Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Mais également du côté de l'analyse complexe, on a le *théorème d'holomorphie sous le signe intégral.* Un très bon exemple qui utilise ces théorèmes est la fonction Gamma d'Euler. Dans le cas complexe, on obtient, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que Re$z > 0$, que la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$

Toujours, du côté de l'analyse complexe, on a comme résultat le *théorème des résidus* qui nous permet de calculer l'intégral d'une fonction seulement à partir des résidus de la fonction. On donne l'exemple de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} \mathrm{d}\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

qui, sans la méthode des résidus, est un calvaire à calculer ...

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[CAND] Calcul intégral, Bernard Candelpergher
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$
Principe des zéros isolés

0 Rappels sur les séries entières et les fonctions analytiques

Définition 1 *On appelle* <u>*série entière*</u> *de variable complexe, toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. **[GOUan] p.236**

Proposition 2 <u>*Lemme d'Abel*</u>
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
(ii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. **[GOUan] p.236**

Définition 3 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le <u>*rayon de convergence*</u> *de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.*
Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé <u>*disque de convergence*</u> *de la série entière.*
Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appelée <u>*fonction entière*</u>*.* **[GOUan] p.237**

Proposition 4 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors*
(i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,

(ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
(iii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. **[GOUan] p.237**

Théorème 5 *L'application*

$$\begin{aligned} f :]-R, R[&\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \end{aligned}$$

est de classe C^1. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

[GOUan] p.238

Corollaire 6 *La somme f de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R, R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

[GOUan] p.238

Définition 7 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta : \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ tel que*

$$\forall z \in \Delta,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le seconde membre est un série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ. **[GOUan] p.256**

Exemple 8 *Soit $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a*

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z-z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

[GOUan] p.240

1 Fonctions holomorphes [ML3an] p.416 → 435

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 9 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 lorsque le taux de variation*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

possède une limite lorsque $z \to z_0$. On note $f'(z_0)$ cette limite.
Lorsque f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de $\mathcal{U}$, elle est dite holomorphe dans $\mathcal{U}$.
On note $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.
Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est dite entière.

Exemple 10 *Une fonction polynomiale est entière.*
Une série entière est holomorphe sur son domaine de convergence.

Remarque 11 *Lorsque f est holomorphe sur $\mathcal{U}$, il est possible de définir son application dérivée :*

$$\begin{aligned} f' : \mathcal{U} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f'(z) \end{aligned}$$

Proposition 12 *Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 et si $g : \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ est holomorphe en $f(z_0) \in \mathcal{V}$, alors $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et on a*

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) g'(f(z_0))$$

Définition 13 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction dont les dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent en $z_0 = (x_0 + iy_0)$. On définit alors les opérateurs dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \end{aligned}$$

La différentielle de f s'écrit alors

$$Df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\mathrm{d}\overline{z}$$

où l'on a posé $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$

Proposition 14 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$ et $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe au point z_0 si et seulement si elle est $\mathbb{R}$-différentiable en z_0 et si ses dérivées partielles en z_0 vérifient la condition de Cauchy*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

En notant $f = P + iQ$, cette condition est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(z_0)$$

La dérivée complexe de f en z_0 est alors donnée par

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Définition 15 *Soit une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$. On dit que f admet une primitive sur $\mathcal{U}$ s'il existe une fonction holomorphe $F : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ vérifiant $F' = f$ sur $\mathcal{U}$.*

1.2 Intégration le long des chemins de $\mathbb{C}$

Définition 16 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Un chemin dans $\mathcal{U}$ est une application continue γ d'un intervalle compact $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{U}$.*
Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement appellés origine et extrémité du chemin γ.
Un chemin fermé ou lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Exemple 17 *(i) Le segment :*
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto (1-t)a + tb \end{aligned}$$

est le segment reliant les points a et b. Cette paramétrisation γ du segment s'appelle paramétrisation orientée de a vers b du segment $[a, b]$.
(ii) Le cercle :
Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. L'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0,2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto a + re^{it} \end{aligned}$$

est le cercle de centre a et de rayon r. Cette paramétrisation γ du segment s'appelle paramétrisation orientée du cercle de centre a et de rayon r que l'on note $C_{a,r}$.
(iii) Le bord d'un triangle :
Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Notons $\Delta(a, b, c)$ le triangle plein de sommets a,b,c et $\partial\Delta$ sa frontière.
$\partial\Delta$ est l'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0,3] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} (1-t)a + tb & si\ 0 \le t \le 1 \\ (2-t)b + (t-1)c & si\ 1 \le t \le 2 \\ (3-t)c + (t-2)a & si\ 2 \le t \le 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette paramétrisation s'appelle paramétrisation du bord orienté du triangle (a,b,c).

Définition 18 *Soient $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'image $\gamma(I)$. L'intégrale de f le long de γ est définie par*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Exemple 19 *Soient $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur le cercle de centre a et de rayon r. Alors*

$$\int_{C_{a,r}} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})ire^{it}\mathrm{d}t$$

Proposition 20 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\mathcal{U}$. Si f admet une primitive F sur $\mathcal{U}$, alors pour tout chemin d'image contenue dans $\mathcal{U}$, on a*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En d'autres termes, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi.
En particulier, pour tout chemin fermé γ dans $\mathcal{U}$, on a

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Exemple 21 *La fonction*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ car pour tout $r > 0$, on a

$$\int_{C_{0,r}} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}ire^{it}\mathrm{d}t = 2i\pi \neq 0$$

Théorème 22 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\mathcal{U}$.*
Alors f admet une primitive sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout chemin fermé γ dans $\mathcal{U}$, on a

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Théorème 23 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ admet une primitive sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout triangle Δ (convexe fermé) inclus dans $\mathcal{U}$, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

1.3 Théorème de Cauchy

Théorème 24 *Théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle*
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$, S une partie finie de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe sur $\mathcal{U} \backslash S$. Soit enfin un triangle $\Delta \subset \mathcal{U}$. Alors

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Théorème 25 *Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe*
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert $\mathbb{C}$, S une partie finie de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe sur $\mathcal{U} \backslash S$. Alors f possède une primitive sur $\mathcal{U}$. En conséquence, pour tout chemin fermé γ dans $\mathcal{U}$, on a

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

Corollaire 26 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert quelconque $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$. Alors pour tout point $z_0 \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage ouvert D de z_0 sur lequel f admet une primitive.*

Théorème 27 *local QUEF p96*

Théorème 28 *Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est holomorphe sur Ω.
(ii) f est analytique dans Ω. **[HMQUE] p.83**

2 Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

2.1 Théorème de prolongement des identités [HMQUE] p.102 → 104

Théorème 29 ♠ *Principe des zéros isolés* ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) *Si $a \in Z(f)$, $\exists\, k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \qquad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) *$Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω.*

Application 30 *Théorème de prolongement des identités* *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω. Alors, $f = g$.*
En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.

Application 31 *(du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière*

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2}\mathrm{d}t$$

on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}e^{-\xi/2}$$

Application 32 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.*

2.2 Les inégalités de Cauchy et leurs applications [ML3an] p.440-441

Théorème 33 *Inégalités de Cauchy*
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$, $z_0 \in \mathcal{U}$ et $R > 0$ tel que le disque $D(z_0, R) \subset \mathcal{U}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout r tel que $0 < r < R$

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$

Corollaire 34 *Théorème de Liouville*
Si f est une fonction entière et bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Corollaire 35 *Théorème de D'Alembert-Gauss*
Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

Théorème 36 *Théorème de d'holomorphie sous le signe intégral*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et D un ouvert de $\mathbb{C}$. On considère une fonction $f : D \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall z \in D$, l'application $y \mapsto f(z, y)$ est mesurable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est holomorphe dans D.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z, y)| \leq g(y)$ $\forall z \in D$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application

$$\begin{aligned} F : D &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_X f(z, y)\mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

est définie et holomorphe dans D, et on a

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, y)\mathrm{d}\mu(y)$$

[MLan] p.279

Exemple 37 *Fonction Gamma - cas complexe*
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 0$, la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ **[ML3an] p.279**

2.3 Propriétés de la moyenne et principe du maximum [ML3an] p.442-443

Proposition 38 *Propriété de la moyenne*
Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$. Pour tout disque fermé $\overline{D}(a,r) \subset \mathcal{U}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Théorème 39 *Principe du maximal local*
Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local en a, alors f est constante sur un voisinage de a.

Corollaire 40 *Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ connexe et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum en a, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Théorème 41 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\overline{\mathcal{U}}$ et holomorphe sur $\mathcal{U}$. On pose $M = |f(z)|_{\partial \mathcal{U}}$. Alors*

$$\forall z \in \mathcal{U}, \quad |f(z)| \leq M$$

De plus, s'il existe un point de $\mathcal{U}$ en lequel le maximum est atteint, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

3 Sigularités des fontions holomorphes

3.1 Classification des singularités isolés [ML3an] p.461 → 464

Définition 42 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in \mathcal{U}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \backslash \{a\})$.*
(i) On dit que a est une singularité effaçable pour f s'il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ telle que :

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathcal{U} \backslash \{a\}$$

(ii) On dit que a est une pôle d'ordre m pour f s'il existe des scalaires $c_{-1}, ..., c_{-m}$ avec $c_{-m} \neq 0$ tels que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{+m} c_{-k} (z-a)^{-k}$$

ait une singularité effaçable en a.
(iii) Si la singularité n'est ni artificielle, ni un pôle, on dit qu'elle est essentielle. **[HMQUE] p.155-156**

Exemple 43 *(i) La fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité effaçable en 0 : il suffit de poser $f(0) = 1$ et d'écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$*
(ii) La fonction $f(z) = \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 en 0.
(iii) La fonction $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité essentielle en 0. **[HMQUE] p.155-156**

Proposition 44 *Lemme de Riemann*
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \backslash \{a\})$, où $a \in \mathcal{U}$. Si f est bornée dans un voisinage épointé $V \backslash \{a\}$ de a, alors a est une singularité effaçable pour f.

3.2 Théorème des résidus [CAND] p.113 → 121

Théorème 45 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide et $a \in \mathcal{U}$. Soit f une fonction analytique/holomorphe sur $\mathcal{U} \backslash \{a\}$. Pour tout disque fermé $\overline{D}(a,R)$ $(R > 0)$, inclus dans $\mathcal{U}$, on a pour tout $z \in D(a,R) \backslash \{a\}$*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Ce développement est unique et est appelé développement de Laurent de f en a.
La série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m}$$

s'appelle la partie singulière de f en a.
Les coefficients c_n et c_{-m} sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$c_{-m} = \frac{r^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{im\theta} \mathrm{d}\theta \quad \text{pour } m \geq 1$$

où $0 < r < R$ est quelconque.

Définition 46 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert, $a \in \mathcal{U}$ et f une fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U} \backslash \{a\}$. Le coefficient c_{-1} du développement de Laurent de f en a s'appelle le résidu de f en a, il est noté $\mathrm{Res}(f,a)$.*

Théorème 47 *Théorème des résidus*
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe, $a_1, a_2, ..., a_n$ des points de $\mathcal{U}$ et f une fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U} \backslash \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Soit γ un lacet de $\mathcal{U} \backslash \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ tel que pour tout i le lacet γ entoure une fois le point a_i (c'est-à-dire est homotope dans $\mathcal{U} \backslash \{a_i\}$ à un cercle centré en a_i). Dans ce cas, on a

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{i=1}^n \mathrm{Res}(f, a_i)$$

Application 48

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} \mathrm{d}\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Corollaire 49 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert simplement connexe et f une fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U}$. Soit γ un lacet de $\mathcal{U}$ entourant une fois les zéros de f.*
Alors le nombre de zéros de f, comptés avec leur multiplicité, entourés par γ est

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

4 Suites et séries de fonctions holomorphes [ML3an] p.478 → 500

Définition 50 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction méromorphe dans $\mathcal{U}$ est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{U}\backslash A$ où A est un ensemble fermé et discret de $\mathcal{U}$, telle que chaque point de A soit un pôle de f.*
On note $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$.

Définition 51 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{U}$ vers la fonction $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ si, pour tout $\epsilon>0$ et pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$, il existe $N_{\epsilon,K}$ tel que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n>N_{\epsilon,K},\ \forall z\in K,\quad |f_n(z)-f(z)|<\epsilon$$

Théorème 52 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.*
Si la suite la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors f est holomorphe sur $\mathcal{U}$.
De plus, f' est la limite uniforme sur tout compact de la suite de fonctions dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Corollaire 53 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.*
Si la suite la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors pour tout entier k, la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

Définition 54 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une suite exhaustive de compacts d'un espace topologique $\mathcal{U}$ est une suite de compacts $(K_n)_{n\geq 0}$ telle que $K_n\subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ et $\Omega=\bigcup_{n\geq 0}K_n$.*

Exemple 55 (i) *$K_n=BF(0,n)$ est une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{C}$*
(ii) *Si $\mathcal{U}$ est borné,*

$$K_n=\{z\in\ \mid \mathrm{d}(z,\mathcal{U}^c)\geq 1/n\}$$

est une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$.
(ii) *Si $\mathcal{U}$ est non borné,*

$$K_n=\{z\in\ \mid \mathrm{d}(z,\mathcal{U}^c)\geq 1/n\}\bigcap BF(0,n)$$

est une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$.

Définition 56 *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$, l'application*

$$\begin{aligned}||.||_K : C(\mathcal{U}) &\to \mathbb{R}_+\\ f &\mapsto ||f||_K := \sup_{z\in K}|f(z)|\end{aligned}$$

est une semi-norme sur $C(\mathcal{U})$.

Proposition 57 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $(K_p)_{p\geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{U}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{U}$.*
Les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de vers f.*
(ii) *Pour tout compact K, $||f_n-f||_K \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.*
(iii) *Pour tout p fixé, $||f_n-f||_{K_p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*

Définition 58 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{U}$. On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{U}$ vers une fonction f si, pour tout $\epsilon>0$ et pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$*

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n>N,\ \forall z\in K,\quad \left|\sum_{k=0}^{\infty}f_k(z)-f(z)\right|<\epsilon$$

Proposition 59 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.*
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f, alors sa somme f est holomorphe sur $\mathcal{U}$.
De plus, f' s'obtient par dérivation terme à terme

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}f_n\right)'=\sum_{k=0}^{\infty}f_n'$$

Définition 60 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{U}$. On dit que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathcal{U}$ si pour tout compact $K\subset\mathcal{U}$, la série numérique $\sum ||f_n||_K$ est convergente.*

Proposition 61 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur $\mathcal{U}$.*
Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact vers une fonction f, alors elle converge uniformément sur tout compact.
Sa limite f est en particulier holomorphe sur $\mathcal{U}$.
De plus, la série $\sum f_n'$ converge elle aussi normalement sur tout compact.

Définition 62 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$. On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{U}$ si, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$:*
(i) il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Proposition 63 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathcal{U}$ telle que :*
(i) pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K,
(ii) la série $\sum_{n\geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
Alors la somme de la série $\sum f_n$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Théorème 64 ♠ *Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$* ♠
La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. **[OBJ] p.82-83**

Illustrations

Questions

Exercice : Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :
(i) f est holomorphe sur Ω.
(ii) f est analytique dans Ω.

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :