Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Un type important d'espaces complets sont les espaces de Hilbert. Il s'agit d'une généralisation à la dimension infinie des espaces euclidiens. Les espaces de Hilbert sont très intéressants car on a un petit plus géométrique dans ces espaces : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc.

Le produit scalaire nous permet de définir la notion d'orthogonalité, et celle-ci nous amène, à l'aide de la complétude, aux projections sur des sous-espaces. Ces projections sont intéressantes, car sous certaines hypothèses sur les sous-espaces, on peut décomposer notre espace de Hilbert en somme directe de deux sous-espaces totalement caractérisées par la projection. Plus précisemment, en prenant K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et en notant p_K la projection orthogonale sur K, on a

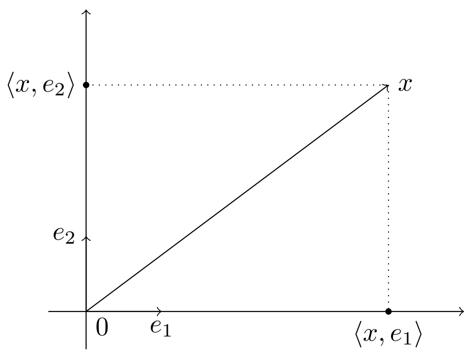
$$H = \mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = K^{\perp} \oplus K$$

Un théorème remarquable mérite d'être mis en avant : le théorème de Riesz-Fréchet. Pour tout vecteur x d'un espace de Hilbert H, la forme linéaire $y \to \langle y, x\rangle$ est linéaire continue sur H (et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sa norme est égale $||x||$). Le théorème de Riesz-Fréchet énonce la réciproque : toute forme linéaire continue sur H s'obtient de cette façon !

La notion de "base hilbertienne" nous permet d'étendre la notion de coordonnées pour une famille $(e_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble infini. Illustrons notre propos sur $\mathbb{R}^2$ où l'on comprend très bien le sens de $\langle x, e_i\rangle$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et $i = 1, 2$ Ainsi, quand on écrit, "pour tout $x \in H$, on a

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i = x\text{''}$$

Il faut s'imaginer une décomposition comme pour le cas $\mathbb{R}^n$ mais en dimension infinie. On dit d'ailleurs que les $x_i := \langle x, e_i\rangle$ sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$.



Un exemple particulier est donné par l'espace L^2. Dans cet espace, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$" est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x !

Pour finir, les *espaces de Sobolev* offre une très belle application aux équations différentielles. Notre point de départ est le suivant : Soient $f \in L^2(]0, 1[)$ et $q \in L^\infty(]0, 1[)$ des fonctions à valeurs positives. On considère le problème

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de classe $C^2([0, 1])$ qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. Le génie de cette méthode n'est pas de chercher des fonctions de "façon locale" mais un espace de fonctions, donc de "façon globale". Les espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ et $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ seront solutions :

Espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \Big\{ u \in C([0,1]) \mid \exists g \in L^2([0,1]), \quad u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \Big\}$$

Espace de Sobolev $\mathcal{H}^1_0([0,1])$

$$\mathcal{H}^1_0([0,1]) = \{ u \in \mathcal{H}^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \}$$

Seul petit hic, on va devoir définir une nouvelle notion de "dérivée" : *dérivée faible*. Les fonctions solutions ne seront pas forcément de classe $C^2([0,1])$. Cependant, si f et q sont des fonctions continues, alors u est une fonction de classe $C^2([0,1])$. Ouf !

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
Projection sur un convexe fermé

1 Espaces de Hilbert

1.1 Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert [ML3al] p.321 → 326

Définition 1 *Un espace de Hilbert $(H, \langle .,. \rangle)$ sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ tel que l'espace vectoriel $(H, ||.|| = \sqrt{\langle .,. \rangle})$ soit complet.*

Exemple 2 *1) $\mathbb{K}^n$ muni du produit scalaire $\langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$ est complet pour la norme associée.*
2) $L^2(X,\mu,\mathbb{C})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\int_X |f|^2}$
3) $l^2(I,\mathbb{K})$ est complet pour la norme définie par $||f|| = \sqrt{\sum_{k\in I} |x_k|^2}$

Proposition 3 *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x,y \in H$. Alors

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq ||x||^2 ||y||^2$$

L'inégalité est une égalité si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non tous deux nuls tels que $\alpha x + \beta y = 0$

Proposition 4 *Identité de polarisation*
Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x,y \in H$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x,y \rangle = \frac{||x+y||^2 + ||x-y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x,y \rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4} + i\frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

Proposition 5 *Identité du parallélogramme*
Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert, et soient $x,y \in H$. Alors,

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

1.2 Orthogonalité [ML3al] p.326 → 330

Définition 6 *Deux éléments $x,y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x,y \rangle = 0$. On note $x \perp y$.*
Deux parties $A, B \subset H$ sont dites orthogonales si $\langle x,y \rangle = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$. On note $A \perp B$.

Proposition 7 *Pour toute partie $A \subset H$, on note*

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in A, \langle x,y \rangle = 0\}$$

$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, appelé orthogonal de A dans H qui vérifie

1) si $B \subset A$, alors $A^\perp \subset B^\perp$
2) $A \subset (A^\perp)^\perp$
3) $\overline{A}^\perp = A^\perp$
4) $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}^\perp$
5) $\overline{\mathrm{vect}(A)} \cap A^\perp = \{0\}$

Théorème 8 ♠ *Projection sur un convexe fermé* ♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x-u|| = \min_{y \in K} ||x-y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x-u, y-u \rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Théorème 9 *Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x-y) \in K^\perp$

Proposition 10 *Soit K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors l'application $p_K : H \to H, x \mapsto p_K(x)$ est une application linéaire continue qui vérifie :*
1) $p_K \circ p_K = p_K$
2) $\mathrm{Im} p_K = K$ et $\mathrm{Ker} p_K = K^\perp$
3) $\mathrm{Id}_H - p_K$ est la projection sur $K^\perp$
4) $\mathrm{Ker} p_K \oplus \mathrm{Im} p_K = H$

Corollaire 11 *1) Si L est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $L \oplus L^\perp = H$*
2) Si $A \subset H$ est une partie quelconque de H, alors $\overline{\mathrm{vect}(A)} \oplus A^\perp = H$ et $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}$. En particulier, si $A = K$ est un sous-espace vectoriel de H, alors

$$\overline{K} \oplus K^\perp = H \quad \text{et} \quad (K^\perp)^\perp = \overline{K}$$

3) Si K est un sous-espace vectoriel de H, alors K est dans H si et seulement si $K^\perp = 0$

Corollaire 12 *Un sous-espace vectoriel K de H est dense dans H si et seulement si toute forme linéaire continue sur H et nulle sur K est nulle sur H.*

1.3 Théorème de Riesz-Fréchet [ML3al] p.330-331

Théorème 13 *Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*
Soit $\varphi : H \to \mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur un espace de Hilbert $(H, \langle ., . \rangle)$. Alors il existe un unique vecteur $x \in H$ tel que, pour tout $y \in H$, $\varphi(y) = \langle y, x \rangle$.
De plus, la norme de l'application linéaire φ vaut $||\varphi|| = ||x||$.

Théorème 14 *Si $\mathcal{F} : L^2(X, \mu, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \mu, \mathbb{K})$, il existe une unique (classe de) fonction(s) $g \in L^2(X, \mu, \mathbb{K})$ telle que, pour toute $f \in L^2(X, \mu, \mathbb{K})$, on ait*

$$\mathcal{F}(f) = \int_X f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}\mu(x)$$

2 Bases hilbertiennes

2.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.331 → 334

Définition 15 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H.

Proposition 16 *1) Toute famille orthormée est libre*
2) $(e_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$.

Proposition 17 *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de H est une base hilbertienne si et seulement si c'est une famille orthonormée maximale pour l'inclusion (i.e.) si $(f_j)_{j \in J}$ est une autre famille orthonormée vérifiant $\{e_i \ : \ i \in I\} \subset \{f_j \ : \ j \in J\}$, alors ces deux parties sont égales.*

Corollaire 18 *Tout espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$ possède une base hilbertienne.*

Proposition 19 *Inégalité de Bessel*
Si $(e_j)_{j \in J}$ est une famille orthonormée d'éléments de H, alors, pour tout $x \in H$, la famille $(|\langle x, e_j \rangle|^2)_{j \in J}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq ||x||^2$$

Théorème 20 *Soit $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormée d'éléments de H. On note*

$$K_J = \overline{\mathrm{vect}((e_j)_{j \in J})}$$

et P_{K_J} la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel fermé K_J. Alors, pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_j \rangle e_j)_{j \in J}$ et on a

$$\sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j = P_{K_J}(x)$$

Corollaire 21 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H.*
(i) Pour tout $x \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H et on a

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i = x$$

On dit que les $x_i := \langle x, e_i\rangle$ sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$.
(ii) Pour tout $x, y \in H$, la famille $(\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{K}$ et on a

$$\sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, y\rangle$$

En coordonnées dans la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$, cela s'écrit

$$\sum_{i\in I} x_i\overline{y_i} = \langle x, y\rangle$$

(iii) Pour tout $x \in H$, la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a

$$\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 = ||x||^2 \quad \text{(égalité de Parseval)}$$

Théorème 22 *Soient $(H, \langle ., .\rangle)$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors H est isomorphe à $l^2(I, \mathbb{K})$.*

2.2 Polynômes orthogonaux

Définition 23 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [**OBJ**] **p.110**

Théorème 24 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. [**OBJ**] **p.140 → 143**

3 Applications au séries de Fourier

3.1 Définitions et premières propriétés [ELAM2] p.170 → 178

Définition-Proposition-Rappels 25 *(i) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
Muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

$(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.
(ii) $L^2_{2\pi}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.
(iii) Par l'inégalité de Hölder, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$$

Définition 26 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par*

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Théorème 27 *Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

Définition 28 *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Remarque 29 *1) Pour $f \in L^2_{2\pi}$, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.*
2) On a également des coefficients de Fourier dits réels ou trigonométriques et donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Définition 30 *Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.*

3.2 Convergence L^2 [ELAM2] p.193-194

Théorème 31 *Formule de Parseval*
Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty}||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$$

Remarque 32 *En coefficients de Fourier réels, la formule de Parseval devient*

$$||f||_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

4 Espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ et $\mathcal{H}^1_0([0,1])$

Motivation 33 *Soient $f \in L^2(]0,1[)$ et $q \in L^\infty(]0,1[)$ des fonctions à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de classe $C^2([0,1])$ qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

où
a est une forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

et L est une forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.

Définition 34 *On appelle espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ l'espace de fonctions défini, sur l'intervalle $[0,1]$ par*

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \Big\{u \in C([0,1]) \mid \exists g \in L^2([0,1]), \; u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t\Big\}$$

On appelle espace de Sobolev $\mathcal{H}^1_0([0,1])$, le sous-espace de $\mathcal{H}^1([0,1])$ défini par

$$\mathcal{H}^1_0([0,1]) = \{u \in \mathcal{H}^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

Remarque 35 *Cette définition est propre à la dimension 1.*

Proposition 36 *Soit $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, il existe une unique fonction $g \in L^2([0,1])$ telle que*

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Définition 37 *La fonction g est alors notée Du et est appelée dérivée faible de u.*

Remarque 38 *Si $u \in C^1([0,1])$, alors $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, et $Du = u'$.*

Remarque 39 *Soit $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, alors pour toute fonction $\phi \in C^1_c([0,1])$,*

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 Du(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

Et réciproquement, si $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$ et qu'il existe $g \in L^2([0,1])$ telle que pour toute fonction $\Phi \in C^1_c([0,1])$,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

alors $g = Du$.

Proposition 40 *(i) L'application ϕ définie par*

$$\phi(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Du(t)Dv(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $u,v \in L^2([0,1])$, est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^1([0,1])$. On le notera $\langle .,. \rangle$.
(ii) Muni de la norme (associé au produit scalaire) :

$$||u||_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}^1([0,1])$ est un espace de Hilbert.

Proposition 41 *Les fonctions de l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ sont höldériennes de rapport $\frac{1}{2}$: pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$*

$$|u(x) - u(y)| \leq ||Du||_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

où $||.||_{L^2}$ désigne la norme dans l'espace $L^2([0,1])$. De plus, l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon continue dans l'espace $C([0,1])$ /

$$||u||_\infty \leq \sqrt{2}||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Proposition 42 *L'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon compacte dans les espaces $C([0,1])$ et $L^2([0,1])$.*

Remarque 43 *L'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ coïncide avec l'espace*

$$\{u \in L^2([0,1]) \mid Du \in L^2([0,1])\}$$

où Du est la dérivée faible de u.

Proposition 44 *L'espace $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1([0,1])$, c'est donc un espace de Hilbert réel.*

Lemme 45 *Inégalité de Poincaré*
Soit $u \in \mathcal{H}^1_0([0,1])$, on a

$$\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t$$

Corollaire 46 *L'application $u \mapsto ||Du||_{L^2}$ définit sur $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ une norme. Cette norme est équivalente à la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$: pour tout $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a*

$$\sqrt{\frac{2}{3}}||u||_{\mathcal{H}^1} \leq ||Du||_{L^2} \leq ||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Définition 47 *Lorsque $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$ est solution du problème $a(u,v) = L(v)$ issu de (†), u est dite solution faible ou une solution variationnelle de (†).*

Théorème 48 *On se donne $f \in L^2([0,1])$ et $q \in L^\infty([0,1])$ avec $q(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$. Alors le problème variationnel*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$.
Si, de plus, f et q sont des fonctions continues, alors u est une fonction de classe $C^2([0,1])$ qui vérifie

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Remarque 49 *Si la forme bilinéaire a n'est plus symétrique, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.*

Théorème 50 *Théorème de Lax-Milgram*
Soit V un espace de Hilbert. On considère a une forme bilinéaire continue coercive sur $V \times V$ et L une forme linéaire sur V.
Alors il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

Exercice : Continuité du produit scalaire
Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de H qui convergent respectivement vers $x, y \in H$.
Montrer que $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\langle x, y \rangle$.

Solution :

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &= \underbrace{||x_n||}_{<\infty} ||y - y_n|| + ||x_n - x|| \underbrace{||y||}_{<\infty}\end{aligned}$$

Par conséquent, comme $||y - y_n|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $||x_n - x|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit donc que

$$\langle x_n, y_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, y\rangle$$

Exercice : Quelques identités
Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace de Hilbert et $x, y, z \in H$. Montrer les identités suivantes :
1) Identité de polarisation
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{2}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors

$$\langle x, y\rangle = \frac{||x+y||^2 - ||x-y||^2}{4} + i\frac{||x+iy||^2 - ||x-iy||^2}{4}$$

2) Identité du parallélogramme

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

3) Identité de la médiane

$$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = \frac{1}{2}||z-y||^2 + 2\left|\left|x - \frac{y+z}{2}\right|\right|^2$$

Solution : 1) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2\end{aligned}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première ligne, on a bien le résultat.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\Re e(\langle x, y\rangle) + ||y||^2 \quad (1)$$
$$||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\Re e(\langle x, y\rangle) + ||y||^2 \quad (2)$$
$$||x+iy||^2 = ||x||^2 + 2\Re e(-i\langle x, y\rangle) + ||y||^2 \quad (3)$$
$$||x-iy||^2 = ||x||^2 - 2\Re e(-i\langle x, y\rangle) + ||y||^2 \quad (4)$$

Or $\mathfrak{Re}(-i\langle x,y\rangle) = \mathfrak{Im}(\langle x,y\rangle)$, et comme $\langle x,y\rangle = \mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + i\mathfrak{Im}(\langle x,y\rangle)$, en effectuant $[(1)-(2)] + [(3)-(4)]$, on obtient bien le résultat.

2) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\langle x,y\rangle + ||y||^2 \end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités, on a le résultat.
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a, pour $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + ||y||^2 \\ ||x-y||^2 &= ||x||^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) + ||y||^2 \end{aligned}$$

En additionnant encore les deux égalités, on a bien le résultat.

3) D'une part,

$$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2||x||^2 + ||y||^2 + ||z||^2 - 2\mathfrak{Re}(\langle x,y\rangle) - 2\mathfrak{Re}(\langle x,z\rangle)$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}||z-y||^2 + 2\left|\left|x - \frac{y+z}{2}\right|\right|^2 = ||y||^2 + ||z||^2 + 2||x||^2 - \mathfrak{Re}(\langle y,z\rangle) + \mathfrak{Re}(\langle y,z\rangle) - 2\mathfrak{Re}(\langle x, y+z\rangle)$$

Ce qui nous permet de conclure.

Exercice : Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert, C convexe complet de H.
Montrer que la projection orthogonale p_C sur C est une application 1-lipschitzienne.

Solution : Soit $x, x' \in H$. Posons $y = p_C(x)$ et $y' = p_C(x')$. On a

$$\begin{aligned} ||x-x'||^2 &= ||(x-x') - (y-y') + (y-y')||^2 \\ &= ||(x-x') - (y-y')||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle (x-x') - (y-y'), (y-y')\rangle) + ||y-y'||^2 \quad (\dagger) \end{aligned}$$

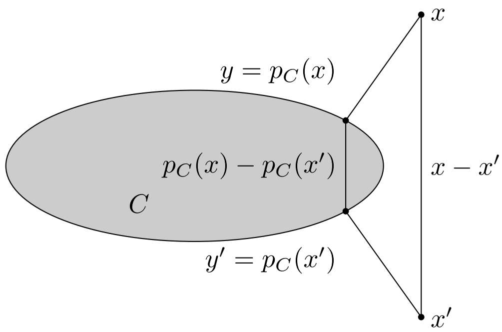
Or, en utilisant la caractérisation angulaire, on

$$\mathfrak{Re}(\langle (x-x') - (y-y'), (y-y')\rangle) = -\underbrace{\mathfrak{Re}(\langle x-y-, y'-y\rangle)}_{\leq 0} - \underbrace{\mathfrak{Re}(\langle x'-y'), y-y'\rangle)}_{\leq 0} \geq 0$$

Par suite, dans $(\dagger)$, on a

$$||x-x'||^2 \geq ||y-y'||^2 = ||p_C(x) - p_C(x')||^2$$

D'où le résultat.
Sur un dessin, le résultat est évident.



Exercice : Montrer que $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H si et seulement si c'est une famille de vecteurs de norme 1 qui vérifie

$$\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2=||x||^2,\quad \forall x\in H$$

Solution : $\underline{\Rightarrow :}$ Si $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H, alors on a bien $||e_i||^2=1$ pour tout $i\in I$ et, par l'égalité de Parseval, on a

$$\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2=||x||^2,\quad \forall x\in H$$

$\underline{\Leftarrow :}$ Si on a

$$\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2=||x||^2,\quad \forall x\in H$$

Alors en prenant, $x=e_i$, on a

$$||e_i||^2=||e_i||^2+\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}|\langle e_j,e_i\rangle|^2=||x||^2$$

Par conséquent,

$$\sum_{\substack{j\in I\\ i\neq j}}|\langle e_j,e_i\rangle|^2\quad\Rightarrow\quad |\langle e_j,e_i\rangle|^2=0\quad\Rightarrow\quad \langle e_j,e_i\rangle=0$$

Donc la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée. Il nous ne reste plus qu'à montrer que cette famille est totale. Soit $x\in(\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I}))^{\perp}$. Alors

$$||x||^2=\sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2=0\quad\Rightarrow\quad x=0$$

Donc $(\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I}))^{\perp}=\{0\}$, et ainsi $\overline{\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})}=H$ et donc la famille $(e_i)_{i\in I}$ est totale, et par conséquent, une base hilbertienne.

Exercice : Théorème de représentation de Riesz-Fréchet
Soit $\varphi:H\to\mathbb{K}$ une forme $\mathbb{K}$-linéaire continue sur un espace de Hilbert $(H,\langle .,.\rangle)$.
Montrer qu'il existe un unique vecteur $x\in H$ tel que, pour tout $y\in H$, $\varphi(y)=\langle y,x\rangle$, et que la norme de l'application linéaire φ vaut $||\varphi||=||x||$.

Solution :
$\underline{1^{er}\ \textit{cas} - \varphi=0 :}$ On peut prendre $x=0$.

$\underline{2^{e}\ \textit{cas} : \varphi\neq 0 :}$ Posons $K=\mathrm{Ker}\varphi/$. Comme φ est continue, K est un sous-espace vectoriel fermé de H. De plus, on a $\dim H=1$.
Prenons $x_0\in K^{\perp}$ tel que $K^{\perp}=\mathbb{K}x_0$ et considérons la forme linéaire continue

$$\begin{aligned}\psi_{x_0}\ :\ & H\to\mathbb{K}\\ & y\mapsto\langle y,x_0\rangle\end{aligned}$$

On a $\mathrm{Ker}\psi_{x_0}=x_0^{\perp}=(K^{\perp})^{\perp}=K=\mathrm{Ker}\varphi$. Par conséquent, ψ_{x_0} et φ sont proportionnelles ($i.e.$) il existe $\alpha\in\mathbb{K}$ tel que

$$\forall y\in H,\quad \varphi(y)=\alpha\langle y,x_0\rangle=\langle y,\overline{\alpha}x_0\rangle$$

Ce qui nous démontre l'existence. Montrons l'unicité.

Soit donc $x,x'\in H$ tel que

$$\forall y\in H,\quad \langle y,x\rangle=\langle y,x'\rangle$$

Par suite,

$$\forall y \in H, \quad \langle y, x - x' \rangle = 0 \Rightarrow x - x' = 0$$

Ce qui nous démontre l'unicité. Enfin, pour la norme de l'application φ, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall y \in H, \quad |\varphi(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq ||x|| ||y||$$

On a égalité dans l'inégalité avec le cas particulier $y = x$. Par conséquent, $||\varphi|| = ||x||$.