Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.

Mohamed NASSIRI

On se rappelle tous de ce problème élémentaire de la chute d'un corps de masse m sans vitesse initiale, sans frottement et donc soumis qu'à son poids.

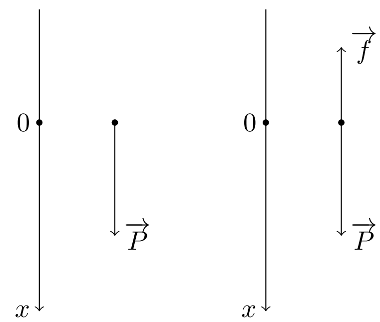
Le principe fondamental de la mécanique nous donne la relation

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = m\overrightarrow{a} \quad \Rightarrow \quad a(t) = g$$

Puis, on obtient, en intégrant successivement

$$v(t) = gt \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

L'étude se complique si l'on considère les frottements ...



Il nous faut donc une théorie plus robuste pour étudier des cas plus généraux d'équations différentielles.

Comme point de départ, on considère $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Une équation différentielle est une équation de la forme

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

A un équation différentielle, on ajoute souvent une *condition initiale*. On parle ainsi de *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Un premier théorème tombe : le *théorème de Cauchy-Lipschitz local*. En demandant "seulement" à f d'être *localement lipschitzienne en la seconde variable*, ce théorème nous fournit déjà un résultat remarquable d'existence et d'unicité (local donc) de solutions. Géométriquement, ce théorème signifie que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.

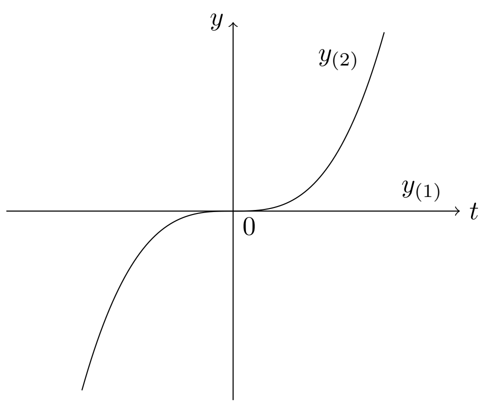
La seule continuité ne suffit pas comme le montrer l'exemple académique suivant :
Pour le problème de Cauchy $y' = 3|y|^{2/3}$ avec $y(0) = 0$, on trouve deux solutions

$$y_{(1)} = 0 \;\; et \;\; y_{(2)} = t^3, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ces solutions se coupent puisque la fonction

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$(t, y) \mapsto f(t, y) = 3|y|^{2/3}$$

n'est pas localement lipschitzienne en tout point $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.



L'étude des équations différentielles du type $X' = f(t, X)$ n'est pas superflue. Bien au contraire ! Toute équation différentielle sur $\mathbb{R}^n$ d'ordre p du type

$$Y^{(p)} = A_{(p-1)}(t)Y^{(p-1)} + ... + A_0(t)Y + B(t) \;\; (\mathcal{L})$$

où $A_{(p-1)}, ..., A_0$ sont des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue quelconque, se ramène à une équation du type $X' = f(t, X)$.

Malheureusement, il n'y a en général pas de méthode pour résoudre $X' = f(t, X)$ (même pour des équations $y' = A(t)y$ en dimension $n \geq 2$). On n'a cependant quelques recettes : équations à variables séparées, de Bernoulli, de Ricatti, etc. Mais, concernant les solutions particulières, il est toujours possible d'en trouver quand on connait l'ensemble des solutions de l'équation homogène : c'est la *méthode de la variation de la constante.*

Un type d'équations différentielles méritent également notre attention : les équations différentielles dites *autonomes* (*i.e.*) $X' = f(X)$. On peut en faire une étude qualitative détaillée du *portrait de phase*, notamment en dimension 2 seulement grâce à l'étude de la matrice A du système différentielle

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Pour des systèmes différentiels plus compliqués, il faut une étude détaillée au cas par cas. L'un des plus connus est sans doute le modèle de Lotka-Voltera.

Références

[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
[HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Théorème de Cauchy-Lipschitz local
Résolution de l'équation de Bessel

1 Généralités

1.1 Définitions. Solutions maximales et globales [DEM] p.115 → 121

Définition 1 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue.*
Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^n$ telle que
(i) $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \mathcal{U}$
(ii) $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

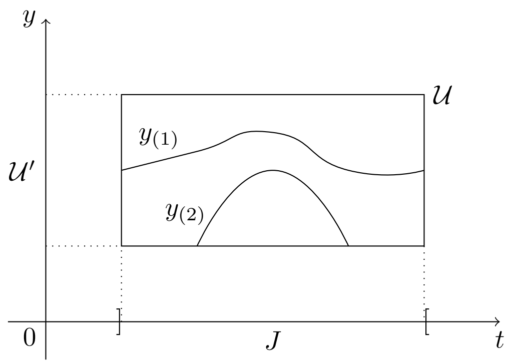
Définition 2 *Etant donné un point $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.*

Définition 3 *Soient $y : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}_{|I} = y$*
On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$

Théorème 4 *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Définition 5 *On suppose ici que l'ouvert $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U} = J \times \mathcal{U}'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{U}'$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Remarque 6 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*



Sur le schéma, $y_{(1)}$ est globale alors que $y_{(2)}$ est maximale mais non globale.

Théorème 7 *Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^k, toute solution de (E) $y' = f(t, y)$ est de classe C^{k+1}.*

1.2 Lemme de Gronwall et applications [GOUan] p.377 → 379

Proposition 8 *Lemme de Gronwall*
Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

Corollaire 9 *Soient ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives telles que*

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

Alors $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq c\ \exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$$

Corollaire 10 *Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \beta \geq 0,\ \forall t \in [a,b],\ ||y'(t)|| \leq \beta + \alpha||y(t)||$$

Alors

$$\forall t \in [a,b],\ ||y(t)|| \leq ||y(a)||e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha(t-a)} - 1)$$

Corollaire 11 *Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement positive et croissante. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.*

1.3 Théorème d'existence des solutions [DEM] p.121 → 121

Proposition 12 *Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si*
(i) y est continue et $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \mathcal{U}$,
(ii) $\forall t \in I$,

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u$$

Définition 13 *On dit que C est un cylindre de sécurité pour l'équation (E) si toute solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(y_0, r_0)$, où le cylindre $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset \mathcal{U}$.*

Proposition 14 *Pour que C soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre*

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$$

où $\sup\limits_{(t,y)\in C_0} ||f(t,y)||$.

Définition 15 *On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,y) \mapsto f(t,y)$ est localement lipschitzienne en y si pour tout $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, il existe un cylindre $C_0 = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset \mathcal{U}$ et une constante $k = k(t_0, y_0) \geq 0$ tels que $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in C_0$,*

$$||f(t, y_1) - f(t, y_2)|| \leq k||y_1 - y_2||$$

Théorème 16 ♠*Théorème de Cauchy-Lipschitz local* ♠
Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathcal{U}$.

Théorème 17 *Soient $y_{(1)}, y_{(2)} : I \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de (E), avec f localement lipschitzienne en y. Si $y_{(1)}$ et $y_{(2)}$ coïncident en un point de I, alors $y_{(1)} = y_{(2)}$ sur I tout entier.*

Corollaire 18 *Unicité globale*
Si f est localement lipschitzienne en y sur $\mathcal{U}$, pour tout point $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, il passe une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^n$ et une seule.

Remarque 19 *Le théorème d'unicité signifie géométriquement que des courbes intégrales distinctes ne peuvent se couper.*

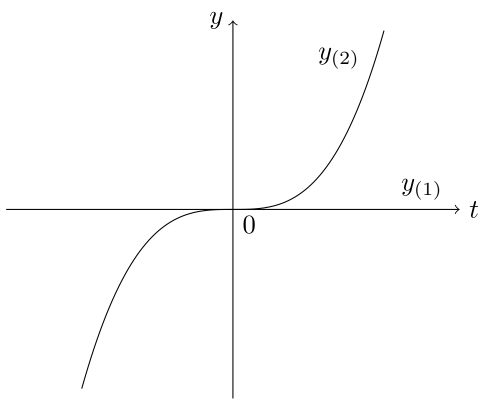
Exemple 20 *Pour le problème de Cauchy $y' = 3|y|^{2/3}$ avec $y(0) = 0$, on trouve deux solutions*

$$y_{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad y_{(2)} = t^3\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Ces solutions se coupent puisque la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ (t,y) &\mapsto f(t,y) = 3|y|^{2/3} \end{aligned}$$

n'est pas localement lipschitzienne en tout point $(t_0, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.



Théorème 21 *Condition suffisante d'existence de solutions globales*
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue sur un ouvert produit $\mathcal{U} = J \times \mathbb{R}^n$, où $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On suppose qu'il existe une fonction continue $k : J \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \in J$ fixé, l'application $y \mapsto f(t,y)$ soit lipschitzienne de rapport $k(t)$ sur $\mathbb{R}^n$.
Alors toute solution maximale de l'équation $y' = f(t,y)$ est globale.

Théorème 22 *Théorème des bouts :*
Soient $I =]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouverte de $\mathbb{R}^n$, et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $y :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = f(t,y)$.
Alors si $\beta < b$ (resp. si $a < \alpha$), pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe un voisinage V de β (resp. de α) dans $]\alpha,\beta[$ tel que $y(t) \notin K$ pour tout $t \in V$.

Remarque 23 *Ainsi le théorème des bouts explique que l'on peut avoir les deux situations suivantes suivant l'ouvert $\mathcal{U}$:*
- Si $\mathcal{U}$ est borné, $y(t)$ tend vers le bord de $\mathcal{U}$
- Si $\mathcal{U}$ est non borné, $y(t)$ tend vers le bord de $\mathcal{U}$ ou $y(t)$ part à l'infini en temps fini (i.e.) $||y(t)|| \underset{t\to b}{\longrightarrow} +\infty$.
Voir Figure a *et* Figure b

2 Résolution d'équations différentielles

2.1 Equations différentielles et séries entières

Application 24 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

Alors f est l'unique solution sur tout intervalle $]-\alpha,\alpha[$ où $\alpha \in]0,+\infty[$ du système différentiel

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4^p p! x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

[DTZ] p.334 → 336

Application 25 ♠ *Résolution de l'équation de Bessel* ♠
Il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (E)$$

développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

On déduit également

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

[FGNan4] p.101

2.2 Méthode de tir [HUB2] p.108 → 111

Méthode 26 *Soient $f \in C([0,1[)$ et $q \in C([0,1[)$ une fonction à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger)\quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La méthode de tir consiste à remplacer le problème $(\dagger)$ par le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = k \end{cases}$$

est de montrer qu'il existe une valeur de $u'(0) = k$ tel que $u(1) = 0$.
Cette méthode est spécifique à la dimension 1.

Remarque 27 *On va supposer que la fonction q est constante.*

Théorème 28 *Soient $f \in C([0,1[)$ et $q \geq 0$. Le problème $(\dagger)$ admet une et une seule solution donnée par*

$$u(x) = -\int_0^x\int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t + x\int_0^1\int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
si $q = 0$
$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{q}}\int_0^x \sinh((y-x)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y - \frac{\sinh(x\sqrt{q})}{\sinh(\sqrt{q})}\int_0^1 \sinh((y-1)\sqrt{q})f(y)\mathrm{d}y$$
si $q > 0$

2.3 Le cas linéaire [GOUan] p.357 → 361

Théorème 29 *Soit une équation différentielle linéaire*

$$y' = A(t)y + B(t) \qquad (\mathcal{L}_1)$$

où $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B : I \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues. Alors pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de $(\mathcal{L}_1)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème 30 *Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions maximales de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y' = A(t)y \qquad (H)$$

est un s.e.v. de dimension n du $\mathbb{R}$-e.v. $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Corollaire 31 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $(\mathcal{L}_1)$ est un espace affine de dimension n.*

Définition 32 *Soient $y_1, ..., y_n$ n solutions de (H). On appelle wronskien de $y_1, ..., y_n$ l'application*

$$\begin{aligned} \operatorname{wrsk} : I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(y_1(t), ..., y_n(t)) \end{aligned}$$

Exemple 33 *Le wronskien de deux solutions u et v d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2*

$$y'' = p(t)y'q(t)y$$

est

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - u'v$$

Proposition 34 *(i) Soient $y_1, ..., y_n$ solutions de (H). Le rang des vecteurs $y_1(t), ..., y_n(t)$ est indépendant de $t \in I$.*
(ii) Des solutions $y_1, ..., y_n$ de (H) forment une base des solutions de (H) si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $\operatorname{wrsk}((y_1(t_0), ..., y_n(t_0)) \neq 0$, et dans ce cas, on a $\operatorname{wrsk}((y_1(t), ..., y_n(t)) \neq 0$ pour tout $t \in I$

Méthode 35 *Résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1*
- *Les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont proportionnelles à $t \mapsto e^{\psi(t)}$, où ψ est une primitive de a sur I.*
- *Méthode de la variation de la constante pour l'équation $y' = a(t)y + b(t)$: on cherche des solutions de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{\psi(t)}$, qui nous conduit à $\lambda'(t) = b(t)e^{-\psi(t)}$.*

Méthode 36 *Résolution d'un système linéaire d'ordre 1*
- *Il n'y a en général pas de méthode pour résoudre $y' = A(t)y$ en dimension $n \geq 2$.*
- *Etant donné $y_1, ..., y_n$ solutions de (H), on utilise la méthode de la variation de la constante pour l'équation $y' = A(t)y + B(t)$: on cherche des solutions de la forme $t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)y_i(t)$, qui nous conduit à*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)y_i(t) = b(t)$$

Exemple 37 *On suppose connues deux solutions linéairement indépendantes u et v de l'équation homogène de l'équation différentielle $y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$ qui se réécrit*

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

On cherche des solutions de la forme

$$W(t) = \lambda(t)U(t) + \mu(t)V(t)$$

où $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ et $V(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$. Ainsi, $t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t)$ est solution si et seulement si

$$\lambda'(t)U(t) + \mu'(t)V(t) = C(t)$$

(i.e.)

$$\begin{cases} \lambda' u + \mu' v = 0 \\ \lambda' u + \mu' v = c \end{cases}$$

Proposition 38 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'équation différentielle $y' = Ay$ a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$, et la solution vérifiant $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ est*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto e^{At}y_0 \end{aligned}$$

Théorème 39 *Soit*

$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y = 0 \qquad (E)$$

une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p sur $\mathbb{R}$. En considérant le polynôme $P(X) = X^p + a_1X^{p-1} + ... + a_pX$ (appelé polynôme caractéristique) que l'on factorise sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$. Les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^k e^{r_i t} P_i(t)$$

avec $\deg P_i < m_i$.

Théorème 40 *Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^n$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f. Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on note N_i le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i et on note $\alpha_i := \dim N_i$. Ainsi, on a*

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Pour tout s.e.v. N de $\mathbb{C}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $\mathcal{S}_{N,\alpha,\lambda}$ l'e.v. des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\lambda t}P(t)$; où P est un polynôme à coefficients dans N de degré strictement inférieur à α. Si on note $\mathcal{S}$ l'e.v. des solutions de l'équation différentielle $X' = f(X)$. Alors

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}$$

2.4 Quelques recettes [DEM] p.146 $\to$ 154

Méthode 41 *Equations à variables séparées*

$$y' = f(t)g(y)$$

avec f et g des fonctions continues.
En considérant l'ouvert $\mathcal{U} = \{(t,y) \mid g(y) \neq 0\}$, on a

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda)$$

où F et G sont respectivement des primitives de f et g, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 42 *Equations de Bernoulli*

$$y' = p(t)y + q(t)y^{\alpha}$$

avec p et q des fonctions continues et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
En considérant l'ouvert $\mathcal{U} = \{(t,y) \mid y > 0\}$, on pose $z = y^{1-\alpha}$, et on a

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = p(t)z + q(t)$$

qui est une équation linéaire en z.

Méthode 43 *Equations de Ricatti*

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$$

avec a,b et c des fonctions continues.
En connaissant une solution particulière de $y_{(1)}$, on pose $y = y_{(1)} + z$, et on a

$$z' = (2a(t)y_{(1)}(t) + b(t))z + a(t)z$$

qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

2.5 Approche numérique : méthode d'Euler-Cauchy [GOUan] p.388

Théorème 44 *Soient $T > 0$, $I = [0,T]$, et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $L > 0$ telle que*

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \ ||f(t,x) - f(t,y)|| \leq L||x-y||$$

Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t,y)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et pour tout $n \in \{0,1,...,N\}$, $t_n = nh$. On définit $y_0, y_1, ..., y_N$ par récurrence par

$$y_0 = y(0) \quad et \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Alors, $\forall n \in \{0,1,...,N\}$,

$$||e_n|| := ||y(t_n) - y_n|| \leq \frac{Mh}{2L} e^{Lt_n}$$

où $M = \sup_{t \in I} ||y''(t)||$

3 Etude qualitative des systèmes autonomes

3.1 Champ de vecteurs et points d'équilibre [DEM] p.272 $\to$ 278

Définition 45 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On appelle champ de vecteurs dans $\mathcal{U}$ toute application de la forme*

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathcal{U}$$

où f est une fonction continue sur $\mathcal{U}$.
On appelle système autonome associé au champ de vecteurs f le système différentiel

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x(t))$$

Exemple 46 • $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *Voir* Figure2

• $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ *Voir* Figure3

Définition 47 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Un point $x_0 \in \mathcal{U}$ est dit d'équilibre ou critique si $f(x_0) = 0$.*

3.2 Stabilité des solutions [DEM] p.265 $\to$ 268

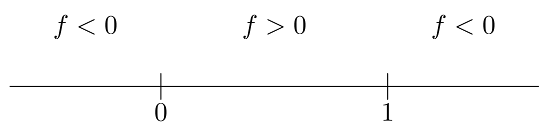
Exemple 48 *Considérons l'équation différentielle logistique*

$$x'(t) = f(x(t)) = x(t)(1 - x(t))$$

On vérifie facilement que

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x(t_0)}{x(t_0)} e^{-(t-t_0)}}$$

Notons $]T_{min}, T_{max}[$ l'intervalle de temps maximal sur lequel x est défini.



- *Si $x(t_0) < 0$, alors*

$$T_{max} < +\infty, \ T_{min} = -\infty, \ et \ \lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$$

- *Si $x(t_0) > 1$, alors*

$$T_{max} = +\infty, \ T_{min} > -\infty, \ et \ \lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$$

- *Si $0 < x(t_0) < 1$, alors*

$$T_{max} = +\infty, \ T_{min} = -\infty, \ et$$
$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0, \ \lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$$

[HUB2] p.62

Définition 49 *On considère le problème*

$$(E) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On suppose que la solution de ce problème existe sur $[t_0, +\infty[$.
Soit $y(t, z)$ *la solution maximale de* (E) *tel que* $y(t_0, z) = z$. *On dira que la solution* $y(t_0, z) = z$ *est* *stable* *s'il existe une boule* $\overline{B}(z_0, r)$ *et une constante* $C \geq 0$ *telles que*
(i) $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$, $t \to y(t, z)$ *est définie sur* $[t_0, +\infty[$.
(ii) $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$, *on a*

$$||y(t, z) - y(t, z_0)|| \leq C||z - z_0||$$

On dira que la solution $y(t_0, z) = z$ *est* *asymptotiquement stable* *si elle est stable si la condition* (ii') *(plus forte que la condition* (ii)*) est vérifiée :*
(ii') il existe une boule $\overline{B}(z_0, r)$ *et une fonction* $\gamma : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *continue avec* $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = 0$ *telles que pour tout* $z \in \overline{B}(z_0, r)$ *et* $t \geq t_0$, *on ait*

$$||y(t, z) - y(t, z_0)|| \leq \gamma(t)||z - z_0||$$

Voir Figure14

Théorème 50 *On considère le problème*

$$Y' = AY, \quad \text{avec } Y \in \mathbb{C}^m, \ A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$$

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *les valeurs propres complexes de la matrice* A. *Alors les solutions du système linéaire* $Y' = AY$ *sont :*
- asymptotiquement stables si et seulement si $\Re e(\lambda_j) < 0 \ \forall j \in 1, ..., m$.
- stables si et seulement si $\forall j \in 1, ..., m$ *ou bien* $\Re e(\lambda_j) < 0$, *ou bien* $\Re e(\lambda_j) = 0$ *et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Théorème 51 (admis)
On considère le problème

$$Y' = AY + g(t, Y) \qquad (\dagger)$$

avec $Y \in \mathbb{C}^m$, $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ *et* $g : t \to [t_0, +\infty[$.
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *les valeurs propres complexes de la matrice* A *telles que* $\Re e(\lambda_j) < 0 \ \forall j \in 1, ..., m$.
(i) s'il existe une fonction $k : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *continue telle que* $\lim\limits_{t \to +\infty} k(t) = 0$ *et* $\forall t \in [t_0, +\infty[$, $\forall Y_1, Y_2 \in \mathbb{K}^m$,

$$||g(t, Y_1) - g(t, Y_2)|| \leq k(t)||Y_1 - Y_2||$$

alors toute solution de $(\dagger)$ *est asymptotiquement stable.*
(ii) si $g(t, 0) = 0$ *et s'il existe* $r_0 > 0$ *et une fonction* $k : [0, r_0] \to \mathbb{R}_+$ *continue telle que* $\lim\limits_{r \to 0} k(r) = 0$ *et* $\forall t \in [t_0, +\infty[$, $\forall Y_1, Y_2 \in \overline{B}(0, r)$,

$$||g(t, Y_1) - g(t, Y_2)|| \leq k(r)||Y_1 - Y_2||$$

pour $t \leq r_0$, *alors il existe une boule* $\overline{B}(0, r_1) \subset \overline{B}(0, r_0)$ *telle que toute solution* $Y(t, Z_0)$ *de valeur initiale* $Z_0 \in \overline{B}(0, r_1)$ *est asymptotiquement stable.*

Proposition 52 *Cas d'un champ linéaire en dimension 2 :*

$$\begin{cases} x'(t) = ax + by \\ y'(t) = cx + dy \end{cases}$$

Voir Tableau1

3.3 Modèle de Lotka-Voltera [ML3an] p.786-787

Définition 53 *On souhaite suivre l'effectif de deux populations* $x(t)$ *(les proies) et* $y(t)$ *(les prédateurs). Le système proposé est alors le suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - cx(t)y(t) \\ y'(t) = -by(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

Proposition 54 *Soit* $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie pour tout* $x, y > 0$ *par*

$$H(x, y) = dx - b\ln x + cy - a\ln y$$

Alors H *est une intégrale première pour le système* (1), $(i.e.)$ *si* $(x(t), y(t))$ *est solution de* (1) *sur* $[0, T)$, *alors*

$$\forall t < T, \quad H(x(t), y(t)) = cste$$

Illustration 55 *Voir* Figure15 *et* Figure16

Illustrations

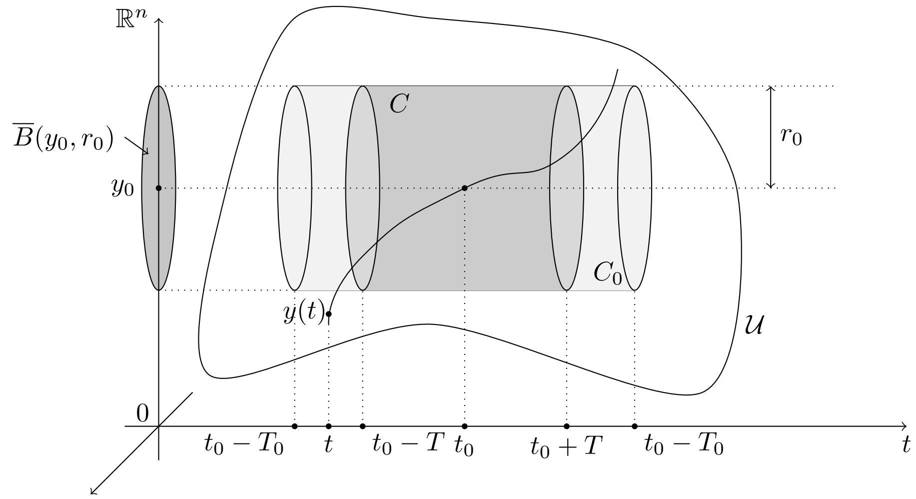


Figure 1 : C est un cylindre de sécurité mais pas C_0.

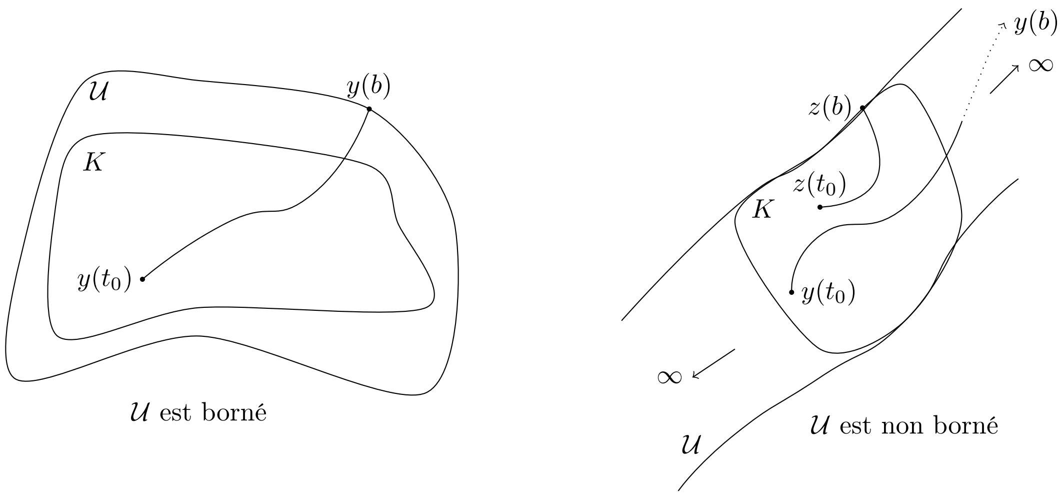


Figure a et b : Illustrations des deux situations du théorème des bouts

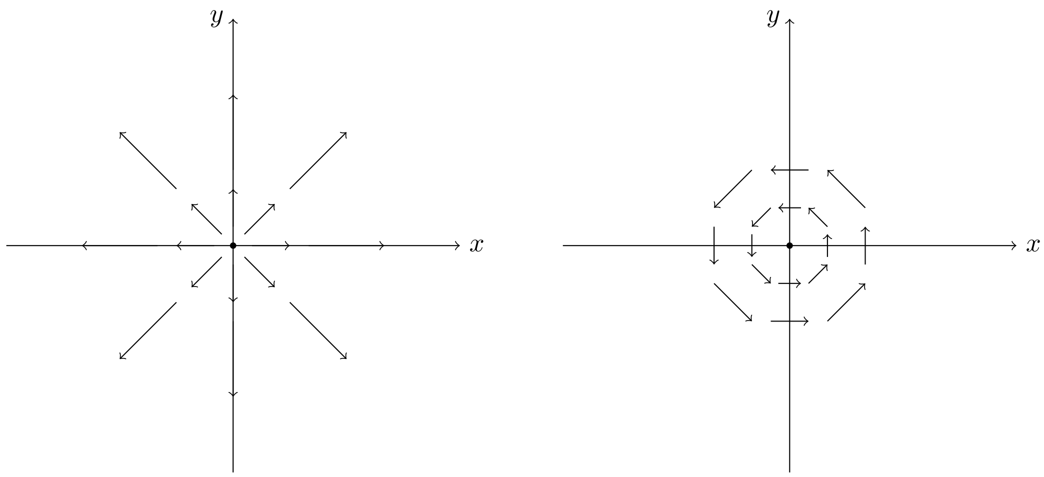


Figure 2 : Champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Figure 3 : Champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\lambda_2\},\ \lambda_1\neq\lambda_2$ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda_1 t}\\ y(t)=y_0e^{\lambda_2 t}\end{cases}$	$0<\lambda_2<\lambda_1$ Figure 4	$\lambda_2<\lambda_1<0$ Figure 5	$\lambda_2<0<\lambda_1$ Figure 6
$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}$ A diagonalisable $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda t}\\ y(t)=y_0e^{\lambda t}\end{cases}$	$\lambda>0$ Figure 7	$\lambda<0$ Figure 8	
$\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda\}$ A non diagonalisable $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}x(t)=x_0e^{\lambda t}\\ y(t)=(y_0+x_0t)e^{\lambda t}\end{cases}$	$\lambda>0$ Figure 9	$\lambda<0$ Figure 10	
$\mathrm{Sp}(A)=\{\alpha+i\beta,\alpha-i\beta\}$ $\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$	Solutions $\begin{cases}z(t)=x(t)+iy(t)\\ z(t)=z_0^{(\alpha+i\beta)t}\end{cases}$	$\alpha>0$ Figure 11	$\alpha<0$ Figure 12	$\alpha=0$ Figure 13

Tableau 1 : Zoologie des courbes intégrales pour un champ linéaire de vecteurs.

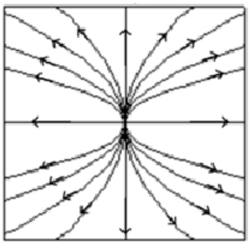


Figure 4 : Noeud impropre instable

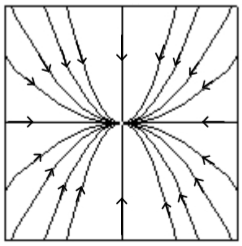


Figure 5 : Noeud impropre stable

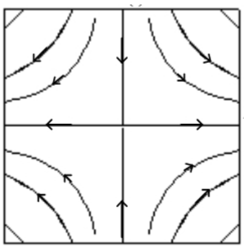


Figure 6 : Point col

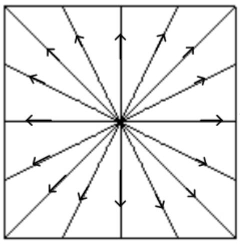


Figure 7 : Noeud propre stable

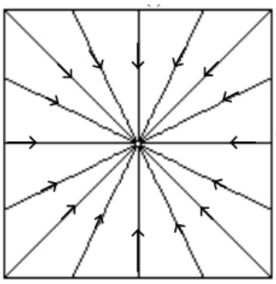


Figure 8 : Noeud propre instable

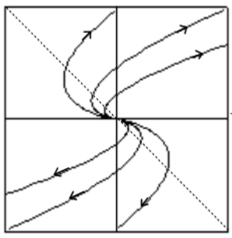


Figure 9 : Noeud exceptionnel instable

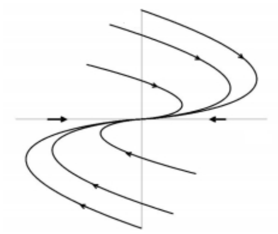


Figure 10 : Noeud exceptionnel stable

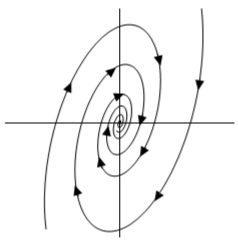


Figure 11 : Foyer stable

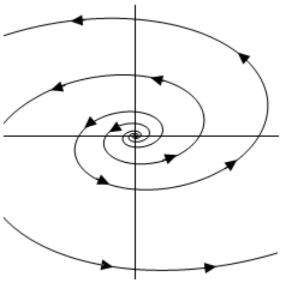


Figure 12 : Foyer instable

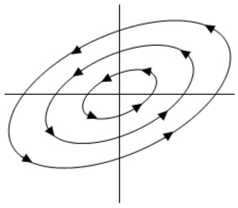


Figure 13 : Centre

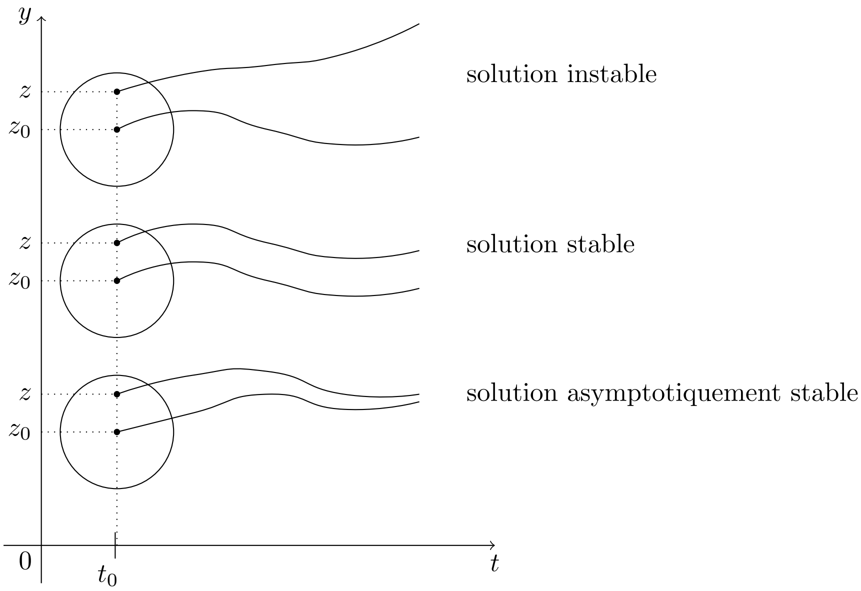


Figure 14 : Illustrations des différentes notions de stabilité

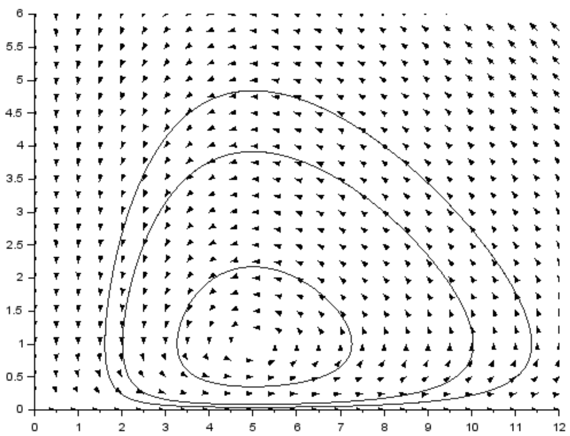


Figure 15 : Champ de vecteurs et quelques courbes intégrales pour Lotka-Volterra

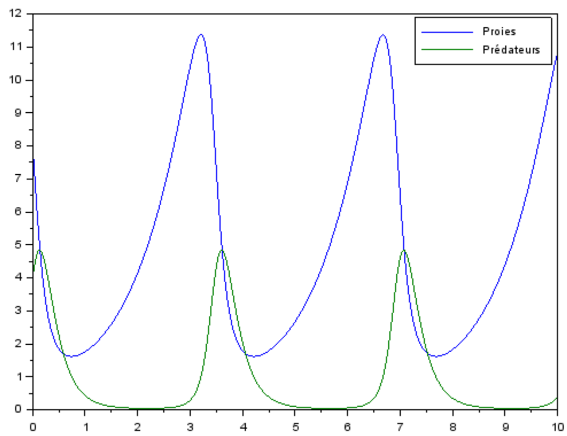


Figure 16 : Quantité de proies et prédateurs en fonction du temps

Questions

Exercice : 1) Considérons
$$y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p = 0 \qquad (E)$$
une équation différentielle linéaire homogène d'ordre p sur $\mathbb{R}$ et son polynôme caractéristique $P(X) = X^p + a_1X^{p-1} + ... + a_p$ que l'on factorise sous la forme $P(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - r_i)^{m_i}$.
Montrer que les solutions de (E) sont les applications

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{k} e^{r_i t} P_i(t)$$

avec $\deg P_i < m_i$.
2)a) Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{C}^n$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f. Pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, on note N_i le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_i et on note $\alpha_i := \dim N_i$. Ainsi, on a

$$\chi_f(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Pour tout s.e.v. N de $\mathbb{C}^n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on note $\mathcal{S}_{N,\alpha,\lambda}$ l'e.v. des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{\lambda t}P(t)$; où P est un polynôme à coefficients dans N de degré strictement inférieur à α.
Si on note $\mathcal{S}$ l'e.v. des solutions de l'équation différentielle $X' = f(X)$. Alors

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1,\alpha_1,\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{N_k,\alpha_k,\lambda_k}$$

b) Quand a-t-on égalité ?

Solution : 1) On note $P_i(X) = (X - r_i)^{m_i}$ et $\mathcal{S}_P$ l'espace des solutions de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$, où
$$P(D)(y) = y^{(p)} + a_1 y^{(p-1)} + ... + a_p y$$
où D est l'opérateur de dérivation.
• Montrons que
$$\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{P_k}$$
On rappelle que l'opérateur de dérivation est

$$\begin{aligned} D : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) &\to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ u &\mapsto u' \end{aligned}$$

Ainsi dire que y est solution de (E) est équivalent à dire que $P(D)(y) = 0$ (*i.e.*) $y \in \mathrm{Ker}P(D)$.
D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathrm{Ker}P(D) = \mathrm{Ker}P_1...P_k(D) = \mathrm{Ker}P_1(D) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}P_k(D)$$

(*i.e.*)
$$\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{P_k}$$
Ainsi, il nous suffit seulement de décrire chaque $\mathcal{S}_{P_i}$ où $P_i(X) = (X - r_i)^{m_i}$.

• Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que les fonctions $t \mapsto e^{rt}F(t)$ où F est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à n sont solutions de l'équation différentielle $P_n(D)(y) = 0$, où $P_n(X) = (X - r)^n$.
- Pour $n = 1$, on a $P_1(X) = (X - r)$. Ainsi,

$$P_1(D)(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' - ry = 0$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{rt}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Supposons le résultat vraie au rang n et montrons la au rang $n + 1$. En remarquant que

$$P_{n+1}(D)(y) = (y - r)^{(n+1)} = ((y - r)')^{(n)} = P_n(D)[P_1(D)(y)]$$

cela implique $P_1(D)(y)$ est de la forme $t \mapsto e^{rt}F(t)$ où F est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à n (par hypothèse de récurrence). Or l'équation

$$y' - ry = e^{rt}F(t) \quad \Leftrightarrow \quad (ye^{-rt})' = F(t)$$

Ce qui équivaut à dire que $y = e^{rt}G(t)$ où G est une primitive de F et donc $\deg(G)$ est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à $n+1$.

• Comme, on a $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P_1} \oplus ... \oplus \mathcal{S}_{P_k}$ et que chaque $\mathcal{S}_{P_i}$ est le s.e.v. des fonctions $t \mapsto e^{r_i t}F_i(t)$ où F_i est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à m_i. Donc $\mathcal{S}_P$ est l'ensemble des fonctions $t \mapsto e^{r_1 t}F_1(t) + ... + e^{r_k t}F_k(t)$, où, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, F_i est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à m_i.

2)a)

Rappels :
(i) Pour tout i, N_i est stable par f.
(ii) On a $\mathbb{C}^n = N_1 \oplus ... \oplus N_s$
Ch'tite démonstration :
(i) Soit $x \in N_i$, montrons que $f(x) \in N_i$.

$$(f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}(f(x)) = f \circ (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}(x) = 0$$

(ii) Il s'agit du lemme des noyaux et comme $\chi_f(f) = 0$, on a donc $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\chi_f(f)(x) = 0$ et ainsi $\mathrm{Ker}\chi_f(f) = \mathbb{C}^n$.

□

Pour tout i, on peut donc poser $f_i = f_{|N_i}$ qui est un endomorphisme de N_i, et on peut poser $n_i := f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{|N_i}$ qui est un endomorphisme nilpotent (puis que $n_i^{\alpha_i} = (f_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{|N_i})^{\alpha_i} = (f - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}_{|N_i} = 0$.

Soit y une solution de l'équation différentielle $X' = f(X)$. Pour tout i, posons π_i l projection sur N_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} N_j$ et $y_i = \pi(y)$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} y &= y_1 + ... + y_k \\ y_i' &= f_i(y_i), \qquad \forall i \in \{1, ..., k\} \end{aligned}$$

Il nous suffit donc de montrer que $\forall i \in \{1, ..., k\}$, $y_i \in \mathcal{S}_{N_i, \alpha_i, \lambda_i}$. En posant $z_i = e^{-\lambda_i t} y_i$, on a

$$z_i' = -\lambda_i z_i + e^{-\lambda_i t} y_i' = -\lambda_i z_i + e^{-\lambda_i t} f_i(y_i) = -\lambda_i z_i + f_i(z_i) = n_i(z_i)$$

Puis, comme v_i est de classe C^∞ (grâce à la relation $z_i' = n_i(z_i)$), on en déduit, par récurrence immédiate, que

$$z_i^{(r)} = n_i^r(z_i), \quad \forall r \in \mathbb{N}$$

Comme $n_i^{\alpha_i} = 0$, on a donc $z_i^{(\alpha_i)} = 0$ et ainsi que $z_i = e^{-\lambda_i t} y_i$ est un polynôme complexe de degré strictement inférieur à α_i, et donc que $y_i = e^{-\lambda_i t} z_i \in \mathcal{S}_{N_i, \alpha_i, \lambda_i}$.
On a donc montrer que

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{N_1, \alpha_1, \lambda_1} + ... + \mathcal{S}_{N_k, \alpha_k, \lambda_k}$$

La somme étant directe d'après les Rappels, on a bien le résultat.

b) Etudions le cas d'égalité. Comme nous avons déjà une inclusion, il y aura égalité si et seulement les dimensions sont égales ($i.e.$)

$$\dim \mathcal{S} = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{S}_{N_i, \alpha_i, \lambda_i}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \dim N_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2$$

Ainsi, on a égalité si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2$ et donc si et seulement si $\alpha_i =$ pour tout i ou encore que les valeurs propres de f sont toutes distinctes (ce qui impose $k = n$ également).

Exercice : Lemme de Gronwall
1) Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s \qquad (\dagger)$$

Montrer que $\forall t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$$

2) *Application :* Soit $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement positive et croissante. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + q(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Solution : 1) Posons

$$F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s$$

En multipliant $(\dagger)$ par $\psi(t)$, on obtient

$$\forall t \in [a,b],\ F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t)$$

Inégalité que l'on peut encore écrire

$$\forall t \in [a,b],\ G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right) \quad \text{avec} \quad G(t) = F(t)\exp\left(-\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$$

En remarquant que $G(a) = F(a) = 0$, on a, en intégrant la dernière inégalité

$$\forall t \in [a,b],\ G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(-\int_a^s \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \qquad (\dagger\dagger)$$

Or, d'après $(\dagger)$

$$\begin{aligned}\forall t \in [a,b],\ y(t) &\leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s \\ &= \varphi(t) + G(t)\exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right) \\ &\underset{(\dagger\dagger)}{\leq} \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

2) Grâce à cette application, on remarque l'importance du lemme de Gronwall. En effet, on n'a pas besoin d'une énorme théorie ou étude l'équation différentielle pour obtenir des informations sur les solutions. Pour appliquer le lemme de Gronwall, nous devons donc faire apparaître une inégalité du type $(\dagger)$.

Soit y une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$. On a donc

$$y'' + q(t)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y'y'' + 2q(t)yy' = 0$$

Puis en intégrant cette dernière égalité entre 0 et t, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\int_0^t q(s)y(s)y'(s)\mathrm{d}s = 0$$

(en fait, on a $y'(t)^2 - y'(0)^2 + 2\int_0^t q(s)y(s)y'(s)\mathrm{d}s = k,$ avec k constante. En faisant $t = 0,$ on a $k = 0$)

$$\Leftrightarrow y'(t)^2 - y'(0)^2 + [q(s)y^2(s)]_0^t - \int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(t)^2 - y'(0)^2 + [q(s)y^2(s)]_0^t - \int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s = 0$$

$$\Leftrightarrow y'(t)^2 + q(t)y^2(t) = K + \int_0^t q'(s)y^2(s)\mathrm{d}s \ \text{ avec } \ K = y'(0)^2 + q(0)y^2(0)$$

Par suite,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ q(t)y^2(t) \leq K + \int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}q(s)y^2(s)\mathrm{d}s$$

Cas particulier et intéressant du lemme de Gronwall : Soient ψ et y deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant

$$\exists c \geq 0,\ \forall t \in [a, b],\ y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s)y(s)\mathrm{d}s \qquad (\dagger)$$

Alors $\forall t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$$

Démonstration :
Il s'agit évidemment du cas particulier où φ est la fonction constante égale à c. On a donc, $\forall t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s = c - c\left[\exp\left(\int_s^t \psi(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s\right]_{s=a}^{s=t} = c\exp\left(\int_a^t \psi(s)\mathrm{d}s\right)$$

□

On applique donc le cas particulier du lemme de Gronwall à la fonction qy^2, et on en déduit donc que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ q(t)y^2(t) \leq K\exp\left(\int_0^t \frac{q'(s)}{q(s)}\mathrm{d}s\right) = K\frac{q(t)}{q(0)}$$

Par suite, $y^2(t) \leq K/q(0)\ \forall t \in \mathbb{R}_+$. D'où le résultat.

Exercice : Méthode d'Euler-Cauchy
Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $L > 0$ telle que

$$\forall t \in I, \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ ||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||$$

Soit $y : I \to \mathbb{R}^m$ une solution de l'équation différentielle

$$y' = f(t, y)$$

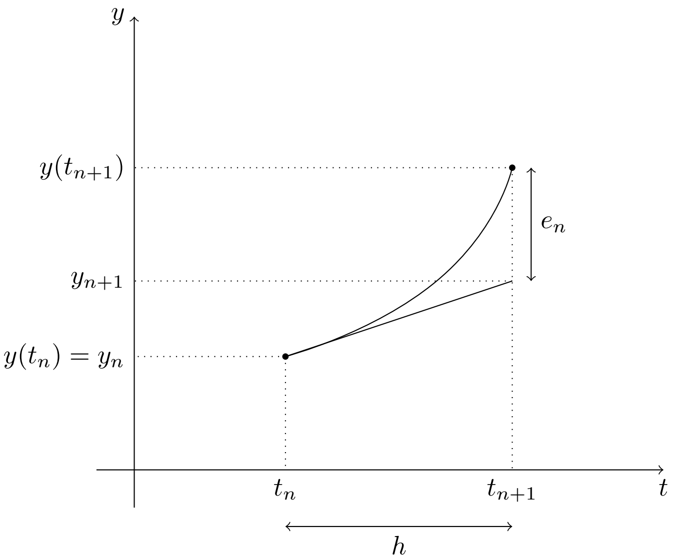
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, $t_n = nh$. On définit $y_0, y_1, ..., y_N$ par récurrence par

$$y_0 = y(0) \ \ \textit{et} \ \ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

Montrer que, $\forall n \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$||e_n|| := ||y(t_n) - y_n|| \leq \frac{Mh}{2L}e^{Lt_n} \qquad \text{avec } \ M = \sup_{t\in I}||y''(t)||$$

Solution : Voici une illustration de ce que nous en sommes en train de faire.



Posons $\epsilon_n := y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)$. On a donc

$$\begin{aligned}
||\epsilon_n|| &= ||y(t_{n+1}) - y(t_n) - hy'(t_n)|| \\
&= \left|\left|\int_{t_n}^{t_{n+1}} (y'(t) - y'(t_n))\mathrm{d}t\right|\right| \\
&\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} ||y'(t) - y'(t_n)||\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} M(t - t_n)\mathrm{d}t = \frac{Mh^2}{2}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
||e_{n+1} - e_n|| &= ||y(t_{n+1}) - y(t_n) - (y_{n+1} - y_n)|| \\
&= ||\epsilon_n + hy'(t_n) - hf(t_n, y_n)|| \\
&= ||\epsilon_n + h(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n))|| \\
&\leq ||\epsilon_n|| + h||(f(t_n, y(t_n)) - f(t_n, y_n))|| \\
&\leq ||\epsilon_n|| + hL||y(t_n) - y_n|| \\
&= ||\epsilon_n|| + hL||e_n||
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + hL)||e_n|| + ||\epsilon_n||$$

Or, comme

$$1 + hL \leq e^{hL} \quad \text{et} \quad ||\epsilon_n|| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

on obtient ainsi

$$||e_{n+1}|| \leq e^{hL}||e_n|| + \frac{Mh^2}{2}$$

Puis par récurrence immédiate sur n, on a

$$||e_n|| \leq e^{nhL}||e_0|| + (1 + e^{hL} + ... + e^{(n-1)hL})\frac{Mh^2}{2}$$

Mais puisque $e_0 = 0$, on a

$$||e_n|| \leq (1 + e^{hL} + ... + e^{(n-1)hL})\frac{Mh^2}{2} = \frac{e^{nhL} - 1}{e^{hL} - 1}\frac{Mh^2}{2} \leq \frac{e^{nhL}}{hL}\frac{Mh^2}{2} = e^{t_n L}\frac{Mh}{2L}$$