Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

La notion de différentielle généralise aux fonctions de plusieurs variables la notion de nombre dérivé d'une fonction d'une variable réelle de la manière suivante :

f est dérivable en x_0 s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(f(x_0+x)-f(x_0))}{x} = y$	f est <u>différentiable en a</u> s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que pour $\|\|h\|\| < \alpha$, $\|\|f(a+h) - f(a) - L_a(h)\|\| \leq \epsilon \|\|h\|\|$

Comme pour les dérivées d'ordre supérieur, on peut également définir les différentielles d'ordre supérieur et le théorème de Schwarz va nous faciliter les calculs grâce à la "commutativité" des dérivées partielles.

Deux théorèmes méritent d'être mis en avant dans ce chapitre : le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites. Le premier nous dit que, sous certaines conditions, une fonction de classe C^k est un C^k-difféomorphisme, alors que le second dit que, sous certaines conditions, on peut toujours écrire $f(x,y) = 0$ sous la forme d'une fonction $\varphi(x) = y$.

Un autre résultat remarquable est le lemme de Morse qui stipule qu'une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine) est une application quadratique, à un difféomorphisme local près, dès que sa hessienne en 0 est non dégénérée.

Enfin, la recherche d'extrema est aussi une des applications importantes du calcul différentiel. En plus d'avoir des conditions d'ordre 1 et 2 sur les extrema libres, on a également le théorème des extrema liés. En introduisant la notion d'espace tangent, ce théorème permet de lier (via une forme linéaire) la différentielle d'une fonction g (qui caractérise une surface $S = \{x \mid g(x) = 0\}$) et la différentielle d'une fonction f à valeurs réelles dont on aimerait connaître les points critiques sur S.

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[BER] Calcul différentiel topologique élémentaire, Wolfgang Bertram ♠

Développements

Lemme de Morse
Différentielle du déterminant
Théorème des extrémas liés

Dans toute la leçon (sauf mention explicite) : Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $||f||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)} = \sup_{||h|| \leq 1} ||f(h)||$, (où $||.||$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$ sans distinction), $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$, avec $f = (f_1, ..., f_p)$ où les $f_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sont les composantes de f.

1 Applications différentiables

1.1 Différentielle et propriétés [ML3an] p.677 → p.681

Définition 1 *On dit que f est <u>différentiable en a</u> s'il existe $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que, quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $||h|| < \alpha$,*

$$||f(a+h) - f(a) - L_a(h)|| \leq \epsilon ||h||$$

L'application L_a est unique. On note $Df(a) = L_a$.

Remarque 2 *On a une écriture équivalente de* *cette définition avec :*

$$f(a+h) = f(a) + L_a(h) + ||h||\epsilon(h)$$

où $\epsilon(h) \in F$ tend vers 0 avec h.

Exemple 3 • *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, alors f est différentiable en tout point de E et on a $Df(a) = f$, $\forall a \in \mathbb{R}^n$.*
• *Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^p)$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ et $\forall (a_1, a_2), (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, on a :*

$$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2)$$

Proposition 4 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.*
Alors f est dérivable en x_0 est équivalent à f différentiable en x_0 et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Df(x_0)(x) = x.f'(x_0)$. En particulier, $f'(x_0) = Df(x_0)(1)$.

Proposition 5 *Si f est différentiable en a, f est continue en a.*

Définition 6 *On dit que f est <u>différentiable sur $\mathcal{U}$</u> si f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$.*
On appelle <u>application différentielle de f</u>, l'application :

$$\begin{aligned} Df \ : \ & \mathcal{U} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ & a \mapsto Df(a) \end{aligned}$$

Remarque 7 *La différentiabilité de f n'entraîne pas la continuité de Df. Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$ est différentiable en 0 mais f' n'est pas continue en 0.*

Définition 8 *On dit que f est <u>de classe C^1</u> si f est différentiable en tout point de $\mathcal{U}$ et si l'application Df est continue.*

Proposition 9 • *Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant a, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^p$ deux applications différentiables en a, alors $f + g$ est différentiable en a et on a $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.*
De même, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en a et on a $D(\lambda f)(a) = \lambda Df(a)$.
• *Soient $\mathcal{U}, \mathcal{O}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$ tel que $f(a) \in \mathcal{O}$.*
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$.

Proposition 10 *f est différentiable en a si et seulement si, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, f_i est différentiable en a. Dans ce cas, on a $\forall h \in \mathbb{R}^n$:*

$$Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), ..., Df_n(a)(h))$$

1.2 Gâteaux-différentiabilité [ML3an] p.691

Définition 11 *On dit que f est <u>Gâteaux-différentiable en a</u> s'il existe une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que, pour tout $u \in E$,*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tu) - f(a)) = \phi(u)$$

ϕ est alors unique et on l'appelle la <u>Gâteaux-différentielle de f en a</u>.

Proposition 12 *Si f est différentiable en a, alors f est Gâteaux-différentiable en a et sa Gâteaux-différentielle en a est égale à la différentielle usuelle $Df(a)$.*

Remarque 13 *La Gâteaux-différentiabilité est une notion plus faible. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^3/x$ pour $x \neq 0$, et $f(0,y) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$ (donc pas différentiable en $(0,0)$) mais elle est Gâteaux-différentiable en $(0,0)$.*

Application 14 ♠ *<u>Différentielle du déterminant</u>* ♠
L'application déterminant est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\ ^t\mathrm{com}(X)H)$$

[**ROU**] – **p.74 – 75**

1.3 Dérivées partielles [ML3an] p.683-684

Définition 15 *Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit $g_i : x \mapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1} ..., a_n)$ au voisinage de a_i.*
On définit la <u>dérivée partielle</u> comme étant la dérivée $f_i'(a_i)$ de f_i. On note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g_i'(a_i)$.

Proposition 16 *Si f est différentiable en a, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, les dérivées partielles de f au point a existent et, quelque soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$Df(a)(x_1, ..., x_k) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + ... + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Remarque 17 *La réciproque est fausse : la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ n'est pas continue en $(0,0)$ et pourtant $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et valent 0.*

Définition 18 *On appelle <u>matrice jacobienne de f</u> la matrice*

$$Jf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

1.4 Théorème des accroissements finis [ML3an] p.688-690

Théorème 19 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert* **convexe** *de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur $\mathcal{U}$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathcal{U}$, $||Df(x)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)} \leq k$. Alors, pour tout $x, y \in \mathcal{U}$, $||f(y) - f(x)|| \leq k||y - x||$ ((i.e.) f est k-lipschitzienne sur $\mathcal{U}$).*

Remarque 20 *Ce résultat est faux si $\mathcal{U}$ est seulement supposé connexe. $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, x^2 + y^2 = 1\}$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x, y) = \arctan(y/x)$.*

Proposition 21 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert* **connexe** *de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable sur $\mathcal{U}$. Si $Df = 0$ sur $\mathcal{U}$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Théorème 22 *Soient $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$. Alors f est de classe C^1 en a si et seulement si les dérivées partielles de f au point a existent et sont continues.*

2 Différentielles d'ordre supérieur

2.1 Définitions et premières propriétés [ML3an] p.696-697

Définition 23 • *Si $k \geq 1$, on dit que f est <u>k fois différentiable en a</u> (resp. <u>de classe C^k en a</u>) si f est $(k-1)$ fois différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a et $D^{k-1}f$ est différentiable en a (resp. $D^k f$ est continue au point a).*

• *Une fonction f est de classe C^∞ au point a si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k au point a.*

• *La fonction f est k fois différentiable (resp. de classe C^k, resp. de classe C^∞) sur $\mathcal{U}$ si f est k fois différentiable (resp. de classe C^k, resp. de classe C^∞) en tout point de $\mathcal{U}$.*

Théorème 24 *Les théorèmes relatifs à la somme, produit et composition de fonctions différentiables sont encore vrais pour des fonctions k fois différentiable, de classe C^k, et de classe C^∞).*

2.2 Théorème de Schwarz [ML3an] p.700-702

Théorème 25 <u>*Théorème de Schwarz*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application deux fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Proposition 26 *Si f admett des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathcal{U}$, continues en $a \in \mathcal{U}$. Alors,*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$$

Remarque 27 *La continuité en a des dérivées partielles est essentielle. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent mais ne sont pas égales (valant respectivement 1 et -1).*

Définition 28 *Avec les mêmes notation, la <u>matrice hessienne de f en a</u> est donnée par :*

$$Hf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque 29 *Hf_a est symétrique d'après le théorème de Schwarz.*

2.3 Formules de Taylor [ML3an] p.703-704

Théorème 30 <u>*Formule de Taylor avec reste intégral*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^{n+1} sur $\mathcal{U}$. Soient $a \in \mathcal{U}$, $h \in \mathbb{R}^n$, si le segment $[a, a+h]$ est contenu dans $\mathcal{U}$, on a

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - ... - \frac{1}{n!}D^n f(a)(h^n)$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{n!}(1-t)^n D^{n+1} f(a+th)(h^{n+1})\mathrm{d}t$$

où $h^n = \underbrace{(h, ..., h)}_{n\ fois}$.

Théorème 31 <u>*Formule de Taylor-Young*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application n fois différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Alors, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que, pour $||h||_E < \alpha$,

$$||f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - ... - \frac{1}{n!}D^n f(a)(h^n)||_F$$
$$\leq \epsilon ||h||_E^n$$

3 Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites

3.1 Théorème d'inversion locale [GOUan] p.323-324

Définition 32 *Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$. On dit que f est un <u>C^k-difféomorphisme</u> ($k \geq 1$), si f est bijective, de classe C^k et si f^{-1} est de classe C^k.*

Théorème 33 <u>*Théorème d'inversion locale :*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$. S'il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que $Df(a)$ soit inversible, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a et un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de $f(a)$ tel que $f_{|V}$ soit un C^k-difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$.
On a alors $Df_{|V}^{-1}(f(x)) = Df^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$

Application 34 ♠ <u>*Lemme de Morse*</u> ♠
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

Théorème 35 <u>*Théorème d'inversion globale :*</u>
Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application **injective** *de classe C^k $(k \geq 1)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) pour tout $x \in \mathcal{U}$, $Df(x)$ est inversible ;
2) $\mathcal{V} = f(\mathcal{U})$ est ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$.

3.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 36 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ et*

$$\underbrace{f}_{(f_1,...,f_q)} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^q, \ (\underbrace{x_1, ..., x_p}_{:=x}; \underbrace{y_1, ..., y_q}_{:=y}) \mapsto f(x, y)$$

une fonction de classe C^k $(k \geq 1)$.
Soit $(a, b) \in \mathcal{U}$ tel que $f(a, b) = 0$. Si le <u>jacobien partiel de f en (a, b)</u> vérifie :

$$\det [D_2 f(x, f(x))] = \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a, b)\right]_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}} \neq 0$$

Alors il existe :
- un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de a, un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ de b,
- une application $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe C^k, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = y$$

De plus, on a

$$D\varphi(x) = -(D_2 f(x, f(x)))^{-1} \circ (D_1 f(x, f(x)))$$

Exemple 37 *Pour le cercle $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Le théorème des fonctions implicites permet d'exprimer y en fonction de x en tout points de $\mathcal{C} \backslash \{(1, 0), (-1, 0)\}$*

4 Problèmes d'extrema

4.1 Extremas libres [ML3an] p.729 → p.734

Définition 38 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
- Un point x_0 est un <u>minimum</u> de f sur $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $f(x) \geq f(x_0)$.
Un point x_0 est un <u>minimum local</u> de f sur $\mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}_{x_0}$ $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un <u>maximum</u> et un <u>maximum local</u> se définissent de la même manière en renversant les inégalités.
- Un <u>extremum</u> est un minimum ou un maximum.

Définition 39 *Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Un point x_0 de $\mathcal{U}$ est un <u>point critique</u> de f si f est différentiable et si $Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.*

Théorème 40 • <u>*Condition du premier ordre :*</u>
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable en x_0. Si x_0 est un extremum local de f sur $\mathcal{U}$, alors

$$Df(x_0) = 0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})},$$

autrement dit, x_0 est un point critique de f.
• <u>*Condition du second ordre :*</u>
Soient $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application deux fois différentiable en x_0. Alors x_0 est un minimum (resp. maximum) local de f sur $\mathcal{U}$ si et seulement si la hessienne $Hf(x_0)$ est définie positive (resp. définie négative).

Remarque 41 *La réciproque du premier point est fausse et du second point également si on enlève le caractère "définie" de la hessienne ! Par exemple, $f : x \mapsto x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $f'(0) = f''(0) = 0$ donc 0 est un point critique et la hessienne en 0 est positive (car elle est nulle). Or 0 n'est pas un extremum local de f.*

Proposition 42 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert* **convexe** *de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application différentiable et convexe. Si x_0 est un point critique de f, alors x_0 est un minimum pour f sur $\mathcal{U}$.*

Définition 43 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un point x_0 est un <u>point selle</u> de f sur $\mathbb{R}^n$ si x_0 est un point critique de f tel que pour tout voisinage $\mathcal{V}_a$ de a, il existe $(y, z) \in \mathcal{V}_a^2$*

$$f(y) < f(x_0) < f(z).$$

Application 44 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.*
<u>*Points critiques :*</u> $(0, 0), (0, \sqrt{2})$ *et* $(0, -\sqrt{2})$
<u>*Nature des points critiques :*</u>

$$Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Hf_{(0,\sqrt{2})} = Hf_{(0,-\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ n'est pas un extremum. C'est en fait un point selle car ($h(0,1) = -3/4 < 0$ et $h(1,0) = 1 > 0$).
Comme $Hf_{(0,\sqrt{2})}$ et $Hf_{(0,-\sqrt{2})}$ sont définies positives, $(0,\sqrt{2})$ et $(0,-\sqrt{2})$ sont des minimums locaux de f.
De plus, comme $f(x,y) - f(0,\sqrt{2}) = f(x,y) - f(0,-\sqrt{2}) = x^2 + (\frac{y^4}{4} - 1)^2 \geq 0$. Ces minimums sont même globaux.

4.2 Extrema liés [BER] p.191 → 195

Définition 45 *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une partie et $p \in S$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit un vecteur tangent à S au point p s'il existe un intervalle non-vide $I =]-\epsilon, \epsilon[$ et une courbe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que*
(i) $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$;
(ii) $\gamma(I) \subset S$
L'ensemble des vecteurs tangents à S au point p est noté T_pS et s'appelle l'espace tangent de S au point p.

Théorème 46 ♠ *Théorème des extrema liés* ♠
Soit $S = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$, où $g : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1. On suppose que, pour tout $x \in W$, $Dg(x)$ est surjective. Soit aussi $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Si p est un point critique de $f|_S$, alors il existe une forme linéaire $\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telle que

$$Df(p) = \lambda \circ Dg(p)$$

Autrement dit, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons $Df(p)(v) = \lambda(Dg(p)(v))$, ou encore, en écrivant $\lambda(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$: il existe $\lambda_1, ...\lambda_m \in \mathbb{R}$ (dits des multiplicateurs de Lagrange) tels que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(p)(v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i Dg_i(p)(v)$$

Exercice : Calculer la différentielle de l'application

$$\text{Inv} : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \to \text{GL}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^{-1}$$

Solution : Considérons une norme quelconque $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application Inv est différentiable car il s'agit d'une application polynômiale en les coefficients de la matrice M.
Calculons d'abord la différentielle de Inv en l'identité I de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $||H|| < 1$, alors :

$$\text{Inv}(I+H) - \text{Inv}(I) = (I+H)^{-1} - I = \sum_{n\geq 0}(-H)^n - I = I - H + \underbrace{\sum_{n\geq 2}(-H)^n}_{=o(||H||)} - I = -H + o(||H||)$$

On en déduit donc que $D\text{Inv}(I)(H) = -H$.

Soit $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{aligned}
\text{Inv}(M+H) - \text{Inv}(M) = (M+H)^{-1} - M^{-1} &= (M(I + M^{-1}H))^{-1} - M^{-1} \\
&= (I + M^{-1}H)^{-1}M^{-1} - M^{-1} \quad \text{et pour } ||M^{-1}H|| < 1 \\
&= (I - M^{-1}H + \underbrace{o(||M^{-1}H||)}_{=o(||H||)})M^{-1} - M^{-1} \\
&= \cancel{M^{-1}} - M^{-1}HM^{-1} + o(||H||) - \cancel{M^{-1}}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $D\text{Inv}(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$ pour tout $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f, l'existence et la continuité des dérivées partielles de f et la différentiabilité de f.

Solution :
Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$
• Continuité :
- L'application f est manifestement continue en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D$.
- Soit $(x_0, 0) \in D$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0, 0)$. Par conséquent f est continue en tout point $(x_0, 0) \in D$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

• Existence et la continuité des dérivées partielles :
$\rightarrow$ Existence des dérivées partielles :
- Sur $\mathbb{R}^2 \backslash D$, toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

- Soit $(x_0, 0) \in D$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = 0$$

D'où f admet une dérivée partielle par rapport à x en tout point $(x_0, 0) \in D$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$. De même,

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, k) - f(x_0, 0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k^2 \sin\left(\frac{x_0}{k}\right)}{k} = 0$$

D'où f admet une dérivée partielle par rapport à y en tout point $(x_0, 0) \in D$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$.
$\to$ Continuité des dérivées partielles :
- Comme $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$, alors la dérivée partielle par rapport à x est continue en tout point $(x_0, 0) \in D$.
-Comme $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ n'existe pas, alors la dérivée partielle par rapport à y n'est continue en tout point $(x_0, 0) \in D$.

Conclusion : Toutes les dérivées partielles de f sont définies sur $\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash D$.

• Différentiabilité :
- L'application f est clairement différentiable $\mathbb{R}^2 \backslash D$.
- Soit $(x_0, 0) \in D$,

$$|f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0)| = \left| k^2 \sin\left(\frac{x_0 + h}{k}\right) \right| \leq k^2 \leq ||(h, k)||^2$$

Ce qui implique pour $||(h, k)|| \neq 0$,

$$\frac{|f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0)|}{||(h, k)||} \leq ||(h, k)||$$

Ainsi

$$\lim_{||(h,k)|| \to 0} \frac{|f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0)|}{||(h, k)||} = 0$$

Par conséquent, f est différentiable en tout point $(x_0, 0) \in D$ et $Df(x_0, 0) = 0$

Conclusion : f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash D$.