Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA VIE

Références

[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
[HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire
Résolution de l'équation de Bessel

1 Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre [DTZ] p.513 → 518

Définition 1 *On appelle* <u>*équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre*</u>*, toute équation de la forme*

$$y' = ay + b \qquad (E)$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On appelle <u>*solution*</u> *de cette équation, toute fonction*

$$\begin{aligned} y : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$$

dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

Si b est la fonction nulle, l'équation est dit <u>*linéaire homogène*</u>*.*

$$y' = ay \qquad (H)$$

Remarque 2 1) *Les applications a et b étant continues sur I, toute solution Y est de classe C^1 sur I.*
2) *Si les applications a et b sont classe C^k, alors toute solution Y est de classe C^{k+1}.*
3) *L'application a étant continue sur I, elle admet des primitives sur cet intervalle.*

Proposition 3 *Soit A une primitive de a sur I. On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène (H). Alors $(\mathcal{S}_H, +, .)$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application*

$$\begin{aligned} Y_0 : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{A(t)} \end{aligned}$$

Proposition 4 *Soit $t_0 \in I$. Les solutions de (E) sont les applications Y définies par*

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = \left(\int_{t_0}^t b(x)e^{-A(x)}\mathrm{d}x \right) e^{A(t)} + Ke^{A(t)}$$

Définition 5 *Si l'on considère un intervalle I, deux applications a et b continues sur I et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Un* <u>*problème de Cauchy*</u> *s'écrit*

$$(C) \quad \begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Proposition 6 *Il y a existence et unicité du problème de Cauchy. L'unique solution est donnée par $\forall t \in I$,*

$$Y(t) = \left(\int_{t_0}^t b(x)e^{-A(x)}\mathrm{d}x \right) e^{A(t)} + y_0 e^{A(t)-A(t_0)}$$

Remarque 7 1) *On appelle également équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre, une équation de la forme*

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont trois fonctions continues sur un intervalle I, la fonction a ne s'annulant pas sur I.
2) *Dans le cas où a s'annule sur I, on effectue*

l'étude de l'équation différentielle sur chaque intervalle maximal inclus dans I et sur lequel a ne s'annule pas.
3) On peut éventuellement faire l'étude de raccordement : celle-ci consiste à rechercher les solutions sur l'intervalle I.

Exemple 8 *On considère l'équation différentielle*

$$ty' + 2y = \frac{t}{1+t^2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad y_1(t) = \frac{t - \arctan(t) + k_1}{t^2}$$

où k_1 est une constante réelle.
Les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_-^*, \quad y_1(t) = \frac{t - \arctan(t) + k_2}{t^2}$$

où k_2 est une constante réelle.
L'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ est

$$y(t) = \frac{t - \arctan(t)}{t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$y(0) = 0$$

2 Systèmes différentiels linéaires [DTZ] p.520 → 530, [GOUan] p.357 → 361

2.1 Défintions et existence de solutions

Définition 9 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Tout équation différentielle sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre p du type*

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + ... + A_0(t)Y + B(t) \quad (L)$$

où $A_{p-1}, ..., A_0$ sont des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue quelconque est appelée équation différentielle linéaire d'ordre p.
Si B est identiquement nulle sur I, l'équation est dit homogène.

Remarque 10 *On peut ramener toute équation différentielle d'ordre p à une équation différentielle d'ordre 1. Ici, (L) se réécrit*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Pour cette raison, nous nous limiterons à l'étude des systèmes différentielles linéaires d'ordre 1.

Remarque 11 *Les définitions de solution et de Problème de Cauchy s'adaptent bien sûr aux systèmes différentielles linéaires d'ordre 1.*

Théorème 12 ♠ *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire* ♠
Soit une équation différentielle linéaire

$$y' = A(t)y + B(t) \quad (\mathcal{L}_1)$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues. Alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de $(\mathcal{L}_1)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 13 *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y' = A(t)y \quad (H)$$

est un s.e.v. de dimension n du $\mathbb{R}$-e.v. $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Corollaire 14 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{L}_1)$ est un espace affine de dimension n.*

2.2 Wronskien

Définition 15 *Soient $y_1, ..., y_n$ n solutions de (H). On appelle wronskien de $y_1, ..., y_n$ l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{wrsk} : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(y_1(t), ..., y_n(t)) \end{aligned}$$

Exemple 16 *Le wronskien de deux solutions u et v d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$y'' = p(t)y'q(t)y$$

est

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$$

Proposition 17 *(i) Soient $y_1, ..., y_n$ solutions de (H). Le rang des vecteurs $y_1(t), ..., y_n(t)$ est indépendant de $t \in I$.*
(ii) Des solutions $y_1, ..., y_n$ de (H) forment une base des solutions de (H) si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $\mathrm{wrsk}((y_1(t_0), ..., y_n(t_0)) \neq 0$, et dans ce cas, on a $\mathrm{wrsk}((y_1(t), ..., y_n(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$

3 Résolution d'équations différentielles linéaires

3.1 Le cas général [GOUan] p.357 → 361

Méthode 18 *Résolution d'un système linéaire d'ordre 1*
• *Il n'y a en général pas de méthode pour résoudre* $y' = A(t)y$ *en dimension* $n \geq 2$.
• *Etant donné* $y_1, ..., y_n$ *solutions de (H), on utilise la méthode de la variation de la constante pour l'équation* $y' = A(t)y + B(t)$ *: on cherche des solutions de la forme* $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)y_i(t)$*, qui nous conduit à*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)y_i(t) = b(t)$$

Exemple 19 *On suppose connues deux solutions linéairement indépendantes u et v de l'équation homogène de l'équation différentielle* $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$ *qui se réécrit*

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

On cherche des solutions de la forme

$$W(t) = \lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t)$$

où $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ *et* $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$*. Ainsi,* $t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$ *est solution si et seulement si*

$$\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = C(t)$$

(i.e.)

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u + \mu' v = c \end{cases}$$

Proposition 20 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. L'équation différentielle* $y' = Ay$ *a ses solutions maximales définies sur* $\mathbb{R}$*, et la solution vérifiant* $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ *est*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto e^{At}y_0 \end{aligned}$$

Théorème 21 *Soit*

$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y = 0 \qquad (E)$$

une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p sur $\mathbb{R}$*. En considérant le polynôme* $P(X) = X^p + a_1 X^{p-1} + ... + a_p X$ *(appelé polynôme caractéristique) que l'on factorise sous la forme* $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$*. Les solutions de (E) sont les applications*

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t)$$

avec $\deg P_i < m_i$*.*

Théorème 22 *Soit* $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^n$*. Soient* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *les valeurs propres distinctes de f. Pour tout* $i \in \{1, ..., k\}$*, on note* N_i *le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre* λ_i *et on note* $\alpha_i := \dim N_i$*. Ainsi, on a*

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Pour tout s.e.v. N de $\mathbb{C}^n$*, pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$ *on note* $\mathcal{S}_{N,\alpha,\lambda}$ *l'e.v. des fonctions* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$*,* $t \mapsto e^{\lambda t}P(t)$ *; où P est un polynôme à coefficients dans N de degré strictement inférieur à* α*. Si on note* $\mathcal{S}$ *l'e.v. des solutions de l'équation différentielle* $X' = f(X)$*. Alors*

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}$$

3.2 A l'aide des séries entières

Application 23 *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Alors f est l'unique solution sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ *où* $\alpha \in]0, +\infty[$ *du système différentiel*

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p! x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

[DTZ] p.334 → 336

Application 24 ♠ *Résolution de l'équation de Bessel* ♠
Il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (E)$$

développable en série entière en 0 *et valant 1 en 0. C'est*

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

On déduit également

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta)) \mathrm{d}\theta$$

[FGNan4] p.101

4 Comportement des solutions

4.1 Lemme de Gronwall et applications [GOUan] p.377 → 379

Proposition 25 *Lemme de Gronwall*
Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

Corollaire 26 *Soient ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives telles que*

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq c\ \exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$$

Corollaire 27 *Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \beta \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ ||y'(t)|| \leq \beta + \alpha||y(t)||$$

Alors

$$\forall t \in [a,b],\ ||y(t)|| \leq ||y(a)||e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1)$$

Corollaire 28 *Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement positive et croissante. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.*

4.2 Champ de vecteurs et points d'équilibre [DEM] p.272 → 278

Définition 29 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On appelle champ de vecteurs dans $\mathcal{U}$ toute application de la forme*

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathcal{U}$$

où f est une fonction continue sur $\mathcal{U}$.
On appelle système autonome associé au champ de vecteurs f le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t))$$

Exemple 30 • $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *Voir* Figure2

• $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ *Voir* Figure3

Définition 31 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Un point $x_0 \in \mathcal{U}$ est dit d'équilibre ou critique si $f(x_0) = 0$.*

4.3 Stabilité des solutions [DEM] p.265 → 268

Définition 32 *On considère le problème*

$$(E) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.
Soit $y(t,z)$ la solution maximale de (E) tel que $y(t_0, z) = z$. On dira que la solution $y(t_0,z) = z$ est stable s'il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une constante $C \geq 0$ telles que
(i) $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \to y(t,z)$ est définie sur $[t_0, +\infty[$.
(ii) $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$, on a

$$||y(t,z) - y(t,z_0)|| \leq C||z - z_0||$$

On dira que la solution $y(t_0,z) = z$ est asymptotiquement stable si elle est stable si la condition (ii') (plus forte que la condition (ii)) est vérifiée :
(ii') il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ et une fonction $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ telles que pour tout $z \in \overline{B}(z_0, r)$ et $t \geq t_0$, on ait

$$||y(t,z) - y(t,z_0)|| \leq \gamma(t)||z - z_0||$$

Voir Figure14

Théorème 33 *On considère le problème*

$$Y' = AY, \quad \text{avec } Y \in \mathbb{C}^m,\ A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont :
- asymptotiquement stables si et seulement si $\Re e(\lambda_j) < 0\ \forall j \in 1, ..., m$.
- stables si et seulement si $\forall j \in 1, ..., m$ ou bien $\Re e(\lambda_j) < 0$, ou bien $\Re e(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable.

Proposition 34 *Cas d'un champ linéaire en dimension 2 :*

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{cases}$$

Voir Tableau1

5 Méthode de tir [HUB2] p.108 $\rightarrow$ 111

Méthode 35 *Soient $f \in C(]0,1[)$ et $q \in C(]0,1[)$ une fonction à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La méthode de tir consiste à remplacer le problème $(\dagger)$ par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = k \end{cases}$$

est de montrer qu'il existe une valeur de $u'(0) = k$ tel que $u(1) = 0$.

Cette méthode est spécifique à la dimension 1.

Remarque 36 *On va supposer que la fonction q est constante.*

Théorème 37 *Soient $f \in C(]0,1[)$ et $q \geq 0$. Le problème $(\dagger)$ admet une et une seule solution donnée par*

$$u(x) = -\int_0^x \int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t + x\int_0^1 \int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

si $q = 0$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{q}}\int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y - \frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sinh(\sqrt{q})}\int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y$$

si $q > 0$

Illustrations

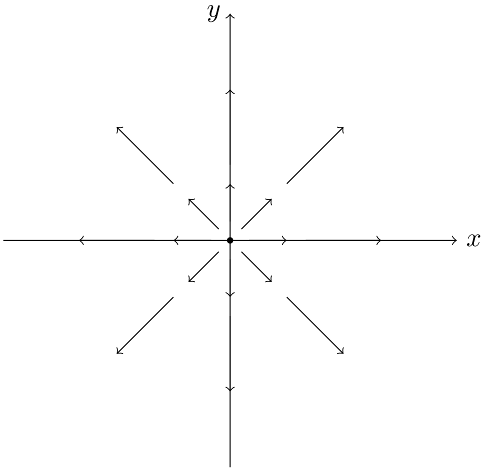


Figure 2 : Champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

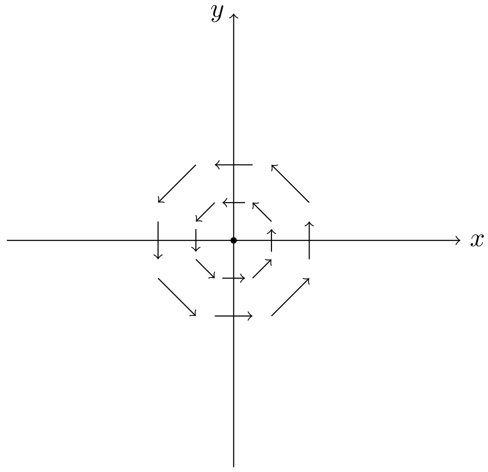


Figure 3 : Champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$

$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\},\ \lambda_1\neq\lambda_2$ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda_1 t}\\y(t)=y_0e^{\lambda_2 t}\end{cases}$	$0<\lambda_2<\lambda_1$ Figure 4	$\lambda_2<\lambda_1<0$ Figure 5	$\lambda_2<0<\lambda_1$ Figure 6
$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}$ A diagonalisable $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda t}\\y(t)=y_0e^{\lambda t}\end{cases}$	$\lambda>0$ Figure 7	$\lambda<0$ Figure 8	
$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}$ A non diagonalisable $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda t}\\y(t)=(y_0+x_0t)e^{\lambda t}\end{cases}$	$\lambda>0$ Figure 9	$\lambda<0$ Figure 10	
$\mathrm{Sp}(A)=\{\alpha+i\beta,\alpha-i\beta\}$ $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\\beta & \alpha\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}z(t)=x(t)+iy(t)\\z(t)=z_0^{(\alpha+i\beta)t}\end{cases}$	$\alpha>0$ Figure 11	$\alpha<0$ Figure 12	$\alpha=0$ Figure 13

Tableau 1 : Zoologie des courbes intégrales pour un champ linéaire de vecteurs.

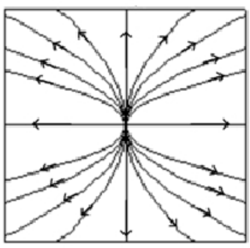


Figure 4 : Noeud impropre instable

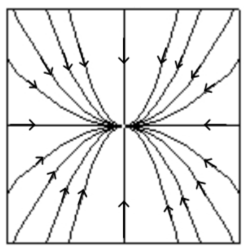


Figure 5 : Noeud impropre stable

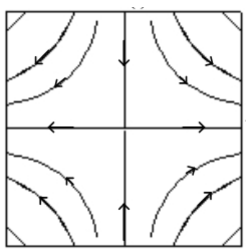


Figure 6 : Point col

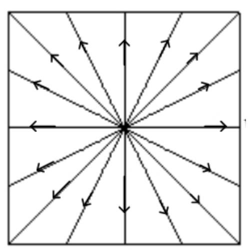


Figure 7 : Noeud propre stable

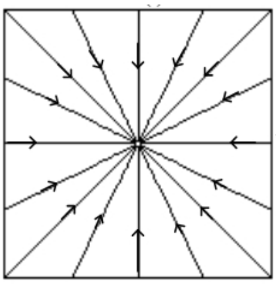


Figure 8 : Noeud propre instable

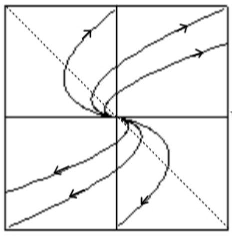


Figure 9 : Noeud exceptionnel instable

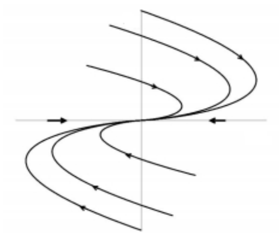


Figure 10 : Noeud exceptionnel stable

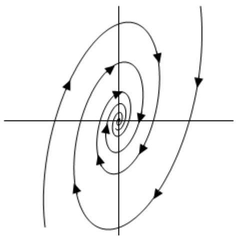


Figure 11 : Foyer stable

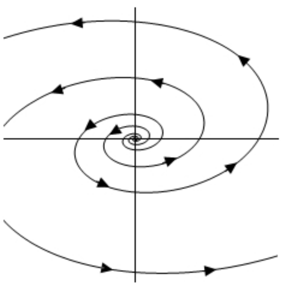


Figure 12 : Foyer instable

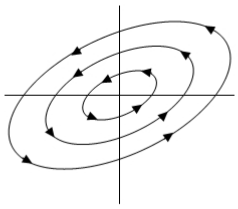


Figure 13 : Centre

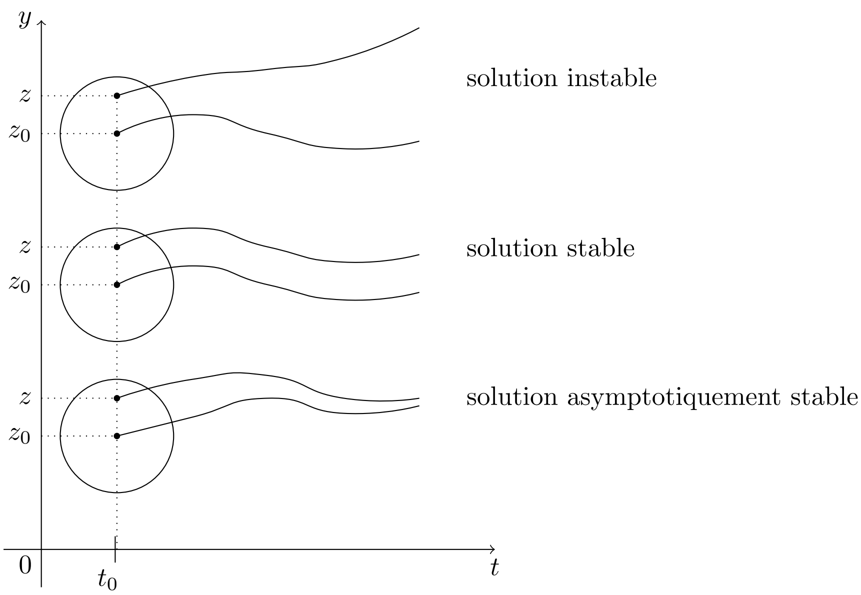


Figure 14 : Illustrations des différentes notions de stabilité

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice : Méthode d'Euler-Cauchy
Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $L > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ ||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||$$

Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

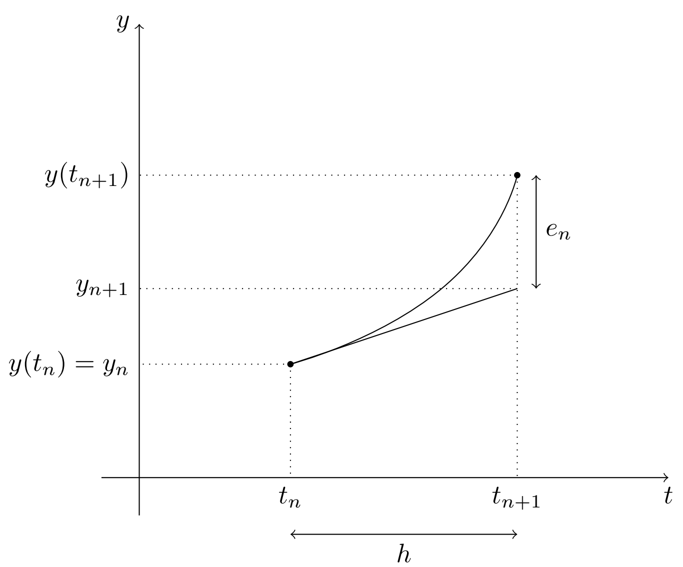
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, $t_n = nh$. On définit $y_0, y_1, ..., y_N$ par récurrence par

$$y_0 = y(0) \quad et \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Montrer que, $\forall n \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$||e_n|| := ||y(t_n) - y_n|| \leq \frac{Mh}{2L} e^{Lt_n} \qquad \text{avec} \quad M = \sup_{t \in I} ||y''(t)||$$

Solution : Voici une illustration de ce que nous en sommes en train de faire.



Posons $\epsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)$. On a donc

$$\begin{aligned}||\epsilon_n|| &= ||y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)|| \\ &= \left|\left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - y'(t_n))\mathrm{d}t\right|\right| \\ &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} ||y'(t) - y'(t_n)||\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} M(t-t_n)\mathrm{d}t = \frac{Mh^2}{2}\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}||e_{n+1} - e_n|| &= ||y(t_{n+1}) - y(t_n) - (y_{n+1} - y_n)|| \\ &= ||\epsilon_n + hy'(t_n) - hf(t_n, y_n)|| \\ &= ||\epsilon_n + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n))|| \\ &\leq ||\epsilon_n|| + h||(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n))|| \\ &\leq ||\epsilon_n|| + hL||y(t_n) - y_n|| \\ &= ||\epsilon_n|| + hL||e_n||\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$||e_{n+1}|| \leq (1+hL)||e_n|| + ||\epsilon_n||$$

Or, comme

$$1 + hL \leq e^{hL} \quad \text{et} \quad ||\epsilon_n|| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

on obtient ainsi

$$||e_{n+1}|| \leq e^{hL}||e_n|| + \frac{Mh^2}{2}$$

Puis par récurrence immédiate sur n, on a

$$||e_n|| \leq e^{nhL}||e_0|| + (1 + e^{hL} + ... + e^{(n-1)hL})\frac{Mh^2}{2}$$

Mais puisque $e_0 = 0$, on a

$$||e_n|| \leq (1 + e^{hL} + ... + e^{(n-1)hL})\frac{Mh^2}{2} = \frac{e^{nhL} - 1}{e^{hL} - 1}\frac{Mh^2}{2} \leq \frac{e^{nhL}}{hL}\frac{Mh^2}{2} = e^{t_n L}\frac{Mh}{2L}$$

