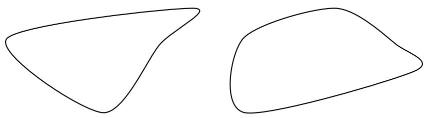
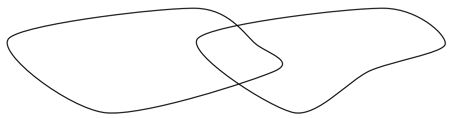
Connexité. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

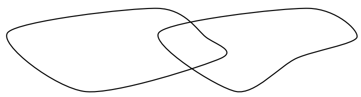
L'idée de la connexité est de donner une définition rigoureuse au concept "d'être d'un morceau". Attention cependant aux "opérations" sur les ensembles connexes ... Par exemple,



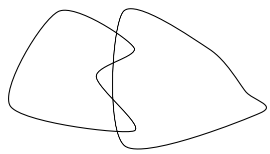
Union de connexes non connexe



Union de connexes connexe



Intersection de connexes connexe



Intersection de connexes non connexe

Dans les exemples ci-dessus, on remarque que dans les cas *non connexes*, on a "deux morceaux connexes". Cela va nous pousser à définir la notion de *composantes connexes*.

A l'instar de la compacité (et à l'inverse des ouverts et des fermés), la connexité a également la fâcheuse tendance à mal se comporter avec l'image réciproque par une application continue. Par exemple, en considérant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ (et en admettant que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles...), on a

$$f^{-1}(\underbrace{[1,+\infty[}_{connexe}) = \underbrace{]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[}_{pas\ connexe}$$

Cependant, on a que l'image directe par une application continue d'un connexe est connexe (qui généralise un résultat connu dans $\mathbb{R}$: *toute application continue envoie un intervalle sur un intervalle*).

On va également définir une notion de connexité "plus forte" : la connexité par arcs. Elle consiste simplement à dire que l'on peut toujours joindre deux points d'un ensemble par un chemin. Elle est "plus forte" en ce sens : *connexe par arcs* $\Rightarrow$ *connexe* mais *connexe* $\not\Rightarrow$ *connexe par arcs*. On a l'exemple académique suivant :

$$\overline{\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ x \in]0,1]\right\}} \text{ est connexe mais pas connexe par arcs}$$

Les applications sont très variées. En analyse, on pourra constater plusieurs résultats dûs au théorème des valeurs intermédaires, à l'inégalité de la moyenne et au principe des zéros isolés. En algèbre, plusieurs groupes de matrices ont l'avantage d'être connexes par arcs ($GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$), et quand ils ne sont pas connexes, on sait même déterminer leurs composantes connexes. Chez nos amis les quaternions, on a la propriété intéressante que le groupe des quaternions de norme 1 est connexe. Résultat fort utile pour l'isomorphisme :

$$G/\{-1,1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

Références

[POM] Cours d'analyse : Agrégation de mathématiques, Alain Pommelet

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon

[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Jean-Pierre Marco

[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière

[PER] Cours d'Algèbre, Daniel Perrin

[HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠

[NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan ♠

1 Connexité, connexité par arcs [GOUan] p.38 → 42

1.1 Connexité

Définition-Proposition 1 *Soit (E, d) un espace métrique. Les assestions suivantes sont équivalentes.*
(i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides.
(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.
(iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont ∅ et E.

Un espace métrique vérifiant l'une des assertions précédentes est dit connexe.
Une partie A de E est connexe si elle l'est pour la topologie induite.

Exemple 2 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si on se donne $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, on a $\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.*

Théorème 3 *Théorème du passage des douanes*
Toute partie connexe C de E qui rencontre l'intérieur de A et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A.

Théorème 4 *Soit $f : (E, d) \to (E', d')$ une application continue. Si E est connexe, alors f(E) est connexe.*

Exemple 5 *C'est faux pour l'image réciproque ! En considérant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ (et en admettant que les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles...), on a*

$$f^{-1}(\underbrace{[1, +\infty[}_{connexe}) = \underbrace{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}_{pas\ connexe}$$

Définition-Proposition 6 *On note $D = \{0, 1\}$ muni de la distance discrète δ.*
L'espace métrique (D, δ) n'est pas connexe.

Proposition 7 *Un espace métrique (E,d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to D$ est constante.*

Proposition 8 *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E,d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Proposition 9 *(i) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d) telle que*

$$\exists i_0 \in I,\ \forall i \in I, \quad C_i \cap C_{i_0} \neq \varnothing.$$

Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.
(ii) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrables de connexes (I=0,1,...,n ou I=$\mathbb{N}$) telle que pour tout

$$\forall i \in I\backslash\{0\}, \quad C_i \cap C_{i-1} \neq \varnothing.$$

Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Proposition 10 *Soient $(E_1, d_1), ...(E_n, d_n)$ un nombre fini d'espaces métriques. Alors l'espace produit $E = E_1 \times ... \times E_n$ est connexe si et seulement si E_i est connexe pour tout i.*

1.2 Composantes connexes

Définition-Proposition 11 *Soit (E, d) un espace métrique. La relation*

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\exists\ C \text{ connexe de } E \mid x \in C \text{ et } y \in C)$$

est une relation d'équivalence.

La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$, notée $\dot{x}$, s'appelle composante connexe de E.

Proposition 12 *L'espace métrique E est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.*

Proposition 13 *Les composantes connexes de E sont des fermés de E.*

Remarque 14 *Les composantes connexes de E ne sont pas toujours des ouverts de E. Cependant, dès que E sera localement connexe, les composantes connexes de E seront ouvertes.*

Proposition 15 *Un homéomorphisme entre deux espaces met les ensembles de composantes connexes de ces deux espaces en bijection.*

1.3 Connexes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$

Théorème 16 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Théorème 17 *Théorème des valeurs intermédiaires*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Alors f(I) est un intervalle.

Théorème 18 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors les composantes connexes de Ω sont ouvertes, et l'ensemble de ces composantes est au plus dénombrable.*
[HMQUE] p.3

Théorème 19 *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $\Omega = \mathbb{C} \backslash \Omega$. Alors,*
(i) l'ouvert Ω a une seule composante connexe non bornée C_∞
(ii) Si C est une composante connexe de Ω, on a $\partial C \subset K$. **[HMQUE] p.3**

1.4 Connexité par arcs

Définition 20 *Soit (E,d) un espace métrique. On appelle chemin de E toute application $\gamma : [0,1] \to (E,d)$ continue. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine de l'arc, $\gamma(1)$ son extrémité.*

Définition 21 *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs si pour pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.*

Exemple 22 *Un ouvert convexe est connexe par arcs.*
Un ouvert étoilé est connexe par arcs.

Théorème 23 *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Remarque 24 $\overline{\left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ x \in]0,1]\right\}}$ *est connexe mais pas connexe par arcs*

Théorème 25 *Soit E un $\mathbb{R}$-e.v.n. Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs.*

2 Applications à l'analyse

2.1 Connexité et continuité des fonctions de variable réelle [POM] p.74 → 76

Corollaire 26 *(du théorème des valeurs intermédiaires) Soient f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $a,b \in I$. Alors pour tout y compris entre f(a) et f(b), il existe $x \in [a,b]$ tel que f(x)=y.*

Corollaire 27 *Soit f une fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.*

Corollaire 28 *Une application continue f d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même (ou bien telle que $[a,b] \subset f([a,b])$) possède au moins un point fixe.*

2.2 Calcul différentiel [ROU] p.104 → 106

Théorème 29 *Soient E et F deux espaces normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{U}$ un ouvert de E, et $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable en tout point de $\mathcal{U}$.*
Soient $[a,b]$ un segment de droite tout entier contenu dans $\mathcal{U}$, et k une constante positive.
On suppose que,

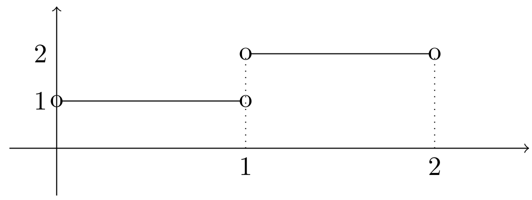
$$\forall x \in [a,b], \quad ||Df(x)||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$$

Alors, on a l'inégalité de la moyenne

$$||f(b) - f(a)||_F \leq k||b-a||_E$$

Corollaire 30 *Soient E et F deux espaces normés, et $f : \mathcal{U} \to F$ une application différentiable sur un ouvert $\mathcal{U}$ de E.*
*(i) Si $\mathcal{U}$ est un ouvert con**v**exe de E et si $||Df(x)||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$, $\forall x \in \mathcal{U}$ ($k \geq 0$), alors l'application f est k-lipschitzienne sur $\mathcal{U}$*
*(ii) Si $\mathcal{U}$ est un ouvert con**n**exe de E et si $Df(x) = 0$ $\forall x \in \mathcal{U}$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Remarque 31 *L'énonce (ii) est faux si $\mathcal{U}$ n'est plus connexe.*



Une fonction non constante
mais de dérivée identiquement nulle

2.3 Analyse complexe [HMQUE] p.102 → 104

Théorème 32 ♠ *Principe des zéros isolés* ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) *Si $a \in Z(f)$, $\exists\ k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \qquad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) *$Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω.*

Application 33 *Théorème de prolongement des identités Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui posède un point d'accumulation dans Ω. Alors, $f = g$.*
En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.

Application 34 *(du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière*

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t$$

on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}e^{-\xi/2}$$

Application 35 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.*

3 Applications à l'algèbre

3.1 Groupes de matrices [NEHH] p.517-518

Théorème 36 ♠ *$GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs.* ♠

Proposition 37 *(i) $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.*
(ii) $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $SO_n(\mathbb{R})$.
(iii) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes :

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$$

Proposition 38 *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.*

3.2 Exponentielle de matrices [ML3al] p.358-359

Proposition 39 *L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*
Plus précisément, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

Remarque 40 *On a une autre démonstration pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.*

Proposition 41 *Pour $n > 1$, l'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ *n'est pas surjective.*
Plus précisément, $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$. De plus, pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M^2 = \exp(P(M))$.

3.3 Quaternions [PER] p.XXX

Définition-Proposition 42 *Il existe une algèbre $\mathbb{H}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, appelé algèbre des quaternions, muni d'une base 1,i,j,k telle que :*
(i) 1 est élément neutre pour la multiplication,
(ii) on a les formules

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un quaternions s'écrit alors

$$q = a + bi + cj + dk, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{H}$ est muni de la norme algébrique N suivante : $\forall q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, $N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Proposition 43 *Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors G est connexe.*

Théorème 44 *Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :*

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

Remarque 45 *On a une autre démonstration de la connexité de $SO_3(\mathbb{R})$.*

Questions

Exercice : Soit (E,d) un espace métrique.
1) La frontière d'une partie connexe est-elle connexe ?
2) Soit A une partie de E.
(i) Si $\overline{A}$ est connexe, a-t-on A connexe ?
(ii) Si $\overset{\circ}{A}$ est connexe, a-t-on A connexe ?

Solution : 1) La réponse est non. $[0,1]$ est bien connexe et $Fr([0,1]) = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas connexe..
2)(i) La réponse est également non. Par exemple, $\overline{[0,1[\cup]1,2]} = [0,2]$. $[0,2]$ est bien connexe et pourtant $[0,1[\cup]1,2]$ n'est pas connexe.
2)(ii) La réponse est encore non ! En considérant, $\overset{\circ}{\overline{[0,1]\cup\{2\}}}$ $=]0,1[$, on a que $]0,1[$ est bien connexe et pourtant $[0,1]\cup\{2\}$ n'est pas connexe.

Exercice : Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est connexe par arcs.

Solution : On va montrer que l'on peut relier toutes matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ à la matrice nulle (qui est incontestablement diagonalisable) tout en restant dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.
Soient $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. On considère les chemins

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1 & : & [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & t \mapsto (1-t)A \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \gamma_2 & : & [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & t \mapsto tB \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \gamma & : & [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & & t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

- γ_1 est un chemin reliant la matrice A à la matrice nulle.
- γ_2 est un chemin reliant la matrice nulle à la matrice B.

Par conséquent, γ est un chemin reliant la matrice A à la matrice B.

Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ ($(i.e.)$ $\gamma_i(t) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ pour $i = 1,2$). Or, pour $t \in [0,1]$, la matrice $(1-t)A$ est diagonalisable. En effet, comme $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale. Ce qui implique $(1-t)A = P((1-t)D)P^{-1}$, et donc que $(1-t)A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. En raisonnant de la même façon avec la matrice B, on obtient donc que pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t) \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Exercice : En utilisant le théorème de prolongement des identités et en considérant la fonction :

$$F : z \to e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t,$$

calculer la transformée de Fourier de $t \mapsto e^{-t^2/2}$.

Solution : Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} \mathrm{d}t = e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)^2} \mathrm{d}t$$

En considérant la fonction :

$$F : z \to e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t$$

Montrons que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (on dit aussi que cette fonction est *entière*) en utilisant le théorème d'holomorphie sous signe intégral.
Posons la fonction

$$h \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$(t, z) \mapsto e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2}$$

- $\forall z \in \mathbb{C}$, la fonction $t \mapsto h(t, z)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$,
- $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto h(t, z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$,
- Soit un compact $K \subset \mathbb{C}$ et $z \in K$, on a

$$\begin{aligned} |h(t, z)| &= e^{-\frac{1}{2}\mathcal{R}((t+z)^2)} = e^{-\frac{1}{2}t^2 - t\mathcal{R}z - \frac{1}{2}\mathcal{R}(z^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t^2 + |t||z| + \frac{1}{2}|z|^2} \end{aligned}$$

Or comme $z \in K$, il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que $|z| \leq \alpha$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R} \times K$,

$$|h(t, z)| \leq \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t^2 + |t|a + \frac{1}{2}a^2}}_{:= g_K(t)}$$

avec $g_K \in L^1(\mathbb{R})$
Ainsi par le théorème d'holomorphie sous signe intégral, F est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Pour $\underline{z \in \mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t \\ &\underset{t+z=s}{=} e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \mathrm{d}s \\ &= \sqrt{2\pi} e^{z^2/2} := G(z) \end{aligned}$$

Pour $\underline{z \in \mathbb{R}}$, on a donc $F(z) = G(z)$. Donc les fonctions entières F et G coïncident sur $\mathbb{R}$ dont tous les points sont d'accumulations dans $\mathbb{C}$. Par le théorème de prolongement des identités, $F(z) = G(z)$ pour tout $\underline{z \in \mathbb{C}}$. En particulier,

$$\widehat{f}(\xi) = F(i\xi) = G(i\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$$