Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

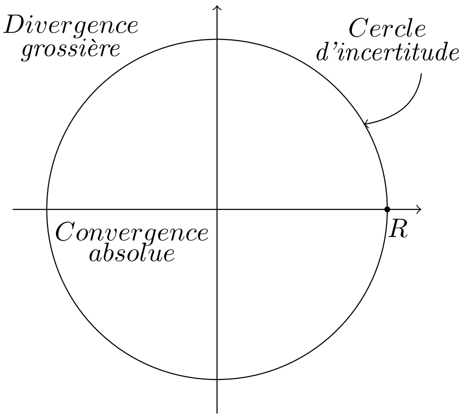
Mohamed NASSIRI

Parmi les séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, avec, pour tout n, f_n est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on peut s'intéresser au cas particulier où, pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée à valeurs dans $\mathbb{C}$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{aligned} f_n : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n \end{aligned}$$

Un premier résultat, le lemme d'Abel, nous permet d'introduire la notion de *rayon* et *disque de convergence*. On peut résumer la situation par le schéma ci-dessous.

Pourquoi parle-t-on de *cercle d'incertitude* ? En particulier, pour les trois raisons suivantes...
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sur le cercle $C(0,R)$, la série peut être :
- Divergente en tout point : $R=1$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement en tout point de $C(0,1)$.
- Divergente en certains points : $R=1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ diverge pour $z=1$ et converge en tout point de $C(0,1)\backslash\{1\}$ (série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta\neq 2\pi\mathbb{Z}$)
- Convergente en tout point : $R=1$, $\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ converge absolument en tout point de $C(0,1)$



Malgré ce léger inconvénient, les séries entières ont de très bonnes propriétés. On pourra notamment les sommer, les "multiplier", les dériver, etc. Ici, on parle de multiplication au sens de *produit de Cauchy* :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \overset{??}{\boxed{\times}} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$$

Produit de Cauchy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{avec } \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Produit de Hadamard

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n \quad \text{avec } \forall n\in\mathbb{N},\ c_n=a_n b_n$$

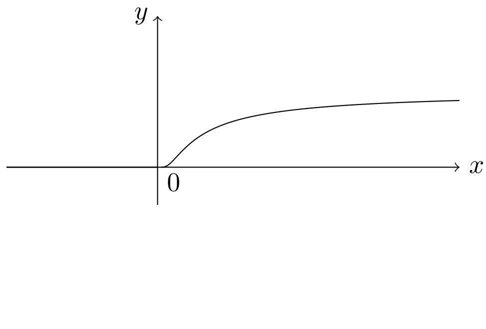
Les formules de Cauchy et l'égalité de Parseval nous permettent de caractériser les fonctions constantes et polynômes à partir de la "bornitude" de la somme de la série entière.

Les bonnes propriétés précédemment évoquées vont également nous permettre de parler de *fonctions développables en série entière.* Sous certaines conditions, il arrive que cette fonction coïncide avec sa série dite de Taylor $\sum_{k\geq 0}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$.

Être seulement de classe C^∞ ne suffit pas comme le montre la fonction

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x\leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(pour tout n, on a $f^{(n)}(0)=0$)



Les applications à l'analyse complexe sont intéressantes. Le fait que les fonctions holomorphes sont analytiques nous donne le très important *principe des zéros isolés*, duquel découle le *principe du prolongement analytique*. Concernant les applications à la combinatoire, on retiendra le résultat original suivant : le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ est

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Les équations différentielles permettent également de trouver des développements en série entière mais l'inverse est aussi possible : on peut résoudre certaines équations différentielles à l'aide des séries entières. Par exemple, il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (E)$$

développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Principe des zéros isolés
Résolution de l'équation de Bessel

1 Séries entières, rayon et disque de convergence.

1.1 Définitions et premières propriétés [GOUan] p.236-237

Définition 1 *On appelle* <u>*série entière*</u> *de variable complexe, toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 2 <u>*Lemme d'Abel*</u>
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
(ii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Définition 3 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le <u>*rayon de convergence*</u> *de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.*
Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé <u>*disque de convergence*</u> *de la série entière.*
Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appelée <u>*fonction entière*</u>*.*

Proposition 4 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors*
(i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
(ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
(iii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Proposition 5 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.*
(i) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $R \geq 1$.
(ii) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R \leq 1$. **[DTZ] p.316**

Exemple 6 *Pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par a_n est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers positifs inférieurs ou égaux à n, le rayon de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est égal à 1.* **[DTZ] p.316-317**

1.2 Règles de calcul du rayon de convergence [DTZ] p.317 → 319

Proposition 7 *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha > 0$. Alors les séries*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha a_n z^n, \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^\alpha} z^n$$

ont le même rayon de convergence.

Proposition 8 *Règle de D'Alembert*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de variable réelle ou complexe. Si

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0,+\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(Convention : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Exemple 9 • *La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.*
• *Pour tout $\alpha > 0$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.*
• *La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n! z^n$ a un rayon de convergence nul.* **[GOUan] p.237**

Proposition 10 *Règle de Cauchy*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Si

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \in [0,+\infty]$$

alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(Convention : $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Remarque 11 *On ne peut pas toujours appliquer les règles de D'Alembert et de Cauchy. Exemple : $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n}$.* **[GOUan] p.237**

1.3 Somme et produit de Cauchy de séries entières [GOUan] p.324-325

Définition 12 *On appelle série entière somme de deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) z^n$.*

Proposition 13 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b. On note f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence D_a et D_b.*
Le rayon de convergence R_{a+b} de la série entière somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) z^n$ vérifie :
(i) $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$,
(ii) $R_{a+b} = \min\{R_a, R_b\}$ si $R_a \neq R_b$.
De plus, sur $D_a \cap D_b$, $f+g$ est la somme de la série entière somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) z^n$.

Définition 14 *On appelle produit de Cauchy de deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ avec*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Proposition 15 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b. On note f et g les sommes de ces séries entières sur leur disque de convergence D_a et D_b.*
Le rayon de convergence R_c du produit de Cauchy $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ vérifie :
$R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$,
De plus, sur $D_a \cap D_b$, fg est la somme de la série entière somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ (i.e.)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

2 Propriétés des séries entières

2.1 Continuité et dérivation [GOUan] p.238-239

Théorème 16 *L'application $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z\in\mathbb{C} \mid |z| < R\}$.*

Proposition 17 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$$

est convergente. Alors la série entière de variable t, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ et la somme est continue sur ce segment. **[DTZ] p.321-322**

Théorème 18 *L'application*

$$f :]-R,R[\to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$$

est de classe C^1. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in]-R,R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Corollaire 19 *La somme f de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$. De plus, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R,R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,*

$$\forall p\in\mathbb{N},\ a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

Corollaire 20 *Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $]-R, R[$.*

2.2 Principe des zéros isolés [GOUan] p.239

Théorème 21 *Principe des zéros isolés*
Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ sur son disque de convergence. S'il existe une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p, alors $a_n = 0$ pour tout n.

Corollaire 22 *Si les sommes f et g de deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ vérifient $f(z_p) = g(z_p)$ pour une suite $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes non nuls tendant vers 0, alors $a_n = b_n$ pour tout n. En particulier, deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales.*

2.3 Formule de Cauchy et égalité de Parseval [GOUan] p.239-240

Théorème 23 *Formule de Cauchy*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors

$$\forall r \in]0, R[,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} \mathrm{d}\theta$$

Application 24 *Théorème de Liouville*
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et f la somme de cette série entière.
(i) Si la fonction entière f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.
(ii) Plus généralement, s'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme.

Théorème 25 *Egalité de Parseval*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors $\forall r \in]0, R[$, la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$$

Application 26 *Soit f la somme de cette série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la fonction entière f est bornée sur le disque unité, alors f est un polynôme.*

3 Développement en série entière

3.1 Fonctions développables en série entière [GOUan] p.240-241

Définition 27 *Une fonction (de la variable réelle ou complexe) à valeurs complexes définie dans un voisinage de 0 est dite développable en série entière sur un voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.*

Proposition 28 *Développement en série entière des fractions rationnelles*
Soit $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z-z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

Proposition 29 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$. La série entière

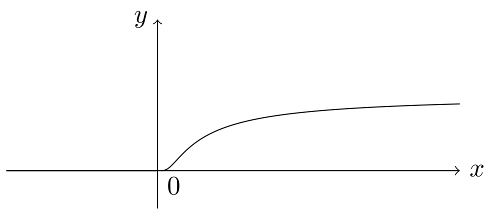
$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Exemple 30 *La fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor (pour tout n, on a $f^{(n)}(0) = 0$).



Proposition 31 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0, une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et R_n l'application définie comme précédemment. Alors*

$$\forall x \in I, \ |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

où pour tout n et pour tout $x \in I$, $M_{n+1}(x)$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ si x est négatif. **[DTZ] p.327**

Proposition 32 *Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, et s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \min(\alpha, \rho)$. **[ELAM] p.250**

3.2 Développement en série entière de fonctions usuelles [DTZ] p.327 → 331

Proposition 33 *Développements en série entière classiques :*

• $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

• *Pour $\alpha = 1$ et en primitivant, $\forall x \in]-1, 1[$,*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

3.3 Fonctions classiques définies comme sommes de séries entières [GOUan] p.243

Proposition-Définition 34 *La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On définit l'exponentielle complexe par*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ e^z = \exp(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$$

Définition 35 *On définit les applications cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique définies sur $\mathbb{C}$, notées respectivement ch (ou cosh) et sh (ou sinh), par :*

$$\mathrm{ch} z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition 36 *On définit les applications cosinus et sinus définies sur $\mathbb{C}$, notées respectivement cos et sin, par :*

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4 Applications

4.1 Analyse complexe : holomorphie et analycité [HMQUE] p.102 → 104

Définition 37 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta : \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ tel que*

$$\forall z \in \Delta, \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le seconde membre est un série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ. **[GOUan] p.256**

Théorème 38 *Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est holomorphe sur Ω.
(ii) f est analytique dans Ω. **[HMQUE] p.83**

Théorème 39 ♠ *Principe des zéros isolés* ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) *Si $a \in Z(f)$, $\exists \ k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) = (z-a)^k g(z) \qquad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) *$Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω.*

Application 40 *Théorème de prolongement des identités Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui posède un point d'accumulation dans Ω. Alors, $f = g$.*
En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.

Application 41 *(du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière*

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t$$

on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} e^{-\xi/2}$$

Application 42 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.*

4.2 Application à la combinatoire [DTZ] p.336 → 341

Application 43 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement du groupe $\mathfrak{S}_n$ tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant*

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \sigma(k) \neq k$$

En notant d_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (convention $d_0 = 1$), on a

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

4.3 Equations différentielles et séries entières

Application 44 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Alors f est l'unique solution sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où $\alpha \in]0, +\infty[$ du système différentiel

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p! x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

[DTZ] p.334 → 336

Application 45 ♠ *Résolution de l'équation de Bessel* ♠
Il existe une unique solution à l'équation de Bessel

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (E)$$

développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

On déduit également

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta)) \mathrm{d}\theta$$

[FGNan4] p.101

Questions

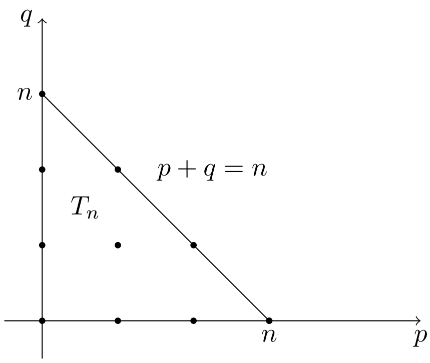
Exercice : Produit de Cauchy vs Produit de Hadamard
1) Montrer le résultat (plus général) suivant : Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à valeurs dans une algèbre de Banach, absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy des deux séries, noté $\sum_{n\geq 0} w_n$, est une série absolument convergente et on a

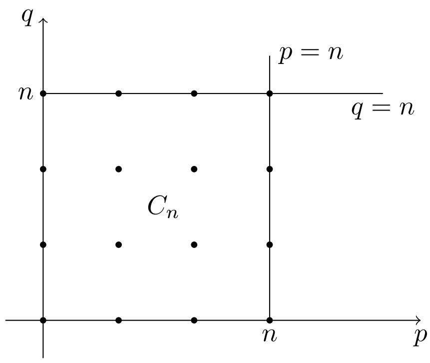
$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} v_n\right)$$

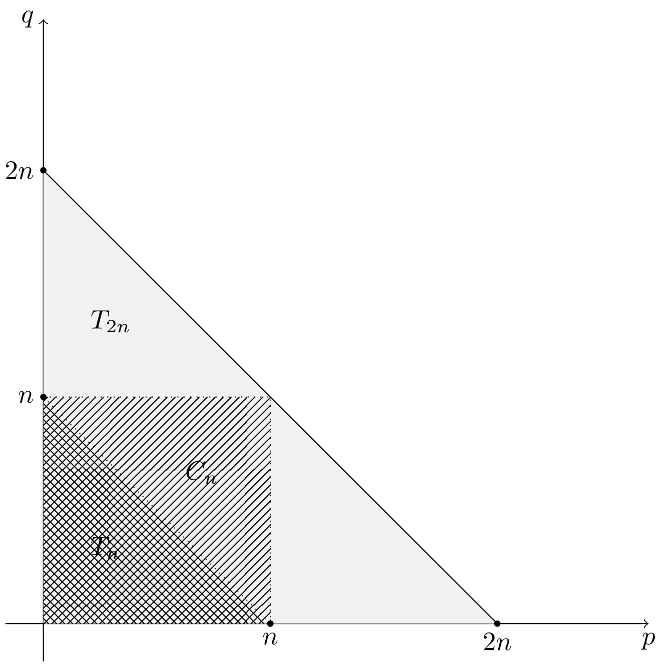
2) Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement égal à R_a et R_b. Que peut-on dire du rayon de convergence R_H de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n z^n$ (appelée *produit de Hadamard* de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$) ?

Solution : 1) On va introduire deux ensembles qui vont nous être utiles.

$$T_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq n\} \quad \text{et} \quad C_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq n,\ q \leq n\}$$







Ainsi, pour tout entier naturel n, on a

$$T_n \subset C_n \subset T_{2n} \qquad (\dagger)$$

Notons les différentes sommes partielles suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

On a, d'une part

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S''_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q$$

et, d'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n S'_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right).\left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q$$

Bon maintenant les présentations faites, démontrons le résultat.

Cas particulier : Supposons que les séries sont à termes réels positifs

Grâce à $(\dagger)$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in T_{2n}} u_p v_q$$

$(i.e.)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S''_n \leq S_n S'n \leq S''_{2n} \quad (\dagger\dagger)$$

Par hypothèse, la suite $(S_n S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right).\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)$ et la suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente. Donc la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente.
Ainsi, en passant à la limite dans la relation $(\dagger\dagger)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

D'où le résultat.

Cas général : Supposons que les séries sont à valeurs dans une algèbre de Banach

D'après la première partie, on peut dire que la série terme général $\sum_{k=0}^{p} ||u_k||.||v_{p-k}||$ est convergente et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} ||u_k||.||v_{p-k}|| = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} ||u_p||\right).\left(\sum_{q=0}^{+\infty} ||v_q||\right)$$

$(i.e.)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} ||u_k||.||v_{p-k}|| = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{p=0}^{n} ||u_p||\right).\left(\sum_{q=0}^{n} ||v_q||\right)\right)$$

$(i.e.)$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in T_n} ||u_p||.||v_q|| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in C_n} ||u_p||.||v_q||$$

Comme $T_n \subset C_n$, ceci implique donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} ||u_p||.||v_q|| = 0$$

 CC BY NC SA

On va encore raisonner sur les sommes partielles. Par hypothèse, la suite $(S_nS'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus,

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},\quad ||S_nS'_n - S''_n|| &= \left|\left|\sum_{(p,q)\in C_n} u_pv_q - \sum_{(p,q)\in T_n} u_pv_q\right|\right|\\ &= \left|\left|\sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} u_pv_q\right|\right|\\ &\leq \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} ||u_pv_q||\\ &\leq \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} ||u_p||.||v_q||\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty}(S_nS'_n - S''_n) = 0$$

Ainsi, la suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est la même que celle de la suite $(S_nS'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'où le résultat.

2) Pour tout $(r,r')\in[0,R_a[\times[0,R_b[$, les suites $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_nr'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, donc $(a_nb_n(rr')^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, pour tout $r_H\in[0,R_aR_b[$, la suite $(a_nb_n(r_H)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ce qui implique $R_H\geq R_aR_b$.
Malheureusement, on ne peut rien dire de plus en général comme le montre l'exemple des séries entières $\sum z^{2n}$ et $\sum z^{2n+1}$ de rayon de convergence et leur produit de Hadamard est nul donc son rayon de convergence est infini.

Exercice : Transformation d'Abel
1) Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nz^n$ une série entière et $z_0\in\mathbb{C}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nz_0^n$ est convergente. Montrer que la série entière de variable t, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nz_0^nt^n$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ et la somme est continue sur ce segment.
2) Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0\in[0,\pi/2[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1 \text{ et } \exists\rho>0,\ \exists\theta\in[-\theta_0,\theta_0],\ z=1-\rho e^{i\theta}\}$$

Montrer que

$$\lim_{\substack{z\to1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Solution : 1) Notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_kz_0^k$. Pour tout réel $t\in[0,1[$, et tout couple $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ vérifiant $1\leq p<q$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} a_kz_0^kt^k &= \sum_{k=p}^{q}(R_{k-1}-R_k)t^k\\ &= \sum_{k=p}^{q} R_{k-1}t^k - \sum_{k=p}^{q} R_kt^k\\ &= \sum_{k=p-1}^{q-1} R_kt^{k+1} - \sum_{k=p}^{q} R_kt^k\\ &= t^pR_{p-1} - t^qR_q + \sum_{k=p-1}^{q-1}(t^{k+1}-t^k)R_k\end{aligned}$$

 CC BY NC SA

Comme la série $\sum_{k\geq 0} a_k z_0^k$ est convergente, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_0^k$ de cette série tend vers 0. Ainsi, soit $\epsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

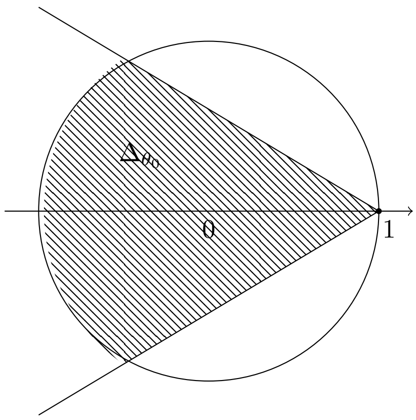
$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \epsilon$$

Par suite, pour tout entiers $n_0 < p < q$, on a

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0,1], \quad \left|\sum_{k=p}^{q} a_k z_0^k t^k\right| &\leq |t^p R_{p-1}| + |t^q R_q| + \left|\sum_{k=p-1}^{q-1} (t^{k+1} - t^k) R_k\right| \\
&\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon \left|\sum_{k=p-1}^{q-1} (t^k - t^{k+1})\right| \\
&\leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

La série est uniformément de Cauchy sur le segment $[0,1]$ donc uniformément convergente sur le même segment. La somme de cette série est continue en tant que somme d'une série uniformément convergente.

2) Avant de commencer, illustrons l'ensemble Δ_{θ_0}. Dans le schéma ci-après, l'écartement angulaire est $2\theta_0$.



Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'idée est de majorer $|f(z) - S|$ par une quantité qui tend vers 0.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| < 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) - S_N &= \sum_{n=0}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \qquad (\dagger)$$

Fixons maintenant $\epsilon > 0$, puis $N \in \mathbb{N}$ tel que $|R_n| < \epsilon$ pour tout $n > N$. Dans $(\dagger)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$|z| < 1$

$$\begin{aligned}|f(z) - S| &= |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \epsilon |z-1| \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \\ &= |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \qquad (\dagger\dagger)\end{aligned}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$, tel que $z = 1 - \rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $|\varphi| \leq \theta_0$. On a $|z|^2 = 1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2$, et lorsque $\rho \leq \cos\theta_0$, on a la majoration

$$\begin{aligned}\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) &= \frac{\rho}{2\rho\cos\varphi - \rho^2}(1+|z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos\varphi - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} \\ &= \frac{2}{\cos\theta_0}\end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \epsilon$, on voit donc que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos\theta_0\}$, $(\dagger\dagger)$ devient

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{\cos\theta_0} = \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos\theta_0}\right)$$

Exercice : 1) Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini, et f la somme de cette série entière.
a) Montrer que si la fonction entière f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.
b) Plus généralement, montrer que s'il existe un polynôme P à coefficients positifs tel que $|f(z)| \leq P(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors f est un polynôme. (*Théorème de Liouville*)
2) Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $a_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que si f est bornée sur le disque unité, alors f est un polynôme.

Solution : 1)*a*) Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{C}$, grâce à la formule de Cauchy, on a

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad 2\pi r^n |a_n| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})e^{-ni\theta}| \mathrm{d}\theta \leq 2\pi M$$

Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc pour $|a_n| \leq M/r^n$ pour tout $r > 0$. En faisant $r \to +\infty$, on a donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'où le résultat.

b) Soit $m = \deg P$. Si $m = 0$, on est dans le cas de la question précédente.
Sinon, on pose

$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_n z^{n-m}$$

somme d'une série entière de rayon de convergence infini. La fonction g vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\quad g(z) = \frac{f(z) - a_0 - a_1 z - \ldots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m}$$

et comme $m = \deg P$, ceci montre que g est bornée sur $\mathbb{C}$ tout entier. Donc, par la question précédente, on a donc $a_n = 0$ pour tout $n > m$. D'où le résultat.

2) Par l'égalité de Parseval, on a

$$\forall r \in]0,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur le disque unité. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\forall r \in]0,1[, \quad \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leq \frac{M^2}{2\pi}$$

En faisant tendre r vers 1^-, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leq \frac{M^2}{2\pi}$$

La série $\sum |a_n|^2$ est bornée, donc convergente, et ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or les a_n sont des entiers, ceci implique que tous les a_n sont nuls à partir d'un certain rang. D'où le résultat.

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle dérangement du groupe $\mathfrak{S}_n$ tout élément σ de $\mathfrak{S}_n$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad \sigma(k) \neq k$$

En notant d_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ (convention $d_0 = 1$).
1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = n!$$

2) Soit la série entière f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$$

Montrer que le rayon de convergence R de cette série entière est supérieur ou égal à 1.
3) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x f(x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$. En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4) En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Solution : 1) Pour $n = 0$, le résultat est évident. Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on note I_k le nombre de permutations de $\{1, ..., n\}$ ayant exactement k éléments non invariants. Pour construire une telle permutation, il faut choisir k éléments non invariants. Donc C_n^k possibilités. Il faut ensuite construire un dérangement restreint à ces k éléments. Donc d_k possibilités. Ainsi,

$$\forall k \in \{0, ..., n\}, \; I_k = C_n^k d_k$$

Par suite,

$$|\mathfrak{S}_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$ est inférieur au cardinal de $\mathfrak{S}_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$$

Ainsi, la suite $(\frac{d_n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à 1.

3) Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!}x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En notant c_n le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = 1$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \quad e^x f(x) &= \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \right) \\ &= \sum_{n\geq 0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

4) En utilisant à nouveau les propriétés du produit de Cauchy, on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

 CC BY NC SA