Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Mohamed NASSIRI

Dans l'étude des suites et séries, on est amené à discuter des propriétés des limites de ces premières. Malheusement, tout ne se passe pas toujours très bien ... Par exemple, on ne peut pas toujours intervertir les limites "en n" et "en x" comme le montre l'exemple suivant :

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to+\infty} x^n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1} x^n$$

Ce qui a pour conséquence notamment les problèmes suivants

- La continuité :

$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{x^n}_{\text{continue}} = \underbrace{\chi_{\{1\}}(x)}_{\text{pas continue}}$$

- La dérivabilité :

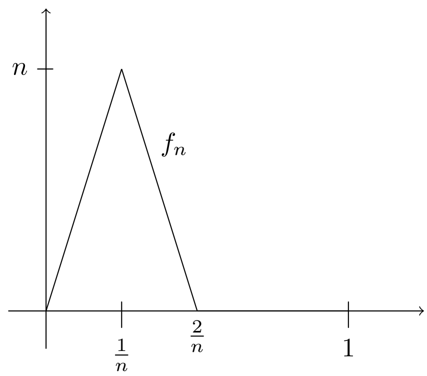
$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx) = 0 \quad \text{mais} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)' = \lim_{n\to+\infty} \cos(nx) = \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

- L'intégrabilité :

En considérant la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 2}$ définie pour tout $n \geq 2$ par

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n}_{=1} = 1 \neq 0 \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{=0}$$



La plupart du temps, la convergence uniforme permet de régler le problème ... Par exemple, pour le *théorème de la double limite*, une hypothèse de convergence uniforme permettra de régler le problème lim/lim.

De même, pour l'intégration, la convergence uniforme peut être une solution, notamment dans la théorie de l'*intégrale de Riemann*. On peut également donner un théorème d'interversion $\int / \sum$ dans le cadre de cette théorie en demandant cette fois-ci de la convergence normale. Comme application, on peut par exemple donner la jolie formule

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Mais, dans la théorie plus globale de l'*intégrale de Lebesgue*, on aura des théorèmes moins gourmands : le *théorème de convergence monotone*, le *lemme de Fatou* et le *théorème de convergence dominée*.

Ce dernier théorème nous ouvre la porte à moultes applications dont la régularité des fonctions définies à partir d'une intégrale : elle sont de la forme $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$. Ces théorèmes sont importants. Il nous permettent notamment de monter que la célèbre fonction Γ d'Euler est C^∞. D'un point de vue complexe, on peut même montrer que la fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs.

Puis, quand nous considérons les fonctions de plusieurs variables, un autre problème se pose : l'interversion $\int / \int$. En effet, l'exemple suivant montre que ce n'est pas toujours possible (pour $(x,y)=(0,0)$, on prolonge la fonction en 0) :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Ici, le *théorème de Fubini* va régler le problème. Ce dernier, avec notamment un théorème de changements de variables (pour pouvoir parler de *passage en coordonnées polaires*), va nous permettre de retrouver un célèbre résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Bertrand Hauchecorne
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Méthode de Laplace

Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$

1 Premiers problèmes

1.1 Interversion lim/lim [HAU] p.235

Exemple 1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'applications définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_n(x) = x^n$$

Alors

$$\lim_{x\to1}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to1} f_n(x)$$

Exemple 2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite d'applications définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par*

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_n(x) = \arctan\frac{x}{n}$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

1.2 Interversion $\int / \int$ [HAU] p.285 → 287

Exemple 3 *Soit*

$$f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

Alors

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$$
$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Exemple 4 *Soit*

$$f : [1,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

Alors

$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}$$

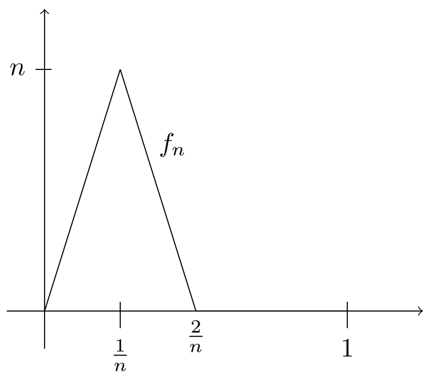
$$\int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

1.3 Interversion $\lim/\int$ [HAU] p.244

Exemple 5 *Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite d'applications définie pour tout $n \geq 2$ par*

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} n^2 x & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & si\ \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\int_0^1 f_n}_{=1} = 1 \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n}_{=0}$$

2 Interversion lim/lim [ML3an] p.93 $\to$ 95

Théorème 6 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $\mathcal{A}$ une partie de X, $\mathcal{B}$ une partie de Y, et $a \in \overline{\mathcal{A}}$, $b \in \overline{\mathcal{B}}$.*
Soient (F, d_F) un espace métrique complet et une application $f : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to F$. On suppose que :
(1) Pour tout $y \in \mathcal{B}$, la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ existe et on la note $g(y)$,
(2) Pour tout $x \in \mathcal{A}$, la limite $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ existe et on la note $h(x)$
On suppose de plus que la convergence dans l'hypothèse (ii) est uniforme relativement à x.
Alors
(i) $\lim\limits_{y\to b} g(y)$ existe
(ii) $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ existe
(iii) Ces deux limites sont égales (i.e.)

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) := l$$

$$\begin{tikzcd} f(x,y) \arrow[r, "y\to b"] \arrow[d, "x\to a"'] & h(x) \arrow[d, "x\to a"] \\ g(y) \arrow[r, "y\to b"'] & l \end{tikzcd}$$

Corollaire 7 *Soient X un espace métrique, $\mathcal{A}$ une partie de X, et $a \in \overline{\mathcal{A}}$*
Soient F un espace métrique complet et une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$ dans F. On suppose que :
(i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une application f sur $\mathcal{A}$,
(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n possède en a une limite α_n
Alors f possède une limite α lorsque $x \to a$ et la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α (i.e.)

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

$$\begin{tikzcd} f_n(x) \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "x\to a"'] & f(x) \arrow[d, "x\to a"] \\ \alpha_n \arrow[r, "n\to+\infty"'] & \alpha \end{tikzcd}$$

3 Interversion $\lim/\int$

3.1 Chez Riemann [GOUan] p.222 $\to$ 36

Théorème 8 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors, f est continue et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Corollaire 9 *Si $\sum g_n$ est une série de fonctions continues d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E qui converge normalement sur $[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b g_n(t)\mathrm{d}t\right)$$

Application 10

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Théorème 11 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de classe C^1 d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E. On suppose que*
(i) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge,
(ii) la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.
Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe C^1 et vérifie $f' = g$.

Corollaire 12 *Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de classe C^p d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach E.
On suppose que pour tout $k \in \{0,1,...,p\}$, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g_k.
Alors la limite uniforme $f = g_0$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^p et vérifie $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \{0,1,...,p\}$.*

3.2 Chez Lebesgue [ML3an] p.239 → 261

$(X,\mathcal{M},\mu)$ est un espace mesuré.

Théorème 13 *Théorème de convergence monotone*
Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Alors f est mesurable, et on a

$$\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n$$

Corollaire 14 *Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Alors f est intégrable si et seulement si la suite croissante $(\int_x f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est marjorée. Dans ce cas, on a*

$$\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n$$

Théorème 15 *Lemme de Fatou*
Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int_X (\lim\ \inf f_n) = \lim\ \inf \left(\int_X f_n \right)$$

Théorème 16 *Théorème de convergence dominée*
*Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré complet et $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que :
(i) La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $f(x)$ pour presque tout x.
(ii) Il existe une fonction $g : X \to [0,+\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ pour presque tout x.
Alors, la fonction f est intégrable sur X et on a
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| = 0$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n = \int_X f$*

3.3 Application : régularité des intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 17 *Théorème de continuité sous le signe intégral*
*Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré, (E,d) un espace métrique et $a \in E$. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est $\mathcal{M}$-mesurable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point a.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$ $\forall x \in E$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application*

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie et continue en a. **[ML3an] p.275**

Théorème 18 *Dans la pratique ...*
*Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et (E,d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times I \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
(ii) $\forall t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
(iii) il existe une fonction positive g, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$ $\forall x \in E$.
Alors l'application*

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur E. **[GOUan] p.157**

Exemple 19 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. **[ML3an] p.277**

Théorème 20 *Théorème de dérivabilité sous le signe intégral*
*Soient $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in I$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur I.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$ $\forall x \in I$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application*

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie et dérivable sur I, et on a

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

[ML3an] p.276

Théorème 21 *Dans la pratique ...*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : J \times I \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in J$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
(ii) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème 7.
Alors l'application

$$F : J \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}t$$

est définie et de classe C^1 sur J, et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.157

Exemple 22 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. **[ML3an] p.277**

Corollaire 23 *Sans l'hypothèse de domination*
Soient [a,b] un segment de $\mathbb{R}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $J \times [a,b]$. Alors l'application

$$F : J \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}t$$

est continue sur J.
Si de plus, f est dérivable par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times [a,b]$, alors F est de classe C^1 sur J, et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.158

Exemple 24 *Fonction Gamma - cas réel*
Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.158

Application 25 ♠ *Intégrale de Dirichlet* ♠

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

[ROU] p.140 → 143

Théorème 26 *Théorème de d'holomorphie sous le signe intégral*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et D un ouvert de $\mathbb{C}$. On considère une fonction $f : D \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall z \in D$, l'application $y \mapsto f(z,y)$ est mesurable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est holomorphe dans D.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z,y)| \leq g(y)$ $\forall z \in D$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application

$$F : D \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_X f(z,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie et holomorphe dans D, et on a

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

[MLan] p.279

Exemple 27 *Fonction Gamma - cas complexe*
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 0$, la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ **[ML3an] p.279**

Théorème 28 ♠ *Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$* ♠
La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. **[OBJ] p.82-83**

4 Interversion $\int / \int$

4.1 Théorème de Fubini [ML3an] p.258-259

Théorème 29 *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.*
1. Tonelli :
Soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-mesurable. Alors,
(i) pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : Y \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{N}$-mesurable,
(ii) pour tout $y \in Y$, la fonction $f_y : X \to \mathbb{C}$ est

$\mathcal{M}$*-mesurable,*
(iii) la fonction

$$g : X \to [0, +\infty]$$
$$x \mapsto \int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)$$

est $\mathcal{M}$*-mesurable,*
(iv) la fonction

$$h : Y \to [0, +\infty]$$
$$y \mapsto \int_X f_y(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

est $\mathcal{N}$*-mesurable.*
(v) Enfin, on

$$\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)$$

2. Fubini :
Soit $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ *une fonction* $(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$*-intégrable. Alors,*
(i) pour μ*-presque tout* $x \in X$*, la fonction* $f_x : Y \to \mathbb{C}$ *est* ν*-intégrable,*
(ii) pour ν*-presque tout* $y \in Y$*, la fonction* $f_y : X \to \mathbb{C}$ *est* μ*-intégrable,*
(iii) la fonction g *définie* μ*-presque partout par*

$$g : X \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y)$$

est μ*-intégrable,*
(iv) la fonction h *définie* ν*-presque partout par*

$$h : Y \to \mathbb{C}$$
$$y \mapsto \int_X f_y(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

est ν*-intégrable.*
(v) Enfin, on

$$\int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)$$

(i.e.)

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y)$$

Exemple 30 *Pour* $0 < a < b$*, la formule*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \ln b - \ln a$$

4.2 Application avec l'aide du changement de variables [GOUan] p.334-335

Théorème 31 **(Admis)** *Thèorème de changement de variables :*
Soient U *un ensemble mesurable compact de* $\mathbb{R}^n$*, et* φ *un* C^1*-difféormorphisme de* $\mathring{U}$ *sur* $\varphi(\mathring{U})$*, tel que* φ *et son jacobien* $J(\varphi)$ *se prolonge continûment sur* U*. Alors* $V = \varphi(U)$ *un compact mesurable et pour toute fonction continue* $f : V \to \mathbb{R}$*, on a*

$$\int_V f(v)\mathrm{d}v = \int_U f(\varphi(u))|J(\varphi)(u)|\mathrm{d}u$$

Remarque 32 *Dans la pratique, on utilise souvent le théorème sous la forme suivante :*
Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *et* $f : I \subset \mathbb{R} \to E$*, on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

Corollaire 33 *Passage en coordonnées polaires :*
Dans $\mathbb{R}^2$*, on désigne par* $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ *les coordoonées polaires et* $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *les coordonées cartésiennes.*
Soit D *(resp.* Δ*) un compact de* $\mathbb{R}^2$ *représenté en coordonées cartésiennes (resp. coordoonées polaires). Alors, toute fonction continue* f *sur* D *vérifie*

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\theta$$

Application 34 *Calcul de l'intégrale de Gauss :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

5 Comportement asymptotique : méthode de Laplace [ROU] p.349 → 351

Théorème 35 ♠ *Méthode de Laplace* ♠
Soit $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$*, de classe* C^2 *et* $f[a, b[\to \mathbb{C}$ *telle que* $e^{-t_0\varphi}f$ *soit Lebesgue intégrable pour un certain* t_0*. On suppose que* f *est continue en* a *et* $f(a) \neq 0$ *et on pose* $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x$
Si $\varphi' > 0$ *sur* $]a, b[$*,* $\varphi'(a) = 0$ *et* $\varphi''(a) > 0$ *alors*

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 36 *Formule de Striling :*
Soit $\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} e^{x\ln t - t}\mathrm{d}t$*. Alors*

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$$

Questions

Exercice : Théorème de la double limite
Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $\mathcal{A}$ une partie de X, $\mathcal{B}$ une partie de Y, et $a \in \overline{\mathcal{A}}$, $b \in \overline{\mathcal{B}}$.
Soient (F, d_F) un espace métrique complet et une application $f : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to F$. On suppose que :
(1) Pour tout $y \in \mathcal{B}$, la limite $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ existe et on la note $g(y)$,
(2) Pour tout $x \in \mathcal{A}$, la limite $\lim\limits_{y \to b} f(x, y)$ existe et on la note $h(x)$
On suppose de plus que la convergence dans l'hypothèse (ii) est uniforme relativement à x.
Montrer que
(i) $\lim\limits_{y \to b} g(y)$ existe
(ii) $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ existe
(iii) Ces deux limites sont égales $(i.e.)$

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) := l$$

$$\begin{tikzcd} f(x,y) \arrow[r, "y \to b"] \arrow[d, "x \to a"'] & h(x) \arrow[d, "x \to a"] \\ g(y) \arrow[r, "y \to b"'] & l \end{tikzcd}$$

Solution : C'est la complétude de F qui va débuter un peu la situation.

- *Montrons que h possède une limite en a :*

Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse (2) avec la convergence uniforme, on a

$$(\exists \eta > 0)(\forall x \in \mathcal{A})(\mathrm{d}_Y(y, b) \leq \eta) \Rightarrow (d_F(f(x, y), h(x)) \leq \epsilon/4)$$

(avec η indépendant de x par convergence uniforme)
Par l'hypothèse (1), on a

$$(\exists \alpha > 0)(\forall u \in \mathcal{A})(\mathrm{d}_X(u, a) \leq \alpha) \Rightarrow (d_F(f(u, y), g(y)) \leq \epsilon/4)$$

Ainsi, pour $u, u' \in \mathcal{A}$ tels que $\mathrm{d}_X(u, a) \leq \alpha$ et $\mathrm{d}_X(u', a) \leq \alpha$, alors

$$d_F(h(u), h(u')) \leq d_F(h(u), f(u, y)) + d_F(f(u, y), g(y)) + d_F(g(y), f(u', y)) + d_F(f(u', y), h(u')) \leq \epsilon$$

Ainsi, le critère de Cauchy est vérifié et donc h possède une limite l au point a.

- *Montrons que g possède une limite en b et qu'elle vaut l :*

Soit $\epsilon > 0$, par l'hypothèse (2), il existe un voisinage V de b dans Y tel que, pour tout $y \in V \cap \mathcal{B}$, on ait

$$\mathrm{d}_F(f(x, y), h(x)) \leq \epsilon, \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Par continuité de la fonction distance, on a, $\forall y \in V \cap \mathcal{B}$

$$\mathrm{d}_F(g(y), l) \leq \mathrm{d}_F(\lim_{x \to a} f(x, y), \lim_{x \to a} h(x)) \leq \epsilon$$

Ainsi, $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$. D'où le résultat.

Cas particulier :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et qui converge uniformément sur $[a,b[$ vers une fonction f. Si les fonctions f_n ont des limites finies en b, alors f a une limite finie en b et

$$\lim_{x\to b}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to b} f_n(x)$$

Ch'tite démonstration :
Soit $\epsilon > 0$. Par la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut écrire

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p \geq N)(\forall q \geq N) \Rightarrow (\forall x \in [a,b[, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon/3)$$

Soit $u_n = \lim_{x\to b} f_n(x)$. Par inégalité triangulaire, on a

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - f_p(x)| + |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - u_q|$$

Donc $|u_p - u_q| \leq \epsilon$ pour x suffisamment proche de b. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (donc convergente dans les espaces complets $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
En notant $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$, par inégalité triangulaire, on a

$$|f(x) - l| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - u_n| + |u_n - l|$$

Donc $|f(x) - l| \leq \epsilon$ pour x suffisamment proche de b.

$\square$

Exercice : A l'aide la fonction (dont on justifiera bien la définition et la continuité)

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-x} \end{aligned}$$

Montrer la très jolie formule

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$$

Solution : La fonction $x \mapsto x\ln x$ est continue sur $]0,1]$ et on a

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

On peut ainsi prolonger cette fonction par continuité en attribuant la valeur 0 en $x = 0$. Ainsi, la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{-x} = e^{-x\ln x} \end{aligned}$$

est bien définie et continue sur $[0,1]$. Par suite, on a, pour tout $\forall x \in [0,1]$,

$$f(x) = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$$

Pour pouvoir appliquer une interversion $\int / \sum$, il faut justifier la convergence normale de la série. Or,

$$\left|\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\right| \leq \left|\frac{\left(\sup_{x\in[0,1]}(-x\ln x)\right)^n}{n!}\right|$$

avec $\sup\limits_{x\in[0,1]}(-x\ln x) = a < \infty$ et les séries de la forme $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$ sont convergentes. D'où la convergence normale.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}\mathrm{d}x \quad \text{(Changement de variables } x=e^{-y}\text{)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y \quad (\dagger)
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)y}y^n\mathrm{d}y$ grâce à des intégrations par parties successives

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \underset{\uparrow}{e^{-(n+1)y}}\underset{\downarrow}{y^n}\mathrm{d}y &= \underbrace{\left[\frac{e^{-(n+1)y}}{-(n+1)}y^n\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)y}}{-(n+1)}ny^{n-1}\mathrm{d}y \\
&= \frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty}\underset{\uparrow}{e^{-(n+1)y}}\underset{\downarrow}{y^{n-1}}\mathrm{d}y \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-(n+1)y}}{-(n+1)}y^{n-1}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)y}}{-(n+1)}(n-1)y^{n-2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\int_0^{+\infty}\underset{\uparrow}{e^{-(n+1)y}}\underset{\downarrow}{y^{n-2}}\mathrm{d}y \\
&\;\vdots \\
&= \frac{n!}{(n+1)^n}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{n!}{(n+1)^n}\left[\frac{e^{-(n+1)y}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Par suite, dans ($\dagger$), on a

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}$$

Exercice : Intégrale de Gauss
Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Solution : On va utiliser le passage en coordonnées polaires grâce au théorème de changements de variables. Dans $\mathbb{R}^2$, on désigne par $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi]$ les coordoonées polaires et $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ les coordonées cartésiennes.
Soit D (resp. Δ) un compact de $\mathbb{R}^2$ représenté en coordonées cartésiennes (resp. coordoonées polaires). Alors, toute fonction continue f sur D vérifie

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}r\theta$$

En effet, en posant

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ (r,\theta) &\mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\end{aligned}$$

Le jacobien de φ est donc

$$J(\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

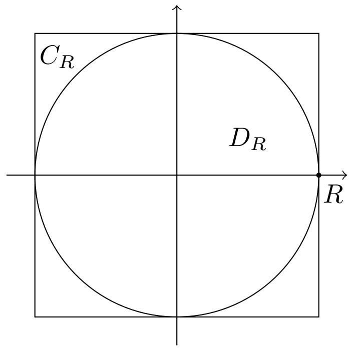
Soit $R > 0$. On pose

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

$$C_R = [-r,r]^2$$

$$I_R = \int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$J_R = \int\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



Ainsi, par passage en coordonnées polaires, et par le théorème de Fubini, on a, $\forall R > 0$,

$$\begin{aligned} I_R = \int\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_{[0,R]} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\right)\left(\int_{[0,2\pi]} \mathrm{d}\theta\right) \\ &= \pi(1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a également par le théorème de Fubini,

$$J_R = \int\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{[-R,R]} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{[-R,R]} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

Manifestement, $D_R \subset C_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ et donc l'intégrande étant positive, on a donc

$$I_R \leq J_R \leq I_{\sqrt{2}R}$$

(*i.e.*)

$$\pi(1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2R^2})$$

En faisant $R \to +\infty$, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$