Séries de Fourier. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

L'intuition de Fourier est la suivante : *on peut obtenir une fonction périodique comme somme de fonctions sinusoïdales* (à l'époque, il juge même toute hypothèse de continuité inutile ...).

Cependant la convergence d'une série de Fourier $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$ vers f n'est pas toujours garantie. Un cas particulier est donné par l'espace L^2. Dans cet espace, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$" est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x !

Toute série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série $\sum_{n\geq 1} \cos(nx)$. L'introduction des *noyaux de Dirichlet et de Fejér* va nous permettre d'avoir une écrire sous forme de convolution des sommes partielles des séries et de leur moyenne.

Noyau de Dirichlet d'ordre N

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

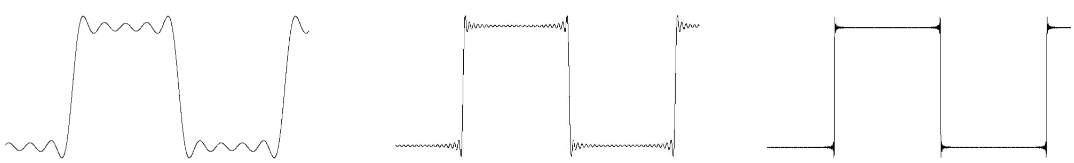
$$\forall f \in L^1_{2\pi}, \quad S_N(f) = f * D_N$$

Noyau de Fejér d'ordre N

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

$$\forall f \in L^1_{2\pi}, \quad \sigma_N(f) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) = f * K_N$$

La convergence des séries de Fourier est une question délicate. On rencontre deux problèmes célèbres. Le premier est le *contre-exemple de Fejér* qui nous assure qu'il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $\sup_{N\geq 1}|S_N(f)(0)| = +\infty$. En particulier, la suite des $S_N(f)$ diverge en 0. L'autre problème est le *phénomène de Gibbs* qui illustre un problème des convergences des séries de Fourier aux points de discontinuité d'une fonction. Sur l'illustration ci-dessous, on a réalisé les sommes partielles des séries de Fourier aux ordres 10, 50 et 250 du signal en créneau.



En plus de la convergence "naturelle" (en norme L^2), on va s'intéresser aux convergences en moyenne de Cesàro (théorème de Fejér), normale et ponctuelle (Test de Dini et théorème de Dirichlet).

Les applications sont intéressantes, notamment pour le calcul des séries numériques. On obtient les célèbres résultats :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Références
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani Mohammed
[HUB1] Calcul scientifique : Tome 1, Florence Hubert et John Hubbard
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements
Théorème de Féjer
Résolution d'une équation différentielle par série de Fourier

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Polynômes trigonométriques [ELAM2] p.170 → 173

Définition-Proposition-Rappels 1 *(i) On note* $\mathcal{C}_{2\pi}$ *l'ensemble des fonctions continues et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*
Muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

$(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_\infty)$ *est un espace de Banach.*
(ii) On note $L^p_{2\pi}$ *l'ensemble des fonctions* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *et qui appartiennent à* L^p_{loc}
Muni de la norme

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)^p| \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

et si $p = +\infty$

$$||f||_\infty = \operatorname*{supess}_{x\in\mathbb{R}}\{|f(x)| \ ; \ x \in [0, 2\pi]\}$$

$(L^p_{2\pi}, ||.||_p)$ *est un espace de Banach* $\forall p \in [1, +\infty]$*.*
(iii) $\mathcal{C}_{2\pi}$ *est dense dans* $(L^p_{2\pi}, ||.||_p)$ $\forall p \in [1, +\infty[$*.*
(iv) $L^2_{2\pi}$*, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.
(v) Par l'inégalité de Hölder, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$$

Définition 2 *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, on désigne par* e_n *l'élément de* $\mathcal{C}_{2\pi}$ *donné par*

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Proposition 3 *La famille* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est un système orthonormal de* $L^2_{2\pi}$*, appelé système trigonométrique.*

Définition 4 *On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.*

Théorème 5 *Pour* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *et tout* $\epsilon > 0$*, il existe un polynôme trigonométrique* P *tel que* $||f - P||_2 < \epsilon$*.*

Théorème 6 *Le système trigonométrique* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* $L^2_{2\pi}$*.*

1.2 Séries trigonométriques et série de Fourier [ELAM2] p.173 → 178

Définition 7 *Soient* $f \in L^1_{2\pi}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe* $c_n(f)$ *donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Remarque 8 *1) Pour* $f \in L^2_{2\pi}$*,* $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$*.*
2) On a également des coefficients de Fourier dits réels ou trigonométriques et donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$*, par :*

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = c_n(f) + c_{-n}(f)$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

Définition 9 *Pour* $f, g \in L^1_{2\pi}$*, le produit de convolution* $f{*}g$ *au point* x*, quand il existe, est donné par*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t - x)g(x)\mathrm{d}t$$

Proposition 10 *Soient* $f \in L^1_{2\pi}$*,* $a \in \mathbb{R}$*,* $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$ *et* $g \in L^\infty_{2\pi}$*. Alors*
(i) $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$ *(où* $f_\sigma(x) = f(-x)$*)*
(ii) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
(iii) $c_n(\tau_a f) = e^{-ina}c_n(f)$ *(où* $\tau_a f(x) = f(x - a)$*)*
(iv) $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f)e_n$
(v) $f * e_n = c_n(f)e_n$
(vi) $||f * g||_\infty \leq ||f||_1||g||_\infty$
(v) Si de plus, f *est dans* $\mathcal{C}_{2\pi}$ *et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux, alors* $c_n(f') = inc_n(f)$

Proposition 11 *Pour tout* $f \in L^1_{2\pi}$*, on a*

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$$

Proposition 12 *(i) L'ensemble*

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ u_n \in \mathbb{C}\ ;\ \lim_{|n|\to+\infty} |u_n| = 0\}$$

muni de la norme

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$$

est un espace de Banach.
(ii) L'application

$$\gamma : \begin{cases} L^1_{2\pi} & \to c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

est un homomorphisme d'algèbres de $(L^1_{2\pi}, *, ||.||_1)$ *dans* $(c_0(\mathbb{Z}), ., ||.||_\infty)$*, qui est continu et de norme 1.*

Définition 13 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille de nombres complexes. On dit que la série* $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ *converge si chacune des séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ *converge, et on note la somme*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

On appelle <u>*série trigonométrique*</u> *toute somme de la forme*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \qquad (\alpha_n \in \mathbb{C})$$

dont on définit la convergence comme indiqué ci-dessus en prenant pour $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *des* <u>*sommes partielles symétriques d'ordre n*</u> *:*

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$$

Définition 14 *Soit* $f \in L^1_{2\pi}$*. On appelle* <u>*série de Fourier*</u> *de f la série trigonométrique (formelle)* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$*, où* $c_n(f)$ *sont les coefficients de Fourier de f.*

Remarque 15 *Toute série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque est fausse ! Exemple :* $\sum_{n\geq 1} \cos(nx)$

Théorème 16 *Soient* $f \in L^1_{2\pi}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite de nombres complexes. Si la série* $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e^{inx}$ *converge vers f dans* $L^1_{2\pi}$*, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{inx}$ *est la série de Fourier de f (i.e.)*

$$u_n = c_n(f),\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

1.3 Noyaux de Féjer et de Dirichlet [ELAM2] p184 → 186

Définition 17 *La fonction*

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

où $e_n(x) = e^{inx}$*, est appelé* <u>*le noyau de Dirichlet d'ordre N*</u>*.*

Proposition 18 *(i)* D_N *est une fonction paire,* 2π*-périodique, et vérifie*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = 1$$

(ii) D_N *est un prolongement par continuité à* $\mathbb{R}$ *de la fonction*

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

(iii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$*, on a*

$$S_N(f) = f * D_N$$

Définition 19 *La fonction*

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

où $e_n(x) = e^{inx}$*, est appelé* <u>*le noyau de Fejér d'ordre N*</u>*.*

Proposition 20 *(i)* K_N *est un prolongement par continuité à* $\mathbb{R}$ *de la fonction*

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2$$

(ii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$*, on a*

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) = f * K_N$$

(iii) $(K_N)_{N\geq 1}$ *est une approximation de l'unité de* $L^1_{2\pi}$*.*

2 Différents types de convergence

2.1 Problèmes de convergence des séries de Fourier

Proposition 21 <u>*Contre-exemple de Fejér*</u>
Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *telle que*

$$\sup_{N\geq 1} |S_N(f)(0)| = +\infty$$

En particulier, la suite des $S_N(f)$ *diverge en 0.* **[ELAM2] p.189-190**

Proposition 22 <u>*Phénomène de Gibbs*</u>
Si f est une fonction C^1 *par morceaux et ayant une discontinuité en* x_0*, disons avec* $f_+(x_0) > f_-(x_0)$*, alors dans tout voisinage de* x_0 *les sommets partielles* $S_N(f)$ *ont un maximum qui dépasse* $f_+(x_0)$ *d'environ* 10% *du saut* $f_+(x_0) - f_-(x_0)$*.* **[HUB1] p.98**

2.2 Convergence L^2 [ELAM2] p.193-194

Théorème 23 *Formule de Parseval*
Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

Remarque 24 *En coefficients de Fourier réels, la formule de Parseval devient*

$$||f||_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$$

2.3 Convergence normale [ELAM2] p.195

Théorème 25 *Si f est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on a*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

2.4 Convergence en moyenne de Cesàro [ELAM2] p.190 → 192

Théorème 26 ♠ *Théorème de Féjer* ♠
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p, \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_p = 0$$

Théorème 27 *(1) Si f et g sont dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ et si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ partout sur $\mathbb{R}$.*
(2) Si f et g sont dans $L^1_{2\pi}$ et si, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_n(f) = c_n(g)$, alors $f = g$ dans $L^1_{2\pi}$.

2.5 Convergence ponctuelle [ELAM2] p.188 → 190, p.196

Proposition 28 *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s$ si et seulement si, pour un $\delta \in]0, 2\pi]$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} - s\right) D_n(t)\mathrm{d}t = 0$$

Proposition 29 *Test de Dini*
Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Si pour un $\delta \in]0, 2\pi]$, $c \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^\delta \left|\frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2s}{t}\right| \mathrm{d}t < +\infty$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s$$

Théorème 30 *1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\left(\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = l\right) \Rightarrow (f(x_0) = l)$$

2) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et si $(S_N(f))_N$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$$

Théorème 31 *Théorème de Dirichlet*
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que
(i)

$$f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ et } f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

existent,
(ii)

$$f'(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-} \text{ et,}$$

$$f'(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}$$

existent.
Alors

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

3 Applications

3.1 Calcul de séries numériques

Application 32
•

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

3.2 Equations différentielles [FGNan4] p.85-86

Application 33 <u>*Résolution d'une équation différentielle par série de Fourier*</u>
Les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = |\sin x|$$

sont de la forme

$$y(x) = a\sin x + b\cos x + f(x)$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ *et*

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$$

Questions

Exercice : Montrer que deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

Solution : Soient f et g deux fonctions continues ayant les mêmes coefficients de Fourier. Par suite, les coefficients de Fourier de la fonction $f-g$ sont nuls. Par le théorème de Parseval, on en déduit que

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{c_n(f-g)}_{=0}|^2 = ||f-g||_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)-g(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Or, comme la fonction $|f-g|^2$ est continue, positive, et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, on en déduit que la fonction est identiquement nulle et donc que $f = g$.

Exercice : Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \text{ est de classe } C^\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ on a } c_n(f) = o(1/n^k) \text{ quand } |n| \to +\infty$$

Solution : $\underline{\Rightarrow :}$ On suppose que f est de classe C^∞.
Par intégrations par parties successives, on a

$$c_n(f) = \frac{c_n(f^{(k)})}{(in)^k}$$

Par suite,

$$|n^k c_n(f)| = |c_n(f^{(k)})| \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(car on rappelle que, pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$, qui est une conséquence du théorème de Parseval : la série $\sum |c_n(f)|^2$ converge, son terme général tend donc vers 0.)
On a donc bien

$$c_n(f) = o(1/n^k) \text{ quand } |n| \to +\infty$$

$\underline{\Leftarrow :}$ On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$ et on considère $S(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.
Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$, on en déduit qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $c_n(f) \leq \frac{\alpha}{|n|^2+1}$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)e^{inx}| \leq \frac{\alpha}{|n|^2+1}$$

Le membre de droite de l'inégalité précédente est le terme général d'une série convergente. Ainsi, S est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, avec ce qui précède,

$$|(in)^k c_n(f)| = |c_n(f^{(k)})| \leq \frac{\beta_k}{|n|^2+1}$$

pour une certaine constante β_k (car $n^{k+2}c_n(f) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). Par conséquent, toutes les séries dérivées de S convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et donc que S est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Par suite, S est somme d'une série trigonométrique qui converge normalement, (donc uniformément) et ainsi ses coefficients de Fourier sont les coefficients de la série trigonométrique ($i.e$) $c_n(S) = c_n(f)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Or, deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales, et donc $S = f$ qui est par conséquent C^∞.

Exercice : Inégalité de Wirtinger
Soit $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Quand a-t-on égalité ?

Solution : Bien évidemment, c'est la formule de Parseval ici qui va nous être utile.
En reprenant les données de l'énoncé, on a $c_0(f) = 0$ et, comme $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a également $c_n(f') = inc_n(f)$. Par conséquent, la formule de Parseval donne

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Cas d'égalité : Il y a égalité si et seulement si l'inégalité ci-dessus est une égalité (*i.e.*)

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad |c_n(f)|^2 = n^2 |c_n(f)|^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_n(f) = 0, \ \forall |n| \geq 2$$

De plus, comme $f \in \mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, elle coïncide partout avec sa série de Fourier et donc, en résumé, il y a égalité si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$