries [ML3an] p.239 → 261

(X, \mathcal{M}, μ) est un espace mesuré.

Théorème 14 Théorème de convergence monotone
Soit $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors f est mesurable, et on a

$$\int_X f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n$$

Corollaire 15 Soit $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$. Alors f est intégrable si et seulement si la suite croissante $(\int_X f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas, on a

$$\int_X f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n$$

Théorème 16 Lemme de Fatou

Soit $(f_n : X \rightarrow [0, +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int_X (\liminf f_n) = \liminf \left(\int_X f_n \right)$$

Théorème 17 Théorème de convergence dominée
Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré complet et $(f_n : X \rightarrow \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que :

(i) La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite

$f(x)$ pour presque tout x .

(ii) Il existe une fonction $g : X \rightarrow [0, +\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ pour presque tout x .

Alors, la fonction f est intégrable sur X et on a

- 1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| = 0$
- 2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n = \int_X f$

2.2 Utilisation de la régularité

Théorème 18 Théorème de continuité sous le signe intégral

Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré, (E, d) un espace métrique et $a \in E$. On considère une fonction $f : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est \mathcal{M} -mesurable.

(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue au point a .

(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(x, y)| \leq g(y) \forall x \in E$ et pour presque tout $y \in X$.

Alors l'application

$$F : E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \int_X f(x, y)d\mu(y)$$

est définie et continue en a . [ML3an] p.275

Théorème 19 Dans la pratique ...

Soient I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et (E, d) un espace métrique.

On considère une fonction $f : E \times I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall x \in E$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .

(ii) $\forall t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .

(iii) il existe une fonction positive g , continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(x, y)| \leq g(y) \forall x \in E$.

Alors l'application

$$F : E \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$$

est définie et continue sur E . [GOUan] p.157

Exemple 20 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)dt$$

est continue sur \mathbb{R}_+ . [ML3an] p.277

Théorème 21 Théorème de dérivabilité sous le signe intégral

Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On considère une fonction $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall x \in I$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable.

(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I .

(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq g(y) \forall x \in I$ et pour presque tout $y \in X$.

Alors l'application

$$F : E \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(y)$$

est définie et dérivable sur I , et on a

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) d\mu(y)$$

[ML3an] p.276

Théorème 22 *Dans la pratique ...*

Soient I un intervalle de \mathbb{R} d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et J un intervalle de \mathbb{R} . On considère une fonction $f : J \times I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall x \in J$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .

(ii) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème 7.

Alors l'application

$$F : J \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_a^b f(x, y) dt$$

est définie et de classe C^1 sur J , et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dt$$

[GOUan] p.157

Exemple 23 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur \mathbb{R}_+ par

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) dt$$

est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . [ML3an] p.277

Corollaire 24 *Sans l'hypothèse de domination*

Soient $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} et J un intervalle de \mathbb{R} . On considère une fonction $f : J \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue sur $J \times [a, b]$. Alors l'application

$$F : J \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_a^b f(x, y) dt$$

est continue sur J .

Si de plus, f est dérivable par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times [a, b]$, alors F est de classe C^1 sur J , et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dt$$

[GOUan] p.158

Exemple 25 *Fonction Gamma - cas réel*

Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x > 0, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

[GOUan] p.158

Théorème 26 *Théorème de d'holomorphie sous le signe intégral*

Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et D un ouvert de \mathbb{C} . On considère une fonction $f : D \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall z \in D$, l'application $y \mapsto f(z, y)$ est mesurable.

(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est holomorphe dans D .

(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z, y)| \leq g(y) \forall z \in D$ et pour presque tout $y \in X$.

Alors l'application

$$F : D \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_X f(z, y) d\mu(y)$$

est définie et holomorphe dans D , et on a

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, y) d\mu(y)$$

[MLan] p.279

Exemple 27 *Fonction Gamma - cas complexe*

Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re} z > 0$, la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re} z > 0\}$

[ML3an] p.279

2.3 Théorème des résidus [CAND] p.113 → 121

Théorème 28 Soit \mathcal{U} un ouvert non vide et $a \in \mathcal{U}$. Soit f une fonction analytique/holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \{a\}$. Pour tout disque fermé $\bar{D}(a, R)$ ($R > 0$), inclus dans \mathcal{U} , on a pour tout $z \in D(a, R) \setminus \{a\}$

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Ce développement est unique et est appelé développement de Laurent de f en a .

La série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m}(z-a)^{-m}$$

s'appelle la partie singulière de f en a .

Les coefficients c_n et c_{-m} sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$c_{-m} = \frac{r^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{im\theta} d\theta \quad \text{pour } m \geq 1$$

où $0 < r < R$ est quelconque.

Définition 29 Soient \mathcal{U} un ouvert, $a \in \mathcal{U}$ et f une fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U} \setminus \{a\}$. Le coefficient c_{-1} du développement de Laurent de f en a s'appelle le résidu de f en a , il est noté $\text{Res}(f, a)$.

Théorème 30 Théorème des résidus

Soit \mathcal{U} un ouvert simplement connexe, a_1, a_2, \dots, a_n des points de \mathcal{U} et f une fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Soit γ un lacet de $\mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tel que pour tout i le lacet γ entoure une fois le point a_i (c'est-à-dire est homotope dans $\mathcal{U} \setminus \{a_i\}$ à un cercle centré en a_i). Dans ce cas, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i)$$

Application 31

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Corollaire 32 Soit \mathcal{U} un ouvert simplement connexe et f une fonction analytique/holomorphe dans \mathcal{U} . Soit γ un lacet de \mathcal{U} entourant une fois les zéros de f .

Alors le nombre de zéros de f , comptés avec leur multiplicité, entourés par γ est

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

3 Méthodes numériques et asymptotiques

3.1 Méthode de Newton-Cotes [HUB2] p.1 → 8

Principe 33 On se donne une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ d'un intervalle $[a, b]$. On a donc

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \int_{-1}^1 f(\alpha_k) dt$$

$$\text{avec } \alpha_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} + t \frac{x_{k+1} - x_k}{2}.$$

Une méthode de Newton-Cotes consiste à se donner une formule de quadrature dite élémentaire de la forme suivante :

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \sim \sum_{i=0}^p \omega_i g(s_i)$$

où s_i désignent les $p+1$ points équirépartis sur l'intervalle $[-1, 1]$:

$$s_i = -1 + \frac{i}{2p}$$

et d'approcher alors $\int_a^b f(x) dx$ par

$$\int_a^b f(x) dx \sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k})$$

$$\text{avec } x_{i,k} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} + s_i \frac{x_{k+1} - x_k}{2}$$

Proposition 34 La formule de quadrature élémentaire d'ordre p est obtenue en remplaçant la fonction g par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points s_i . En notant L_i , le $i^{\text{ième}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points s_i :

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

les formules de quadrature élémentaires sont par conséquent données par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \sim \sum_{i=0}^p g(s_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt \sim \sum_{i=0}^p \omega_i g(s_i)$$

où $\omega_i = \int_{-1}^1 L_i(t) dt$.

Exemple 35 voir Tableau 1

Théorème 36 Convergence des méthodes de Newton-Cotes

Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle de discrétisation $[a, b]$. On se donne une famille de discrétisation de $[a, b]$

$$a = x_0^h < x_1^h < \dots < x_N^h = b$$

de pas $h = \max_{k=0, \dots, N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$.

Soit $T_p^h(f)$ la formule de quadrature d'ordre p associée :

$$T_p^h(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1}^h - x_k^h) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k}^h)$$

Alors $T_p^h(f)$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$ lorsque le pas h de la discrétisation tend vers zéro.

Théorème 37 *Erreur de quadrature*

On note $T_{[a,b]}^{p,N}(f)$ la formule de quadrature d'ordre p , associée à la discrétisation de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$:

$$T_{[a,b]}^{p,N}(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=0}^p \omega_i f(x_{i,k})$$

Si f est une fonction de classe C^{p+1} , et si on note h le pas de la discrétisation $h = \max_{k=0,\dots,N} |x_{k+1}^h - x_k^h|$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_{[a,b]}^{p,N}(f) \right| \leq C_p (b-a) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_\infty$$

où C_p ne dépend que de p .

3.2 Comportement asymptotique : méthode de Laplace [ROU] p.349
→ 351**Théorème 38** ♠ *Méthode de Laplace* ♠

Soit $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0 . On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$
Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 39 *Formule de Stirling :*

Soit $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x \ln t - t} dt$. Alors

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-x} \sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2\pi} x^{x+1/2} e^{-x}$$

Illustrations

Méthodes	Coefficients	$\int_{-1}^1 g(t)dt$	$\int_a^b g(x)dx$
Rectangles à gauche	$p = 0$ $s_0 = -1$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(-1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k)$
Rectangles à droite	$p = 0$ $s_0 = 1$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1})$
Point milieu	$p = 0$ $s_0 = 0$ $\omega_0 = 2$	$\sim 2g(0)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)$
Trapèzes	$p = 1$ $s_0 = -1, s_1 = 1$ $\omega_0 = 1, \omega_1 = 1$	$\sim g(-1) + g(1)$	$\sim \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) (f(x_k) + f(x_{k+1}))$
Simpson	$p = 2$ $s_0 = -1, s_1 = 0, s_2 = 1$ $\omega_0 = \frac{1}{3}, \omega_1 = \frac{4}{3}, \omega_2 = \frac{1}{3}$	$\sim \frac{1}{3} (g(-1) + 4g(0) + g(1))$	$\sim \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right)$

Tableau 1 : Formules élémentaires les plus classiques

Questions

Exercice : Formule de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

Montrer que :

1)

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right]^2 = \pi$$

2)

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Solution : 1) On procède par intégrations par parties, et on a pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx &= [-\sin^{n-1} x \cos^2 x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Puisque $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on a donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 1} \quad (\dagger)$$

2) En remarquant que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, \pi/2]$, on a

$$0 \leq \sin^{2p+1} x \leq \sin^{2p} x \leq \sin^{2p-1} x$$

on en déduit en intégrant cette inégalité entre 0 et $\pi/2$, que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1} \Rightarrow 1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} \quad (\dagger)$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$$

Avec (\dagger) , on en déduit la formule de Wallis,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left[\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right]^2 = \pi$$

2) A partir de la formule de Wallis, on en déduit que

$$\frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \sim \frac{1}{\sqrt{p\pi}}$$

Puis, avec (\dagger) , on en déduit

$$I_{2p} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

D'où le résultat.

Exercice : Inégalité de Young

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable strictement croissante telle que $f(0) = 0$. Alors

(i) Pour tout $x > 0$, on a

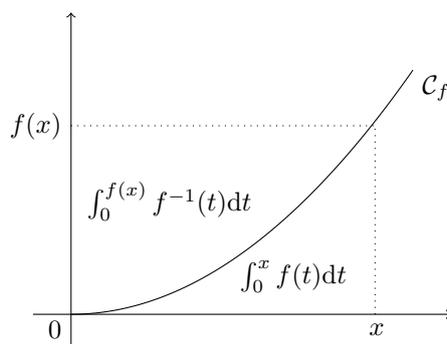
$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$$

(ii) Pour tout $a, b > 0$

$$\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$$

On a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si $f(a) = b$.

Solution : (i) La formule peut paraître horrible, cependant son interprétation géométrique est très simple :



Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x) \end{aligned}$$

φ est dérivable et on a

$$\forall x \geq 0, \varphi'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - (f(x) + xf'(x)) = 0$$

Donc φ est une fonction constante, et comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que φ est identiquement nulle. D'où le résultat.

(ii) Soit $b > 0$. Considérons cette fois-ci l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt - ab \end{aligned}$$

φ est dérivable et on a $\varphi'(a) = f(a) - b$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Comme f est strictement croissante, on a donc

$$\forall a < f^{-1}(b), \varphi'(a) < 0 \quad \text{et} \quad \forall a > f^{-1}(b), \varphi'(a) > 0$$

Comme $\varphi'(f^{-1}(b)) = 0$, d'après ce qui précède, on a donc

$$\forall a < f^{-1}(b), \varphi(a) > 0, \quad \varphi(f^{-1}(b)) = 0 \quad \text{et} \quad \forall a > f^{-1}(b), \varphi(a) > 0$$

Et on a égalité pour $a = f^{-1}(b)$ ((i.e) $b = f(a)$). D'où le résultat.

Exercice : Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta$$

Solution : On va utiliser le théorème des résidus en faisant apparaître des exponentielles complexes.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 4} d\theta \\ &= \frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{2i\theta} + 4e^{i\theta} + 1} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{i} \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{2}{z^2 - 4z + 1} dz \end{aligned}$$

Les singularités de la fonction $f : z \mapsto \frac{2}{z^2 - 4z + 1}$ sont les zéros de la fonction $g : z \mapsto z^2 - 4z + 1$. Ce sont les points $\{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$. Cependant, seul le point $2 - \sqrt{3}$ est entouré (une fois) par le cercle $\mathcal{C}(0, 1)$, on a donc

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{2}{z^2 - 4z + 1} dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, 2 - \sqrt{3})$$

Comme $2 - \sqrt{3}$ est un zéro simple de g , c'est donc un pôle simple de f . Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2 - \sqrt{3}) &= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} (z - (2 - \sqrt{3})) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} (z - (2 - \sqrt{3})) \frac{2}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2 - \sqrt{3}} \frac{(z - (2 - \sqrt{3}))}{\cancel{(z - (2 - \sqrt{3}))} (z - (2 + \sqrt{3}))} \frac{2}{\cancel{(z - (2 - \sqrt{3}))} (z - (2 + \sqrt{3}))} \\ &= -\frac{2}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$