

Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références

- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
[CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas
[FILB] Analyse numérique : Algorithmes et étude mathématique, Francis Filbet
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠

Développements

Convergence des méthodes itératives
Méthode du gradient à pas optimal
Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Exemple 5 Etude de la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.

1 Généralités sur les suites récurrentes

1.1 Suites récurrentes réelles [ELAM] p.38-39

Définition 1 Soient I un intervalle de \mathbb{R} . (u_n) est dite suite récurrente si elle est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

Proposition 2 Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $f(l) = l$.

Exemple 3 Si la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$, sa limite est nécessairement égale à -1 ou 3 .

Proposition 4 Soit (u_n) une suite réelle définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que $f(I) \subset I$.

- 1) Si f est croissante sur I , alors la suite (u_n) est monotone.
- 2) Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.

1.2 Suites récurrentes vectorielles [GOUan] p.192 → 194

Définition 6 Soient (E, d) un espace métrique et $h \in \mathbb{N}^*$. Une suite (u_n) à valeurs dans E est dite récurrente d'ordre h si on peut écrire

$$\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-h})$$

où f est une application de E^h dans E (les premières valeurs u_0, \dots, u_{h-1} étant données).

Proposition 7 Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite récurrente d'ordre $h \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\forall n \geq h, \quad u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_{n-h})$$

où f est une application de E^h dans E . Si la suite (u_n) converge vers une limite l et si l'application f est continue au point (l, \dots, l) , alors on a $f(l, \dots, l) = l$.

Définition 8 On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans E vérifie une récurrence linéaire (homogène) d'ordre h à coefficients constants si

$$\forall n \geq h, \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_h u_{n-h} \quad (\#)$$

avec $(a_1, \dots, a_h) \in \mathbb{C}^h$

Proposition 9 L'équation

$$X^h - a_1 X^{h-1} - \dots - a_h = 0$$

s'appelle équation caractéristique de la récurrence (#). Si on note r_1, \dots, r_q ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ ses multiplicités respectives, alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant (#) est l'ensemble des suites de la forme

$$u_n = P_1(n)r_1^n + \dots + P_q(n)r_q^n$$

où pour tout $1 \leq i \leq q$, P_i est un polynôme vérifiant $\deg(P_i) < \alpha_i$.

Exemple 10 Réurrences linéaires à coefficients constants d'ordre 2 :

$$u_0, u_1, \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad (b)$$

L'équation caractéristique correspondante est

$$x^2 - ax - b = 0 \quad (E)$$

- Si (E) possède deux racines (réelles) distinctes x_1, x_2 , alors les suites vérifiant (b) sont de la forme

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

où λ et μ sont déterminés par u_0 et u_1 .

- Si (E) possède une racine double x , alors les suites vérifiant (b) sont de la forme

$$u_n = (n\lambda + \mu)x^n$$

où λ et μ sont déterminés par u_0 et u_1 .

- Si (E) possède deux racines complexes $\rho e^{i\theta}, \rho e^{-i\theta}$, alors les suites vérifiant (b) sont de la forme

$$u_n = \rho^n (\gamma \cos(n\theta) + \delta \sin(n\theta))$$

où γ et δ sont déterminés par u_0 et u_1 .

2 Suites récurrentes et points fixes

2.1 Théorèmes de point fixe

Définition 11 Soient $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est contractante (ou k -contractante) s'il existe $k \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in E^2, d_F(f(x), f(y)) \leq kd_E(x, y)$. [ML3an] p.97

Théorème 12 Théorème du point fixe de Picard
Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe. [ML3an] p.97

Exemple 13 Ce théorème est faux si l'on suppose seulement $d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y)$. Par exemple, la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Mais si l'on ajoute de la compacité, il redevient vrai. [ML3an] p.97

Application 14 Le système

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2} \sin(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution. [ML3an] p.692

Proposition 15 Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ pour lequel f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe. [ML3an] p.98

Application 16 ♠ Théorème de Cauchy-Lipschitz local ♠

Soit $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle I voisinage de t_0 dans \mathbb{R} et une unique application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. [GOUal] p.354

2.2 Classifications des points fixes

Proposition-Définition 17 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $l \in \overset{\circ}{I}$ un point fixe de f . Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| < 1$, on dit que l est un point fixe attractif. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que :

Toute suite (u_n) de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in]l - \alpha, l + \alpha[\\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est définie et converge vers l . [DTZ] p.151

Remarque 18 Cas particulier $f'(l) = 0$:
Supposons de plus que f soit de classe C^2 et que $|f'| \leq M$ sur I , à l'aide d'un développement à l'ordre 2, on a

$$|u_n - l| \leq \frac{2}{M} \left(\frac{1}{2} M |u_0 - l| \right)^{1/2}$$

En particulier, si on choisit u_0 tel que $|u_0 - l| \leq \frac{1}{5M}$, alors

$$|u_n - l| \leq \frac{2}{M} 10^{-2^n}$$

Ainsi, 10 itérations suffisent pour obtenir plus de 1000 décimales !

Le point l est parfois appelé point fixe superattractif. [DEM] p.95-96

Proposition-Définition 19 Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $l \in \overset{\circ}{I}$ un point fixe de f . Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| > 1$, on dit que l est un point fixe répulsif.

Il existe alors $\alpha > 0$ tel que :
Si une suite (u_n) de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est convergente vers l , alors elle est stationnaire.
Si, de plus, l'application f est injective alors elle est constante. [DTZ] p.152

Remarque 20 Cas douteux $|f'(l)| = 1$:
- Exemple 1 : $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi/2]$. On aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

- Exemple 2 : $f(x) = \text{sh}(x)$, $x \in [0, +\infty[$. On aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

[DEM] p.96

2.3 Vitesse de convergence [ELAM] p.39 → 43

Définition 21 On dit qu'une suite (u_n) converge géométriquement vers 0 si elle est dominée par une suite géométrique (k^n) avec $0 < k < 1$.

Théorème 22 Critère de D'Alembert
Soit (u_n) une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ tel que $0 < k < 1$. Alors la suite (u_n) converge géométriquement vers 0.

Exemple 23 Etude des suites récurrentes : (u_n) définie $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f est de classe C^1 et qui admet un point fixe attractif ((i.e.) $0 < |f'(\alpha)| < 1$). (u_n) converge géométriquement vers α

Proposition 24 Critère de Cauchy
Une suite (u_n) de nombres réels positifs converge géométriquement si et seulement si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$.

Définition 25 On dit qu'une suite (u_n) converge lentement vers 0 si elle est minorée par une suite du type (A/n^α) avec A et α des nombres réels strictement positifs.

Définition 26 On dit qu'une suite (u_n) tend vers 0 avec une convergence (au moins) quadratique si elle est dominée par une suite (k^{2^n}) avec $0 < k < 1$.

Théorème 27 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergente vers 0. On suppose que la suite (u_{n+1}/u_n^2) a une limite finie (ou simplement qu'elle est bornée). Alors la convergence de (u_n) est quadratique.

3 Applications à la recherche de zéros

3.1 Dichotomie [FILB] p.95-96

Méthode 28 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.
On pose $m = \frac{a+b}{2}$ et on calcule $f(m)$.
Si $f(a)f(m) < 0$, il existe $\bar{x} \in [a, m]$ solution de $f(\bar{x}) = 0$.
Si $f(a)f(m) > 0$, alors $f(b)f(m) < 0$ il existe $\bar{x} \in [m, b]$ solution de $f(\bar{x}) = 0$.
En itérant ce procédé, on obtient l'algorithme de la dichotomie.

3.2 Méthode de Newton [ROU] p.152 → 156

Théorème 29 ♠ Méthode de Newton ♠
• Soit $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2 , telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c, d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.
Alors pour $x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a - \alpha, a + \alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a .
• De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a, d]$, la méthode converge et on a :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2 \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

[ROU] p.152

4 Applications aux méthodes numériques

4.1 Méthodes itératives

Définition 30 Si $(M, N) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tel que l'on a la décomposition dite décomposition régulière $A = M - N$, on dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite de premier terme u_0 et définie par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$$

converge. [DUM] p.167

Remarque 31 On utilise parfois la notation sui-

Illustrations

Nom de la méthode	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode itérative	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E + F)$	$J = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$	$Du_{k+1} = (E + F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D - E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1}F$	$(D - E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation ($\omega \neq 0$)	$A = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

Tableau 1 : Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :