Exemples de parties denses et applications.

Mohamed NASSIRI

La densité est une propriété topologique intéressante et très utile pour les démonstrations. Elle formalise la notion d'*être très proche*. On entend souvent *"Par densité de* Truc *dans* Machin*, la propriété* Bazar *qui est vraie dans* Truc *est vraie dans* Machin*"*. Encore faut-il avoir un peu de continuité ...

Un des résultats les plus connus de densité est la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Et en dimension supérieur, c'est le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce dernier résultat permet d'obtenir que le polynôme caractéristique $\chi_{MN} = \chi_{NM}$ (avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et que $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\ {}^t\mathrm{com}(X)H)$.

Dans les espace des fonctions, les résultats de densité sont très intéressants ! Dans l'espace des fonctions continues sur un compact $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ (donc avec $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact), le théorème de Stone-Weierstrass donne une condition très simple pour qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ soit dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

La densité permet de prolonger des applications ! Par exemple, les fonctions uniformément continues définie sur un sous-espace dense H de H se prolonge à tout l'espace E. De plus, le prolongement est encore uniformément continue.

Du côté des formes linéaires, on a le théorème de Hahn-Banach qui permet de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace (qui n'est pas nécessaiement dense !). Ce théorème a un corollaire intéressant pour la densité : Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace normé $(E, ||.||)$. Alors

$$H \text{ est dense dans } E. \Leftrightarrow \text{ Toute } f \in E^* \text{ nulle sur } H \text{ est identiquement nulle.}$$

Dans les espaces L^p, la convolution va jouer un rôle important dans la densité. En effet, à partir des approximations de l'unité, on va pouvoir notamment montrer que l'espace des fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Pour finir, dans les espaces de Hilbert, la notion quasi-omniprésente. En tout cas, dès que l'on parle de *bases hilbertiennes*, on a automatiquement de la densité par définition de ces dernières. En effet, pour qu'une base $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H soit hilbertienne, en plus d'être orthonormée, elle doit être *totale*, c'est-à-dire dire que $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H. Par exemple, la convergence d'une série de Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ vers f n'est pas toujours garantie. Un cas particulier est donné par l'espace L^2. Dans cet espace, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$" est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x !

Références

[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed
[NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠
[FGNag1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Théorème de Riesz-Fischer
Théorème de Féjer
De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1 *Soient A et B des parties d'un espace topologique E. On dit que* <u>*A est dense dans B*</u>*, lorsque $B \subset \overline{A}^E$, ou, ce qui est équivalent, lorsque tout ouvert de E contenant un point de B rencontre A.*

1 Densité en dimension finie

1.1 Densité dans $\mathbb{K}$ [GOUan] p.197-198

Proposition 2 *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*
$\mathbb{Q}[i]$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Proposition 3 *Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit discret (et de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$), soit dense dans $\mathbb{R}$.*
En particulier, un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 4 *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.*

1.2 Densité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Proposition 5 *Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Application 6 *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$\chi_{MN} = \chi_{NM}$$

Application 7 *L'application déterminant est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :*

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\,{}^t\mathrm{com}(X)H)$$

[**ROU**] **p.74 – 75 → 331**

Théorème 8 ♠ <u>**De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**</u> ♠
• *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application*

$$\begin{aligned} f_A \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ X &\mapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$
• *Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $f(XY) = f(YX)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$.*
• *$\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.* [**FGNag1**] **p.329 → 331**

2 Densité et espaces de fonctions

2.1 Fonctions continues sur un compact [ML3an] p.141 → 144

Proposition 9 *La suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} P_0 &= 0 \\ P_{n+1}(u) &= P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0,1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$.

Théorème 10 <u>*Théorème de Stone-Weierstrass (forme réelle)*</u>
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 11 <u>*Théorème de Stone-Weierstrass (forme complexe)*</u>
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
(iii) Pour toute fonction f de $\mathcal{A}$, la fonction conjuguée $\overline{f}$ est dans $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 12 ♠ <u>*Théorème de Weierstrass*</u> ♠
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. **[GOUan] p.284 → 286**

Théorème 13 ♠ <u>*Théorème de Féjer*</u> ♠
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

[ELAM2] p.185-186, 190-191

Remarque 14 *Les deux précédents théorèmes utilisent dans leur démonstration la convolution qui est définie plus loin.*

2.2 Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense [ML3an] p.95-96

Théorème 15 *Soient* (E, d_E) *un espace métrique,* (F, d_F) *un espace métrique complet,* A *une partie dense de* E *et* f *une application uniformément continue de* A *dans* F*. Alors il existe une unique application continue* $\tilde{f}$ *de* E *dans* F *qui coïncide avec* f *sur* A*. De plus,* $\tilde{f}$ *est aussi uniformément continue.*

Application 16 *Soient* F *un espace de Banach et* $\mathcal{E}([a,b], F)$ *l'espace des fonctions en escalier de* $[a,b]$ *à valeurs dans* F *muni de la norme uniforme. L'application*

$$\mathcal{I} \ : \ \mathcal{E}([a,b], F) \to F$$
$$f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est une application linéaire continue. L'espace $\mathcal{E}([a,b], F)$ *est dans l'espace* $\mathcal{R}([a,b], F)$ *des fonctions en réglées sur* $[a,b]$*. Ainsi, l'application* $\mathcal{I}$ *se prolonge à* $\mathcal{R}([a,b], F)$ *en une application uniformément continue, ce qui permet de définir l'intégrale de Riemann d'une fonction* f *de* $\mathcal{R}([a,b], F)$*, comme la valeur en* f *du prolongement.*

2.3 Prolongement des formes linéaires [NEHH] p.308 → 314

Définition 17 *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et* $p : E \to \mathbb{R}$ *une application.*
(i) On dit que p *est* <u>*positivement homogène*</u> *si pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda \geq 0$*, on a* $p(\lambda x) = \lambda p(x)$*.*
(ii) On dit que p *est* <u>*sous-additive*</u> *si pour tout* $x, y \in E$*, on a* $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$*.*

Théorème 18 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient E *un* $\mathbb{R}$*-e.v. et* $p : E \to \mathbb{R}$ *une application positivement homogène et sous-additive. Soient* H *un sous-espace vectoriel de* E *et* f *une forme linéaire sur* H *telle que pour tout* $x \in H$*, on ait* $f(x) \leq p(x)$*. Alors il existe une forme linéaire* $\tilde{f}$ *sur* E *prolongeant* f *(i.e.)* $\tilde{f}(y) = f(y)$ *pour tout* $y \in H$*, et telle que* $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ *pour tout* $x \in E$*.*

Théorème 19 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et* $p : E \to \mathbb{R}_+$ *une semi-norme. Soient* H *un sous-espace vectoriel de* E *et* f *une forme linéaire sur* H *telle que pour tout* $x \in H$*, on ait* $|f(x)| \leq p(x)$*. Alors il existe une forme linéaire* $\tilde{f}$ *sur* E *prolongeant* f *(i.e.)* $\tilde{f}(y) = f(y)$ *pour tout* $y \in H$*, et telle que* $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ *pour tout* $x \in E$*.*

Théorème 20 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient $(E, ||.||)$ *un espace normé et* $\mathbb{K}$*-e.v. et* H *un sous-espace vectoriel de* E *muni de la norme induite. Pour tout* $f \in H^*$*, il existe* $\tilde{f} \in E^*$ *dont la restriction à* H *soit* f *et telle que* $||\tilde{f}|| = ||f||$*. Bien entendu, si* H *est dense dans* E*,* $\tilde{f}$ *est unique.*

Corollaire 21 *Soit* $(E, ||.||)$ *un espace normé. Alors on a :*
1) Pour tout $x \in E \backslash \{0\}$*, il existe une forme linéaire continue* f *de* E *telle que* $||f|| = 1$ *et* $f(x) = ||x||$*. En particulier, si* $E \neq \{0\}$*, alors on a* $E^* \neq \{0\}$
2) Soient $x, y \in E$*. Si pour tout* $g \in E^*$*, on a* $g(x) = g(y)$*, alors* $x = y$*.*

Corollaire 22 *Soient* $(E, ||.||)$ *un espace normé,* H *un sous-espace vectoriel de* E*, et* $x \in E \backslash \overline{H}$*. Alors il existe une forme linéaire continue* f *sur* E *telle que* $||f|| = 1$*,* $f(x) = \mathrm{d}(x, H) \neq 0$ *et* $f(H) = 0$*.*

Corollaire 23 *Soient* $(E, ||.||)$ *un espace normé et* H *un sous-espace vectoriel de* E*. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) H *est dense dans* E*.*
(ii) Toute $f \in E^*$ *nulle sur* H *est identiquement nulle.*

2.4 Espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 → 124

Définition 24 *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$*. On appelle* <u>*translatée de* f *par* a</u> *la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

Proposition 25 *(i) Soient* $f \in L^p(\mathbb{R})$*,* $1 \leq p \leq +\infty$*, alors* $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $||\tau_a f||_p = ||f||_p$*.*
(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$*,* $1 \leq p < +\infty$*, alors* $\lim\limits_{a \to 0} ||\tau_a f - f||_p = 0$

Théorème 26 <u>$L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ *:*</u>
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*.*
Pour presque tout x*, l'application* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable.*
La fonction $f * g$*, qui est définie presque partout par*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

est intégrable, et

$$||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$$

Théorème 27 <u>$L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ *:*</u>
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R})$*,* $1 \leq p < +\infty$*.*
Pour presque tout x*, l'application* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable.*
La fonction $f * g$*, qui est définie presque partout par*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

appartient à $L^p(\mathbb{R})$*, et*

$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$$

Théorème 28 $L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
*Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_1 ||g||_\infty$$

Théorème 29 $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
*Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
La fonction $f * g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_2 ||g||_2$$

Proposition 30 *L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}), +, ., *)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution.* **[ELAM2] p.85**

Définition 31 *On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$(i)\ \forall j \in \mathbb{N}^*,\quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x) \mathrm{d}x = 1$$

$$(ii)\ \forall \epsilon > 0,\quad \lim_{j \to +\infty} \int_{|x|>\epsilon} \varphi_j(x) \mathrm{d}x = 0$$

[ELAM2] p.86

Exemple 32

$$\begin{aligned} \textit{Approximation de Laplace} &\ :\ \varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|} \\ \textit{Approximation de Cauchy} &\ :\ \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1 + j^2 x^2} \\ \textit{Approximation de Gauss} &\ :\ \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}} \end{aligned}$$

[ELAM2] p.86

Théorème 33 *Théorème d'approximation*
*Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.
(i) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.* **[ELAM2] p.87**

Proposition 34 *(i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ et*

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}$$

[FAR] p.123-124

Théorème 35 *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.* **[FAR] p.125**

3 Espaces de Hilbert et bases hilbertiennes

Définition 36 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de vecteurs de H est dite
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H.* **[ML3an] p.331**

Proposition 37 *1) Toute famille orthormée est libre
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$.* **[ML3an] p.331**

Définition 38 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \int_I |x|^n \rho(x)\, \mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. **[OBJ] p.110**

Théorème 39 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|} \rho(x)\, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. **[OBJ] p.140 → 143**

3.1 Application aux séries de Fourier

Définition-Proposition-Rappels 40 *(i) $L^2_{2\pi}$, l'ensemble des fonctions de L^2 et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert. **[ELAM2] p.170 → 194**
*(ii) Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de vecteurs de H est dite
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H.* **[ML3an] p.331**
*(iii) 1) Toute famille orthormée est libre
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$.* **[ML3an] p.331**

Théorème 41 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par* $\underline{e_n}$ *l'application définie par*

$$e_n(x) = e^{inx}$$

Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Définition 42 *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

Théorème 43 *Formule de Parseval*
Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Questions

Exercice : 1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer que G est soit discret (et de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$), soit dense dans $\mathbb{R}$ (En particulier, un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\mathbb{R}$, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$).
3) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $a/b \notin \mathbb{Q}$.
4) *Application :*
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans un ensemble E. Une période de f est un réel p tel que $f(x+p) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(f)$ des périodes de f est soit discret, soit dense dans $\mathbb{R}$.
b) Quelques (contre-)exemples :
i) Donner un exemple de fonction qui admet un groupe de périodes discret, puis un exemple de groupe de périodes dense.
ii) Donner un exemple de fonction non constante pour laquelle $\mathcal{P}(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
c) Montrer que, si f est continue, alors $\mathcal{P}(f)$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
d) Montrer que l'ensemble des périodes $\mathcal{P}(f)$ d'une application continue f soit est $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$ et f est constante, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ telle que $\mathcal{P}(f) = \alpha\mathbb{Z}$.

Solution : 1) Nous allons utiliser la fonction partie entière E. Par définition de cette fonction, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

Ainsi, pour $k = 1, ..., n$, on a donc

$$E(kx) \leq kx \leq E(kx) + 1 \quad \Rightarrow \quad kx - 1 \leq E(kx) \leq kx$$

Puis, en sommant cet encadrement pour k variant de 1 à n, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \sum_{k=1}^{n} kx$$

$$\Leftrightarrow \quad x\frac{n(n+1)}{2} - n \leq \sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{n(n+1)}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \quad x\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) \leq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}x$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$, par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx) = \frac{x}{2}$$

En notant $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E(kx)$, chaque u_n est un rationnel (le numérateur et le dénominateur sont des entiers). Comme la suite (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$, alors la suite de rationnels $(2u_n)$ tend vers x. Chaque réel $x \in \mathbb{R}$ peut être approché d'aussi près que l'on veut par des rationnels, donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Considérons $G_+^* := G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = \inf G_+^*$. On distingue deux cas :
- Si $\alpha > 0$: Alors $\alpha \in G_+^*$. En effet, si $\alpha \notin G_+^*$, on a par définition de la borne inférieure

$$\exists m, n \in G_+^*, \quad \alpha < m < n < 2\alpha$$

donc $0 < n - m < \alpha$, et comme G est un groupe additif, $n - m \in G_+^*$, ce qui est absurde car $\alpha = \inf G_+^*$.
Comme $\alpha = \inf G$ et que G est un groupe, on a $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in G$. Si n est la partie entière de x/α, on a

$$\alpha n \leq x < \alpha(n+1) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x - \alpha n < \alpha$$

Comme $x - \alpha n \in G$, ceci entraine $x - \alpha n = 0$ car $\alpha = \inf G_+^*$, autrement dit $x = \alpha n \in \alpha\mathbb{Z}$. Donc $G = \alpha\mathbb{Z}$.

<u>- Si $\alpha = 0$:</u> Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $m < n$ deux nombres réels. Comme $0 = \inf G_+^*$, il existe $x \in G$ tel que $0 < x < n - m$, et alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $m < px < n$. En effet, en posant $p = E\left(\frac{m}{x}\right) + 1$, on a donc

$$p - 1 \leq \frac{m}{x} < p \quad \Rightarrow \quad (p-1)x \leq m < px$$

Ainsi,

$$m < px \leq (p-1)x + x \leq m + x < m + (n - m) = n$$

Donc $]m, n[\cap G \neq \varnothing$, et ceci quelque soit l'intervalle ouvert $]m, n[$ de $\mathbb{R}$, d'où la densité de G dans $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
<u>$\Rightarrow$:</u> Supposons $a/b \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers non nuls premiers entre eux p et q tels que $a/b = p/q$. On a donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = b\left(\mathbb{Z} + \frac{a}{b}\mathbb{Z}\right) = b\left(\mathbb{Z} + \frac{p}{q}\mathbb{Z}\right) = \frac{b}{q}\left(q\mathbb{Z} + p\mathbb{Z}\right) = \frac{b}{q}\mathbb{Z}$$

Ainsi, G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Absurde ! Donc $a/b \notin \mathbb{Q}$.

<u>$\Leftarrow$:</u> Supposons $a/b \notin \mathbb{Q}$ et G non dense dans $\mathbb{R}$. Alors, par la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$. En particulier, $a \in G$, donc il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $a = \alpha p$. De même, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = \alpha q$. Donc $a/b = p/q \in \mathbb{Q}$. Absurde ! G est donc dense dans $\mathbb{R}$.

4)a) Comme $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On en déduit la réponse grâce à question 2).

b)i) Les fonctions *sin* et *cos* possèdent un groupe de périodes discret.
Les fonctions constantes vérifient $\mathcal{P}(f) = \mathbb{R}$ et donc on un groupe de périodes dense dans $\mathbb{R}$.
ii) La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, notée $\chi_{\mathbb{Q}}$, vérifie $\mathcal{P}(\chi_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\mathcal{P}_x = \{p \in \mathbb{R} \mid f(p + x) = f(x)\}$$

est un fermé. En effet, c'est l'image réciproque du singleton $\{f(x)\}$ par l'application continue $p \mapsto f(x+p)$ (composée d'applications continues). Puis, on a

$$\mathcal{P}(f) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} \mathcal{P}_x$$

qui est fermé (comme intersection de fermés).

d) Comme $\mathcal{P}(f)$ est un sous-groupe additif <u>fermé</u> de $\mathbb{R}$. On en déduit la réponse grâce à question 2) (cas particulier).

Exercice : Théorèmes de Hahn-Banach
1) Version 1 : Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p : E \to \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f (*i.e.*) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $\tilde{f}(y) = p(x)$ pour tout $x \in E$.
2) Version 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $p : E \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f (*i.e.*) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.
3) Version 3 : Soient $(E, ||.||)$ un espace normé et $\mathbb{K}$-e.v. et H un sous-espace vectoriel de E muni de la norme induite. Pour tout $f \in H^*$, il existe $\tilde{f} \in E^*$ dont la restriction à H soit f et telle que $||\tilde{f}|| = ||f||$. Bien entendu, si H est dense dans E, $\tilde{f}$ est unique.

Solution : 1) *Etape 1 :* Montrons d'abord que si $a \in E\backslash H$, alors il existe une application linéaire $g : H \oplus \mathbb{R}a \to \mathbb{R}$ qui prolonge f telle que pour tout $z \in H \oplus \mathbb{R}a$, on ait $g(z) \leq p(z)$.
Soit donc $z \in H \oplus \mathbb{R}a$, il existe un unique couple $(x,t) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $z = x + ta$.
$\to$ Comme on souhaite que g soit linéaire, on doit nécessairement avoir $g(z) = g(x) + tg(a)$.
$\to$ Comme on souhaite que g prolonge f, on doit nécessairement avoir $g(x) = f(x)$.
On est donc amené à considérer $g(z) = f(x) + tg(a)$.
On a donc $\alpha = g(a)$ et on veut de plus $g(z) \leq p(z)$ (*i.e.*) $f(x) + t\alpha \leq p(x+ta)$.
Finalement, on cherche donc à déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in H$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $f(x) + t\alpha \leq p(x+ta)$.

Montrons, qu'en fait, il suffit de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait

$$\begin{cases} f(x) - \alpha \leq p(x-a) \\ f(y) + \alpha \leq p(y+a) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - p(x-a) \leq \alpha \leq p(y+a) - f(y)$$

En effet, supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in H$, on ait

$$f(x) - p(x-a) \leq \alpha \leq p(y+a) - f(y)$$

. Soit $t > 0$, on obtient donc

$$\begin{cases} f(x) - t\alpha = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - \alpha\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} - a\right) = p(x - ta) \\ f(x) + t\alpha = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + a\right) = p(x + ta) \end{cases}$$

Existence de α :
Pour tout $x, y \in H$, on a

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x-a) + p(y+a)$$

D'où

$$f(x) - p(x-a) \leq p(y+a) - f(y)$$

Par suite,

$$\sup_{x \in H}\{f(x) - p(x-a)\} \leq \inf_{y \in H}\{p(y+a) - f(y)\}$$

Ainsi, en prenant

$$\alpha \in [\sup_{x \in H}\{f(x) - p(x-a)\}, \inf_{y \in H}\{p(y+a) - f(y)\}]$$

on obtient le résultat voulu.

Etape 2 : On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des couples (N, g) où N est un sous-espace vectoriel de E contenant H, $g : N \to \mathbb{R}$ une application linéaire qui prolonge f et pour tout $x \in N$, $g(x) \leq p(x)$.
L'ensemble $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $(H, f) \in \mathcal{E}$. On ordonne $\mathcal{E}$ comme suit

$$(N, g) \leq (N', g') \quad \Leftrightarrow \quad N \subset N' \text{ et } g'_{|N} = g$$

On obtient ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$. Montrons que $\mathcal{E}$ est inductif (*i.e.*) toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$ possède un majorant.
Soit $(N_i, g_i)_{i \in I}$ une partie, indexée par I, totalement ordonnée de $\mathcal{E}$. Alors pour tout $i, j \in I$, soit on a $(N_i, g_i) \leq (N_j, g_j)$, soit on a $(N_j, g_j) \leq (N_i, g_i)$.
Soit $N = \cup_{i \in I} N_i$, alors pour tout $x \in N$, il existe $i \in I$ tel que $x \in N_i$ et on pose $g(x) = g_i(x)$. Alors, on a :
- N est un sous-espace vectoriel de E.
- g est bien définie.
- $(N, g) \in \mathcal{E}$.
- $(N_i, g_i) \leq (N, g)$ pour tout $i \in I$.
Ainsi, (N, g) est un majorant de $\mathcal{E}$ de $(N_i, g_i)_{i \in I}$, donc $\mathcal{E}$ est inductif. Par le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal $(\tilde{N}, \tilde{f})$. Par l'étape 1, on a $\tilde{N} = E$.

2) *Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:* Pour tout $x \in H$, on a

$$f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$$

Par le théorème de Hahn-Banach *version 1*, il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E qui prolonge f telle que pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. D'où

$$-p(x) = -p(-x) \leq -\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(x) \leq p(x)$$

Par conséquent, on a $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

<u>*Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *:*</u> On aura besoin d'un résultat intermédiaire ... En effet, en considérant $(E, ||.||)$ un $\mathbb{C}$-e.v.n., c'est en particulier en $\mathbb{R}$-e.v.n. ! Il y a donc deux notions différentes de dual topologique pour E :
- le dual en tant que $\mathbb{R}$-e.v. $E^*_{\mathbb{R}} = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$
- le dual en tant que $\mathbb{C}$-e.v. $E^*_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$

Heureusement, il est possible d'identifier ces deux espaces :

Proposition : On note $\mathfrak{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui à un nombre complexe $a + ib$ associe sa partie réelle a $(a, b \in \mathbb{R})$.
Alors l'application

$$\begin{aligned} T : E^*_{\mathbb{C}} &\to E^*_{\mathbb{R}} \\ f &\mapsto \mathfrak{Re} \circ f \end{aligned}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire, bijective et isométrique. L'application inverse T^{-1} est définie par :
Pour tout $g \in E^*_{\mathbb{R}}$, on a $T^{-1}(g)(x) = g(x) - ig(ix)$, pour tout $x \in E$.

Démonstration :
T est clairement $\mathbb{R}$-linéaire. Montrons que T est isométrique.
Soit $x \in E$ tel que $||x|| \leq 1$. On a

$$|T(f)(x)| = |\mathfrak{Re}(f(x))| \leq |f(x)| \leq ||f|| \; ||x|| \leq ||f||$$

Donc $||T(f)|| \leq ||f||$. Par ailleurs, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{i\theta}|f(x)|$, d'où $f(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$, et donc

$$T(f)(e^{-i\theta}x) = (\mathfrak{Re} \circ f)(e^{-i\theta}x) = |f(x)|$$

Comme on a $||e^{-i\theta}x|| = |e^{-i\theta}| ||x|| = ||x|| \leq 1$, alors $||T(f)|| \geq |f(x)|$. Donc $||T(f)|| \geq ||f||$, d'où $||T(f)|| = ||f||$.
On en déduit que T est injective.
Soit $g \in E^*_{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Alors $f \in E^*_{\mathbb{C}}$ et on a $T(f) = g$, donc T est surjective. Par conséquent, T est bijective.

$\square$

Revenons à notre théorème de Hahn-Banach *version 2* ... Par notre petit aparté, il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $g : H \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Par ailleurs, on a aussi $|g(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in H$.
Par le premier cas, il existe $\tilde{g} : E \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire qui prolonge g telle que pour tout $x \in E$, on ait $|\tilde{g}(x)| \leq p(x)$. Pour tout $x \in E$, soit $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) - i\tilde{g}(ix)$, alors $\tilde{f}$ est une forme linéaire sur E qui prolonge f.
Montrons que pour tout $x \in E$, on a $\tilde{f}(x) \leq p(x)$. Soit $x \in E$.
Si $\tilde{f}(x) = 0$, alors l'inégalité est triviale.
Si $\tilde{f}(x) \neq 0$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(x) = e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$, d'où $\tilde{f}(e^{-i\theta}x) = |\tilde{f}(x)| \geq 0$. Donc, on obtient

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(e^{-i\theta}x) = \tilde{g}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

3) Pour tout $x \in E$, on pose $p(x) = ||f|| \; ||x||$. Alors p est une semi-norme sur E, et pour tout $x \in H$, on a

$$|f(x)| \leq ||f|| \; ||x|| = p(x)$$

Par le théorème de Hahn-Banach *version 2*, il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E qui prolonge f telle que pour tout $x \in E$, on ait $\tilde{f}(x) \leq p(x) = ||f|| \; ||x||$. Donc $\tilde{f}$ est continue et on a $||\tilde{f}|| \leq ||f||$. D'autre part, pour tout $x \in H$, on a

$$|f(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq ||\tilde{f}||\ ||x|| \quad \Rightarrow \quad ||f|| \leq ||\tilde{f}||$$

Donc, on a $||\tilde{f}|| = ||f||$

