Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

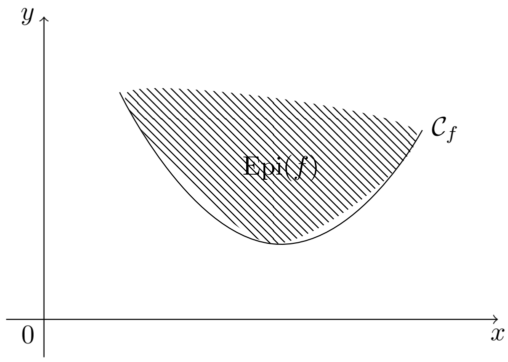
INTRO

On définit également les *fonctions convexes* comme suit :

$f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall a, b \in I,\ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Le lien avec les parties convexes est le suivant : une fonction f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe.
On peut également une notion plus forte de convexité : on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est *logarithmiquement convexe* si la fonction $\log f$ est convexe.



Les fonctions convexes (et concaves) nous permettent d'avoir des inégalités dites *de convexité*. En plus de l'inégalité arithmético-géométrique, on retrouve notamment :

Inégalité de Hölder
Soient p et q deux exposants conjugués. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Inégalité de Minkowski
Soient $p \geq 1$ un nombre réel. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

En revenant aux fonctions convexes, l'algorithme du gradient à pas optimal offre une belle application de la convexité en analyse numérique. A partir d'une matrice A symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$, on peut alors les problèmes suivant sont équivalents

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$
avec $f(y) = \langle Ay, y\rangle - \langle b, y\rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$

On peut donc montrer que pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n,\ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k\rangle} \end{cases}$$

appelé *méthode du gradient à pas optimal* est convergent.

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠

[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[FGNal1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas

Développements
Théorème de Gauss-Lucas
Projection sur un convexe fermé
Méthode du gradient à pas optimal

1 Fonctions monotones

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ est :*
(i) croissante si $\forall x, y \in X$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
(ii) strictement croissante si $\forall x, y \in X$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
(iii) (strictement) décroissante si $-f$ est (strictement) croissante.
(strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante. **[WAR] p.268**

Proposition 2 *Soit $f : X \subset \mathbb{R} \to y \subset \mathbb{R}$ et $g : Y \to \mathbb{R}$. Si f et g sont (strictement) monotones, alors $g \circ f$ est (strictement) monotone.* **[WAR] p.269**

Proposition 3 *(i) La somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.*
(ii) Si f et g sont des fonctions positives et croissantes, la fonction fg est croissante.
(iii) Si f est monotone et garde un signe constant, alors $1/f$ est monotone. **[WAR] p.269**

Exemple 4 *La somme de deux fonctions monotones n'est pas nécessairement monotone, comme le prouve l'exemple $x \mapsto e^x + e^{-x}$.* **[WAR] p.269**

Théorème 5 *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f(I) est un intervalle. **[POM] p.74**

Corollaire 6 *(du théorème des valeurs intermédiaires) Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a, b \in I$. Alors pour tout y compris entre f(a) et f(b), il existe $x \in [a, b]$ tel que f(x)=y.* **[POM] p.74**

Corollaire 7 *Soit f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Remarque 8 *L'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{card} : (\mathcal{P}(E), \subset) &\to (\mathbb{N}, \leq) \\ X &\mapsto \mathrm{card}(X) \end{aligned}$$

est strictement croissante mais non injective. **[HAU] p.11**

Corollaire 9 *Une application continue f d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même (ou bien telle que $[a, b] \subset f([a, b])$) possède au moins un point fixe.* **[POM] p.75**

1.2 Fonctions réciproques [ROM] p.59 → 61

Définition 10 *Si f est une application injective d'un intervalle réel I (non réduit à un point) dans $\mathbb{R}$, elle définit alors une bijection de I sur $f(I)$ et on peut définir sa fonction réciproque notée f^{-1} par :*

$$(y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = f(x))$$

Théorème 11 *Si f est une application continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I, et f est une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse f^{-1} continue strictement monotone de même sens de variation que f.*

Remarque 12 *Sans hypothèse de stricte monotonie, l'intervalle $f(I)$ n'est pas nécessairement de même nature que I. En effet, avec la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $I =]-1, 1[$, on a $f(I) = [0, 1[$. De plus, f n'est pas bijective.*

1.3 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis [ROM] p.137 → 157

Théorème 13 *Théorème de Rolle*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application 14 *Autre démonstration du théorème de Darboux et majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.*

Théorème 15 <u>*Théorème des accroissements finis*</u>
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

Remarque 16 *Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements sont faux dans $\mathbb{C}$*

Application 17 <u>*Sens de variation d'une fonction :*</u>
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I.

1.4 Suites de fonctions monotones

Théorème 18 <u>*Théorèmes de Dini*</u>
1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme. **[GOUan] p.228**

Exemple 19 *La suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} P_0 & = 0 \\ P_{n+1}(u) & = P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0,1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$. **[ML3an] p.141**

2 Fonctions convexes

Dans cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

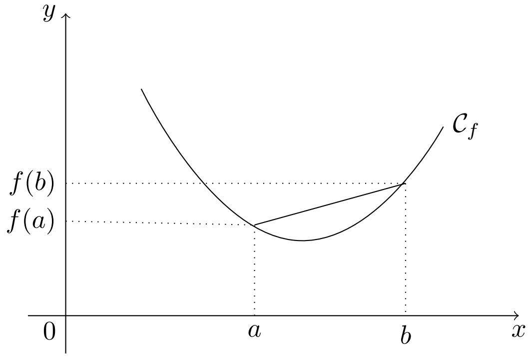
2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 20 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite <u>convexe</u> si*
$\forall a, b \in I, \ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Elle est dite <u>concave</u> -f est convexe.
Lorsque l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0,1[$, on dit que f est <u>strictement convexe</u>.

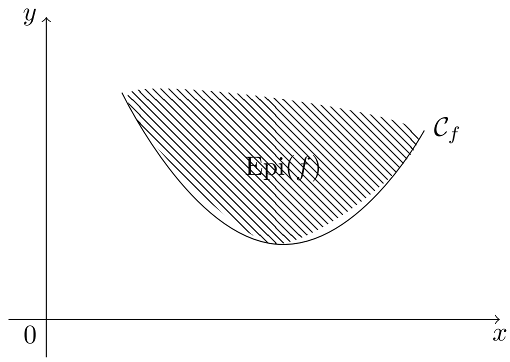
Remarque 21 *L'inégalité de convexité dans la définition se traduit graphiquement par le fait que tous les points du segment $[(a,f(a)),(b,f(b))]$ sont au dessus du graphe de f.*



Définition 22 *On appelle <u>épigraphe</u> d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x,y) \in I \mid y \geq f(x)\}$$

Proposition 23 *La fonction f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe.*



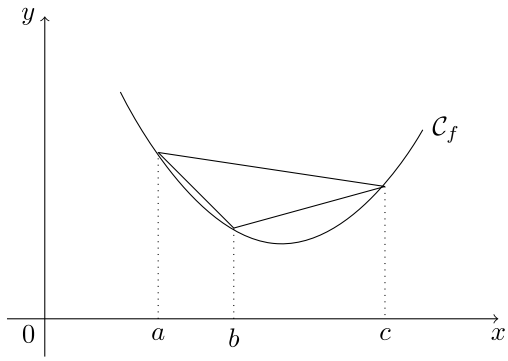
Proposition 24 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application*

$$g_{x_0} : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

Corollaire 25 <u>*Inégalité des trois pentes*</u>
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe et $a, b, c \in I$ tel que $a < b < c$. Alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$



Proposition 26 *Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\overset{\circ}{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\overset{\circ}{I}$ (pas forcément aux bornes de I). De plus, les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur $\overset{\circ}{I}$ et $f'g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$.*

Théorème 27 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est convexe.
(ii) f' est croissante.
(iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

Corollaire 28 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Proposition 29 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors, $\forall x_1, ..., x_n \in I$, $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$*

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$$

2.2 Fonctions logarithmiquement convexes [GOUan] p.101-102

Définition 30 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement convexe si la fonction $\log f$ est convexe.*

Proposition 31 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une application.*
Si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

Proposition 32 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une application.*
f est logarithmiquement convexe si et seulement si l'application $I \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.

Corollaire 33 *Si f et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ sont logarithmiquement convexes, alors $f + g$ aussi.*

3 Applications de la monotonie et de la convexité

3.1 Montonie et suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ [ELAM] p.38-39

Définition 34 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. (u_n) est dite suite récurrente si elle est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f : I \to \mathbb{R}$ est une application continue.*

Proposition 35 *Si la suite (u_n) d'éléments de I converge vers $l \in I$, alors nécessairement $f(l) = l$.*

Exemple 36 *Si la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$, sa limite est nécessairement égale à -1 ou 3.*

Proposition 37 *Soit (u_n) une suite réelle définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose de plus que $f(I) \subset I$.*
1) Si f est croissante sur I, alors la suite (u_n) est monotone.
2) Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés.

Exemple 38 *Etude de la suite définie par $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.*

3.2 Inégalités de convexité

3.2.1 Les classiques

Théorème 39 *Inégalité arithmético-géométrique Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres réels positifs. On a*

$$(x_1 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Corollaire 40 *Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors*

$$(\det A)^{1/n} \leq \frac{\operatorname{tr} A}{n}$$

3.2.2 Inégalités de Jensen, de Hölder et Minkowski dans le cas discret [GOUan] p.95-96

Définition 41 *On appelle couple d'exposants conjugués un couple (p, q) de réels strictement supérieurs à 1 qui vérifient*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On dit aussi que p est l'exposant conjugué de q.
Convention : L'exposant conjugué de 1 est $+\infty$.
[ML3an] p.287

Proposition 42 *Inégalité de Jensen*
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout n-uplet $(x_1,\dots, x_n)$ de I et tout n-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ de $[0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

[DTZ] p.127-128

Proposition 43 *Inégalité de Hölder*
Soient p et q deux exposants conjugués. Pour tout nombres réels positifs $a_1,\dots, a_n$ et $b_1,\dots, b_n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Proposition 44 *Inégalité de Minkowski*
Soient $p \geq 1$ un nombre réel. Pour tout nombres réels positifs $a_1,\dots, a_n$ et $b_1,\dots, b_n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

3.2.3 Inégalités de Jensen, de Hölder et Minkowski dans les espaces L^p [ML3an] p.287 $\to$ 289

Proposition 45 *Inégalité de Hölder*
Soient p et q deux exposants conjugués, et f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0,+\infty]$. Alors

$$\int_X fg\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \leq +\infty$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu μ-presque partout.

Corollaire 46 *Soient p et q deux exposants conjugués.*
Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$, alors le produit fg est dans $L^1(X)$, et on a

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma|f|^p = \delta|g|^q$ ait lieu μ-presque partout.

Corollaire 47 *Supposons que $\mu(X) = 1$. Alors, pour toute f mesurable et $1 \leq p \leq q < +\infty$, on a*

$$||f||_p \leq ||f||_q$$

Corollaire 48 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Si f et g sont dans $L^2(X)$, alors

$$\left|\int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu\right| \leq ||f||_p ||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f = \delta g$ ait lieu μ-presque partout.

Proposition 49 *Inégalité de Minkowski*
Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0,+\infty]$. Alors, pour tout $p \in [1,+\infty]$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Proposition 50 *Inégalité de Jensen*
Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to]a,b[$ une fonction de $L^1(X)$. Alors, si φ est une fonction convexe sur $]a,b[$, on a

$$\varphi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu$$

[ML3an] p.878

3.3 Méthode de Newton [ROU] p.152 $\to$ 156

Théorème 51 ♠ *Méthode de Newton* ♠
• *Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c,d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.*
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
• *De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a,d]$, la méthode converge et on a :*

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \to +\infty$$

[ROU] p.152

3.4 Méthode de gradient [DIM] p.208 $\to$ 212

Théorème 52 *Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes*

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } Ax = b$$

et

$$\textit{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$
$$\textit{avec } f(y) = \langle Ay, y\rangle - \langle b, y\rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sont équivalents.

Définition 53 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \; r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k\rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 54 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 55 ♠ *Inégalité de Kantorovitch* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}||x||^4$$

4 Théorème de Hahn-Banach géométrique [OBJ] p.97-133

Définition 56 *Soit $(H, \langle ., .\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert.*
Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$\mathcal{P} = \{x \in H \mid f(x) = \alpha\}$$

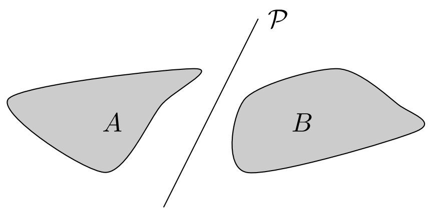
où f est une forme linéaire sur H non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que $\mathcal{P}$ est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.
[BRZ] p.4

Définition 57 *Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $A \subset H$ et $B \subset H$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a*

$$f(x) \leq \alpha, \ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha, \ \forall x \in B$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

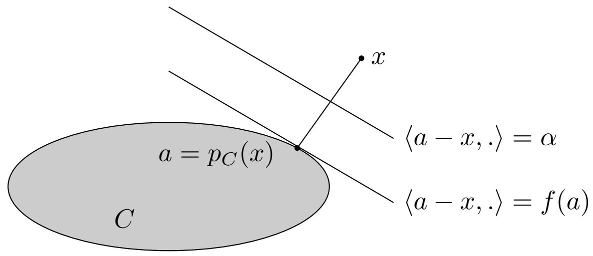
$$f(x) \leq \alpha - \epsilon, \ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon, \ \forall x \in B$$



[BRZ] p.5

Proposition 58 *Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $C \subset H$ une partie non vide convexe et fermé et $x \notin H$.*
On note H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H.
Alors, il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in C, \quad f(x) < \alpha < f(y)$$



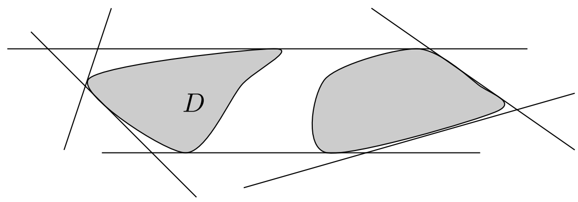
Théorème 59 *Théorème de Hahn-Banach géométrique*
Soient A et B deux convexes non vides disjoints de H. On suppose que A est fermé et B est compact. Alors, il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B (i.e.) qu'il existe $f \in H'$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

Corollaire 60 *Soit D une partie de H. Pour $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $H(f, \alpha)$ le demi-espace*

$$H(f, \alpha) = \{y \in H \mid f(y) \leq \alpha\}$$

Alors, l'enveloppe convexe fermé de D est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent D.



Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :