Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Il existe plusieurs façon de prolonger une fonction. On peut, par exemple, une valeur constante arbitraire en dehors de son ensemble de définition de base. Mais cette façon ne garantit pas de bonnes propriétés. Par exemple, si la limite en un point existe, on posera la valeur de cette limite pour prolonger la fonction. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin x}{x} \end{aligned} \qquad \xrightarrow{\text{Prolongement de } f} \qquad \begin{aligned} &\widehat{f}_{|\mathbb{R}^*} = f \\ &\widehat{f}(0) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} f(x) = 1 \end{aligned}$$

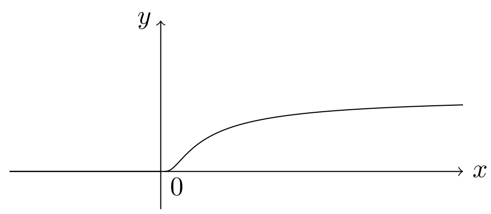
La densité permet de prolonger des applications ! Par exemple, les fonctions uniformément continues définie sur un sous-espace dense H de H se prolonge à tout l'espace E. De plus, le prolongement est encore uniformément continue.

Du côté des formes linéaires, on a le théorème de Hahn-Banach qui permet de prolonger des formes linéaires définies sur un sous-espace (qui n'est pas nécessaiement dense !). Ce théorème a un corollaire intéressant pour la densité : Soit H un sous-espace vectoriel d'un espace normé $(E, ||.||)$. Alors

$$H \textit{ est dense dans } E. \iff \textit{Toute } f \in E^* \textit{ nulle sur } H \textit{ est identiquement nulle.}$$

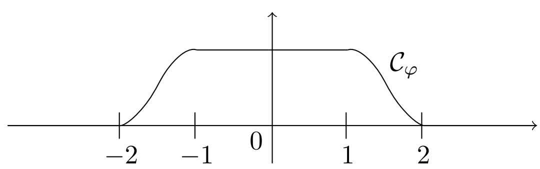
Comme pour la continuité, on va s'autoriser à prolonger les fonctions de façon C^1 et par la suite C^∞ ... Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ e^{-1/x} & si\ x > 0 \end{cases}$$



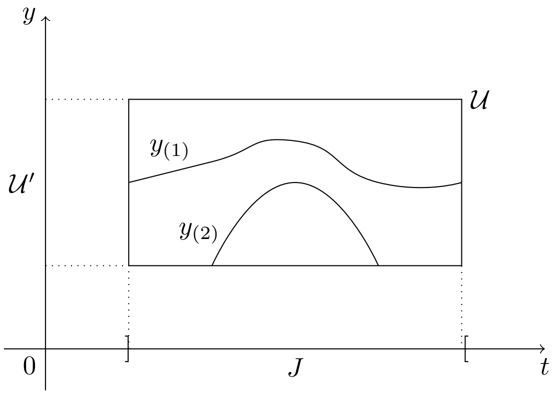
jouera un rôle important dans la construction des fonctions dites *plateau* (et dans *théorème de réalisation de Borel*). Par exemple, on peut montrer qu'il existe une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & si\ |x| \geq 2 \end{cases}$$



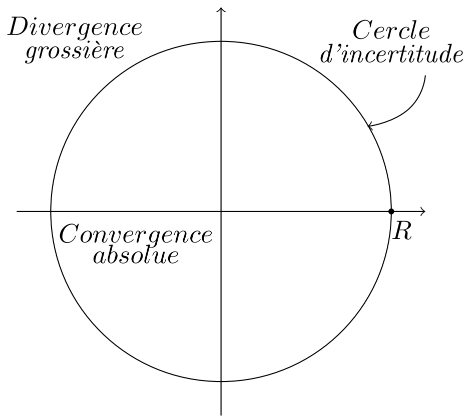
La tentative la plus courante pour approcher une fonction f qui n'est connue qu'en un nombre fini n de points par une fonction plus "facile" consiste à introduire un polynôme qui prend les mêmes valeurs que f aux points considérés. C'est l'*interpolation de Lagrange*. Par la suite, on va également s'intéresser à l'*erreur d'interpolation*, c'est-à-dire à l'erreur que l'on commet quand on interpole une fonction par un polynôme de Lagrange. Attention, on n'a pas nécesairement une "bonne convergence" du polynôme interpolateur de Lagrange vers la fonction que l'on souhaite interpoler. Un cas très académique illustrant cette mauvaise convergence est le *phénomène de Runge*. Une autre interpolation intéressante portant sur la régularité de la fonction à interpoler est l'*interpolation de Hermite*.

Au niveau des équations différentielles, la notion de *prolongement de solutions* est importante ! On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est *maximale* si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$. On peut montrer que toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique). Par ailleurs, si on suppose que l'ouvert $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U} = J \times \mathcal{U}'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on dit qu'une solution est *globale* si elle définie sur l'intervalle J tout entier. Ainsi, toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse : sur le schéma, $y_{(1)}$ est globale alors que $y_{(2)}$ est maximale mais non globale.



Parmi les fonctions intéressates à prolonger, on peut également les fonctions analytiques. Un premier résultat, le lemme d'Abel, nous permet d'introduire la notion de *rayon* et *disque de convergence*. On peut résumer la situation par le schéma ci-dessous.

Pourquoi parle-t-on de *cercle d'incertitude* ? En particulier, pour les trois raisons suivantes...
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sur le cercle $C(0,R)$, la série peut être :
- Divergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement en tout point de $C(0,1)$.
- Divergente en certains points : $R = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ et converge en tout point de $C(0,1)\backslash\{1\}$ (série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$)
- Convergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument en tout point de $C(0,1)$



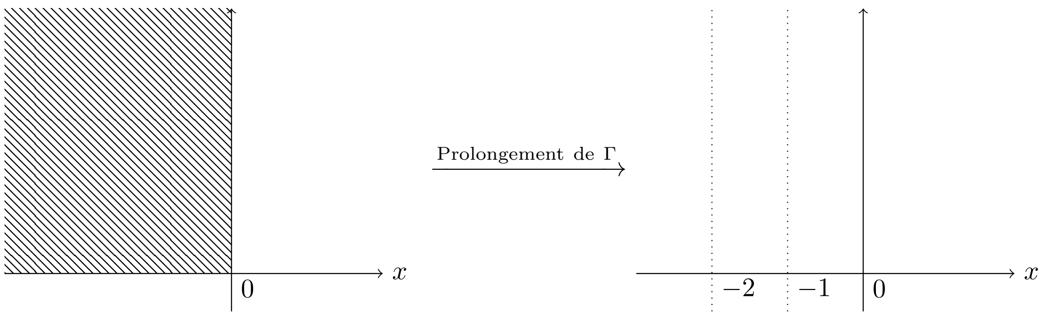
Un théorème nous donnera l'équivalence suivante

$$f \text{ est holomorphe sur } \Omega \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est analytique dans } \Omega$$

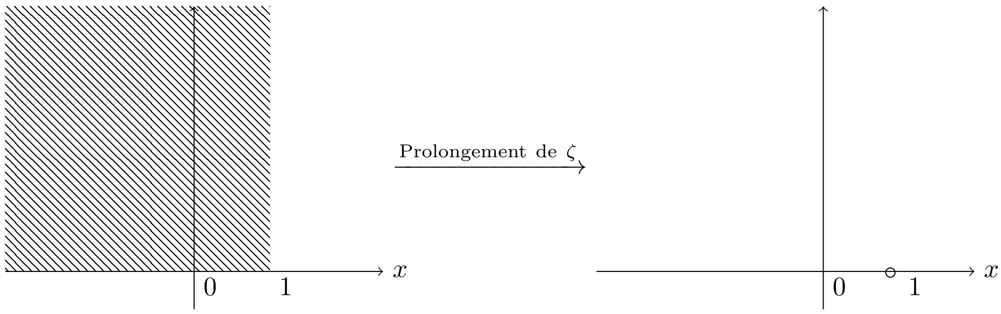
Et par la suite, le *principe des zéros isolés* nous fournira quant à lui un théorème important permettant de prolonger les fonctions analytiques/holomorphes : le *théorème de prolongement des identités*. On va s'intéresser à deux célèbres fonctions : la fonction Γ *d'Euler* et la fonction ζ *de Riemann*. Elles sont définies par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$$
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{pour} \quad \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$$

On verra que la fonction Γ d'Euler peut-être vu comme une extension de la définition de la factorielle. Mais surtout, on verra que l'on peut prolonger holomorphiquement Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.



Comme pour la foncion Γ, on peut gratter du terrain sur de domaine de définition en prolongeant ζ holomorphiquement sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.



L'espace L^2 est un espace L^p un peu spécial : c'est un espace de Hilbert. Il a un petit "plus" géométrique : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc. Avec les notions de *base hilbertienne* et de *fonction poids*, on obtient des résultats très intéressants. On peut même construire des bases hilbertiennes dites *bases hilbertiennes des polynômes orthogonaux.*

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠
[DEM] Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly

Développements

Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$
Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

1 Aspects topologiques

1.1 Prolongement par continuité

Proposition 1 *Soient (E,d), (F,d') deux espaces métriques, $f : D \subset E \to F$ et $a \in D$ un point d'accumulation de D. L'application f est continue si et seulement si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$.* **[GOUan] p.16**

Définition 2 *Lorsque f n'est pas définie en a et lorsque $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = l$, la fonction g définie sur $D \cup \{a\}$ par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in D \\ l & si\ x = a \end{cases}$$

est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a. **[GOUan] p.16**

Exemple 3 *Soit*

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}$$

Alors f se prolonge en une fonction continue $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\widehat{f}_{|\mathbb{R}^*} = f$$
$$\widehat{f}(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1$$

Exemple 4 *En posant $e_n(x) = e^{inx}$, on a que la fonction*

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

appelé le noyau de Dirichlet d'ordre N est un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

De même, la fonction

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

appelé le noyau de Fejér d'ordre N, est un prologement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2$$

Théorème 5 *Théorème de Tietze-Urysohn*
Soient (E,d), un espace métrique, A un fermé de E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée.

Alors il existe une fonction $g : E \mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que

$$g_{|A} = f$$
$$\sup_{x\in E} g(x) = \sup_{y\in A} f(y)$$
$$\inf_{x\in E} g(x) = \inf_{y\in A} f(y)$$

[GOUan] p.66-67

1.2 Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense [ML3an] p.95-96

Théorème 6 *Soient (E, d_E) un espace métrique, (F, d_F) un espace métrique complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F. Alors il existe une unique application continue $\tilde{f}$ de E dans F qui coïncide avec f sur A. De plus, $\tilde{f}$ est aussi uniformément continue.*

Application 7 *Soient F un espace de Banach et $\mathcal{E}([a,b],F)$ l'espace des fonctions en escalier de $[a,b]$ à valeurs dans F muni de la norme uniforme. L'application*

$$\mathcal{I} \ : \ \mathcal{E}([a,b],F) \to F$$
$$f \mapsto \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est une application linéaire continue. L'espace $\mathcal{E}([a,b],F)$ est dans l'espace $\mathcal{R}([a,b],F)$ des fonctions en réglées sur $[a,b]$. Ainsi, l'application $\mathcal{I}$ se prolonge à $\mathcal{R}([a,b],F)$ en une application uniformément continue, ce qui permet de définir l'intégrale de Riemann d'une fonction f de $\mathcal{R}([a,b],F)$, comme la valeur en f du prolongement.

1.3 Prolongement des formes linéaires [NEHH] p.308 → 314

Définition 8 *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $p : E \to \mathbb{R}$ une application.*
(i) On dit que p est <u>positivement homogène</u> si pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
(ii) On dit que p est <u>sous-additive</u> si pour tout $x, y \in E$, on a $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

Théorème 9 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p : E \to \mathbb{R}$ une application positivement homogène et sous-additive. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 10 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $p : E \to \mathbb{R}_+$ une semi-norme. Soient H un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire sur H telle que pour tout $x \in H$, on ait $|f(x)| \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire $\tilde{f}$ sur E prolongeant f (i.e.) $\tilde{f}(y) = f(y)$ pour tout $y \in H$, et telle que $|\tilde{f}(x)| = p(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 11 <u>*Théorème de Hahn-Banach*</u>
Soient $(E, ||.||)$ un espace normé et $\mathbb{K}$-e.v. et H un sous-espace vectoriel de E muni de la norme induite. Pour tout $f \in H^*$, il existe $\tilde{f} \in E^*$ dont la restriction à H soit f et telle que $||\tilde{f}|| = ||f||$. Bien entendu, si H est dense dans E, $\tilde{f}$ est unique.

Corollaire 12 *Soit $(E, ||.||)$ un espace normé. Alors on a :*
1) Pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, il existe une forme linéaire continue f de E telle que $||f|| = 1$ et $f(x) = ||x||$. En particulier, si $E \neq \{0\}$, alors on a $E^* \neq \{0\}$
2) Soient $x, y \in E$. Si pour tout $g \in E^*$, on a $g(x) = g(y)$, alors $x = y$.

Corollaire 13 *Soient $(E, ||.||)$ un espace normé, H un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E\backslash\overline{H}$. Alors il existe une forme linéaire continue f sur E telle que $||f|| = 1$, $f(x) = \mathrm{d}(x, H) \neq 0$ et $f(H) = 0$.*

Corollaire 14 *Soient $(E, ||.||)$ un espace normé et H un sous-espace vectoriel de E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) H est dense dans E.
(ii) Toute $f \in E^*$ nulle sur H est identiquement nulle.

2 Aspect différentiel

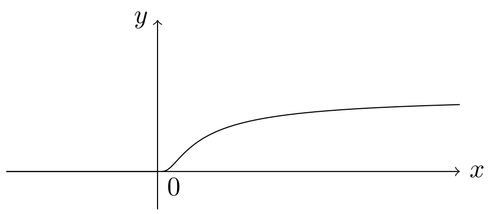
2.1 Prolongement C^k

Proposition 15 *Soient (E, d) un espace métrique, $f : [a, b[\to E$ une application continue, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\lim_{\substack{t\to a\\ t>a}} F'(t) = l$ existe. Alors F est dérivable en a et $F'(a) = l$.* **[GOUan] p.74**

Application 16 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

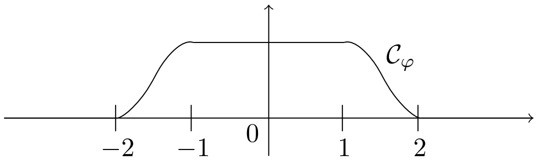
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ e^{-1/x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.



Par conséquent, il existe une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-1,1] \\ 0 & si\ |x| \geq 2 \end{cases}$$



Théorème 17 *Théorème de réalisation de Borel*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Alors il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier n, on ait $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$.

2.2 Polynômes interpolateurs de Lagrange [DTZ] p.502 → 505

Théorème 18 *Soient $a_1, ...a_n$ n éléments distincts de $\mathbb{R}$, et soient $b_1, ...b_n$ n éléments de $\mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que*

$$P(a_i) = b_i, \quad i = 1...n$$

Ce polynôme s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif à la donnée $a_1, ...a_n$ et $b_1, ...b_n$. De plus, il a pour expression

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\substack{j=i \\ i\neq j}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Théorème 19 *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $x_0, ...x_n$ $n+1$ points distincts de $[a,b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, ...x_n$. On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\zeta_x \in [a,b]$ tel que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Remarque 20 *Attention, on n'a pas nécesairement une "bonne convergence" du polynôme interpolateur de Lagrange vers la fonction que l'on souhaite interpoler. Un cas très académique illustrant cette mauvaise convergence est le phénomène de Runge.*

Voir Figure 1.

2.3 Définitions. Solutions maximales et globales [DEM] p.115 → 121

Définition 21 *Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application continue.*
Une solution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}^n$ telle que
(i) $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \mathcal{U}$
(ii) $\forall t \in I$, $y'(t) = f(t, y(t))$.

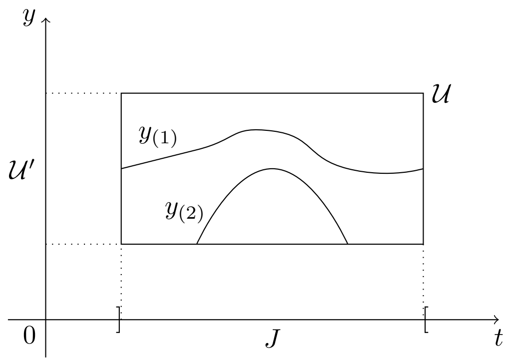
Définition 22 *Etant donné un point $(t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur, telle que $y(t_0) = y_0$.*

Définition 23 *Soient $y : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}_{|I} = y$*
On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$

Théorème 24 *Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique).*

Définition 25 *On suppose ici que l'ouvert $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U} = J \times \mathcal{U}'$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U' un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle J tout entier.

Remarque 26 *Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse.*



Sur le schéma, $y_{(1)}$ est globale alors que $y_{(2)}$ est maximale mais non globale.

3 Aspect analytique

3.1 Disque de convergence et cercle d'incertitude [GOUan] p.236-237

Définition 27 *On appelle série entière de variable complexe, toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 28 *Lemme d'Abel*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
(ii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Définition 29 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.
Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.
Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appelée fonction entière.

Remarque 30 *Pourquoi parle-t-on de cercle d'incertitude ? En particulier, pour les trois raisons suivantes...*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sur le cercle $C(0,R)$, la série peut être :
- Divergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement en tout point de $C(0,1)$.
- Divergente en certains points : $R = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ et converge en tout point de $C(0,1)\backslash\{1\}$ (série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ avec $\theta \neq 2\pi\mathbb{Z}$)
- Convergente en tout point : $R = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument en tout point de $C(0,1)$

Voir Figure 2.

Proposition 31 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors*
(i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
(ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
(iii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Proposition 32 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière.*
(i) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $R \geq 1$.
(ii) Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors $R \leq 1$. **[DTZ] p.316**

Exemple 33 *Pour la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par a_n est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers positifs inférieurs ou égaux à n, le rayon de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est égal à 1.* **[DTZ] p.316-317**

3.2 Analyse complexe : holomorphie et analycité [HMQUE] p.102 → 104

Définition 34 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta : \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ tel que*

$$\forall z \in \Delta,\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le seconde membre est un série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ. **[GOUan] p.256**

Théorème 35 *Soient Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est holomorphe sur Ω.
(ii) f est analytique dans Ω. **[HMQUE] p.83**

Théorème 36 ♠ *Principe des zéros isolés* ♠
Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f.
(1) *Si $a \in Z(f)$, $\exists\ k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :*

$$f(z) = (z - a)^k g(z) \qquad \text{avec } g(a) \neq 0$$

(2) *$Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω.*

Application 37 *Théorème de prolongement des identités Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui posède un point d'accumulation dans Ω. Alors, $f = g$.*
En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.

Application 38 *(du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière*

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} \mathrm{d}t$$

on a

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} e^{-\xi/2}$$

Application 39 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.*

3.3 Fonctions Γ d'Euler et ζ de Riemann

Définition 40 *La fonction ζ est définie sur le demi-plan $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ par*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

[ML3an] p.514

Définition 41 *La* *fonction ζ* *est définie sur le demi-plan $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ par*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

[ML3an] p.514

Proposition 42 *(i) $\forall z \in \mathcal{H}$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$. **[ML3an] p.514**

Théorème 43 ♠ *Prolongement de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$* ♠
La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. **[OBJ] p.82-83**

Théorème 44 (admis) *Prolongement de ζ sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$* *La fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.*

3.4 Polynômes orthogonaux

Définition 45 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [**OBJ**] **p.110**

Théorème 46 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. [**OBJ**] **p.140 → 143**

Illustrations

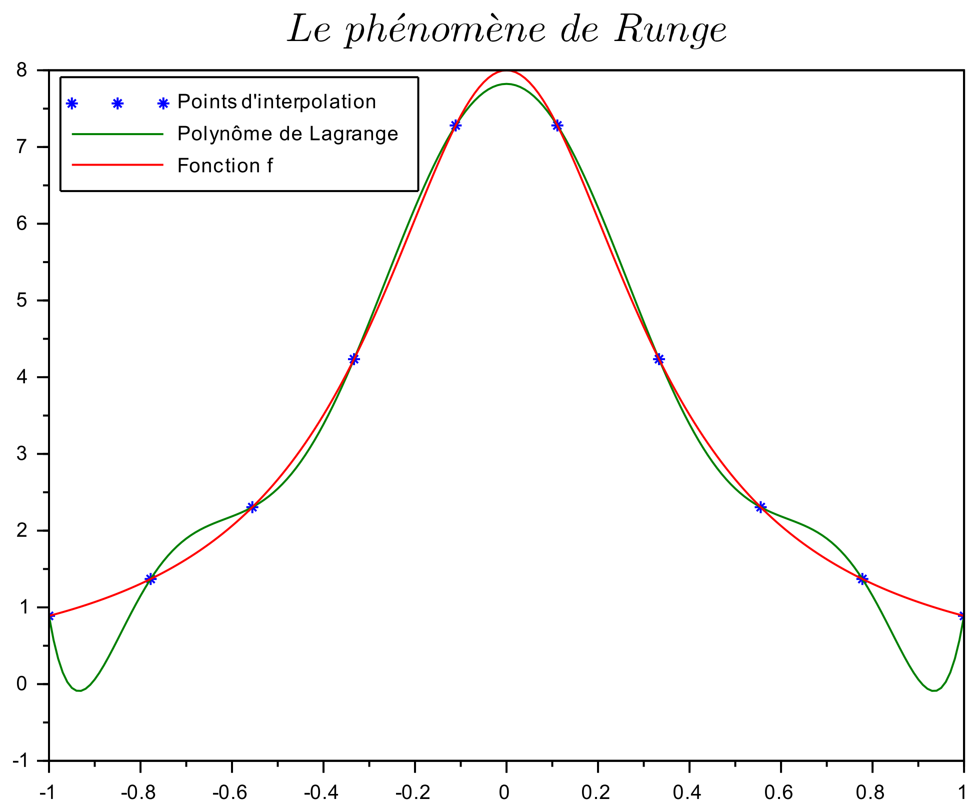


Figure 1 : Phénomène de Runge

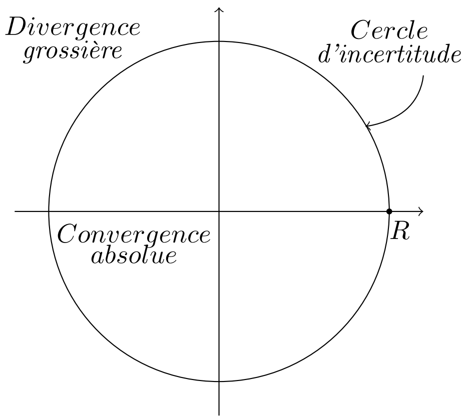


Figure 2 : Disque de convergence et cercle d'incertitude

Exercice : Théorème de Tietze-Urysohn
Soient (E, d), un espace métrique, A un fermé de E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée. Alors il existe une fonction $g : E \mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que

$$g_{|A} = f, \qquad \sup_{x\in E} g(x) = \sup_{y\in A} f(y) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in E} g(x) = \inf_{y\in A} f(y)$$

Solution : Dans le cas où f est constante, le résultat est évident. Sinon, en considérant $\alpha f + \beta$ au lieu de f avec $\alpha \neq 0$ et β des réels bien choisis, on peut même supposer

$$\inf_{y\in A} f(y) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{y\in A} f(y) = 2$$

On va considérer la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \frac{1}{\mathrm{d}(x,A)} \inf\limits_{y\in A} [f(y)\mathrm{d}(x, y)] & \text{si } x \in E\backslash A \end{cases} \end{aligned}$$

Montrons que la fonction g est bien définie et que c'est un bon candidat :

Pour $x \in A$, on n'a pas de problème de définition. Pour $x \notin A$, il suffit de remarque que $\mathrm{d}(x, A) \neq 0$, et donc g est bien définie.
Puisque $1 \leq f(x) \leq 2$, pour tout $x \in A$, on a donc $1 \leq g(x) \leq 2$, pour tout $x \in E$. Grâce à cette inégalité et le fait que $g_{|A} = f$, on en déduit que

$$\inf_{x\in E} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{x\in E} f(x) = 2$$

C'est donc un bon candidat. Il nous reste juste à montrer que g est continue.

Montrons que la fonction g est continue pour tout $x_0 \in E$:
Pour ce faire, on va étudier la continuité respectivement sur $\overset{\circ}{A}$, $E\backslash A$ et $\mathrm{Fr}(A)$.

→ *Si $x_0 \in \overset{\circ}{A}$:* Comme $g_{|A} = f$, et que f est continue sur A, on a donc que g est continue en x_0.

→ *Si $x_0 \in E\backslash A$:* Sur l'ouvert $E\backslash A$, on a

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{d}(x, A)} \inf_{y\in A} [f(y)\mathrm{d}(x, y)]$$

et comme la fonction $x \to \mathrm{d}(x, A)$ est continue, il nous suffit de montrer que la fonction $h : x \to \inf\limits_{y\in A} [f(y)\mathrm{d}(x, y)]$ est continue en x_0.
Soit $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset E\backslash A$. Pour tout $x \in B(x_0, r)$, pour tout $y \in A$, on a

$$\begin{aligned} h(x_0) \leq f(y)\mathrm{d}(x_0, y) &\leq f(y)(\mathrm{d}(x_0, x) + \mathrm{d}(x, y)) \\ &\leq 2\mathrm{d}(x_0, x) + f(y)\mathrm{d}(x, y) \end{aligned}$$

Par passage à l'infimum sur $y \in A$, on obtient donc

$$h(x_0) \leq 2\mathrm{d}(x_0, x) + h(x)$$

Par le même raisonnement, on obtient aussi $h(x) \leq 2\mathrm{d}(x_0, x) + h(x_0)$, et finalement, on a

$$|h(x_0) - h(x)| \leq 2\mathrm{d}(x_0, y)$$

Ce qui nous donne la continuité de h en $x_0 \in E\backslash A$.

$\rightarrow$ <u>*Si* $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$ *:*</u> Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en $x_0 \in A$, on a

$$\exists r > 0,\ \forall y \in A \cap B(x_0, r), \qquad |f(y) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Si $x \in E\backslash A$ et $\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/4$, on a, en posant $C = A \cap B(x_0, r)$,

$$\forall y \in A\backslash C,\ \ \mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(x_0, y) - \mathrm{d}(x_0, x) \geq \frac{3r}{4}$$

et donc, on a $\inf\limits_{y \in A\backslash C}[f(y)\mathrm{d}(x, y)] \geq 3r/4$. De plus, $f(x_0)\mathrm{d}(x_0, x) \leq 2\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/2$, donc

$$\inf_{y \in A}[f(y)\mathrm{d}(x, y)] = \inf_{y \in C}[f(y)\mathrm{d}(x, y)]$$

et comme $f(x_0) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x_0) + \epsilon$, pour tout $y \in C$, on a donc

$$(f(x_0) - \epsilon)\mathrm{d}(x, A) \leq \inf_{y \in A}[f(y)\mathrm{d}(x, y)] \leq (f(x_0) + \epsilon)\mathrm{d}(x, A)$$

On en déduit donc que, pour tout $x \in E\backslash A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/4$,

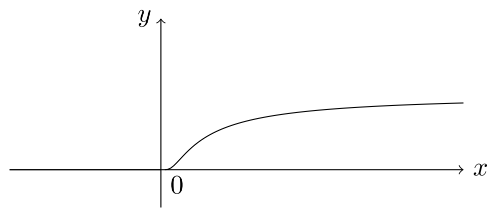
$$g(x_0) - \epsilon \leq g(x) \leq g(x_0) + \epsilon$$

Cette relation est encore vraie pour $x \in A$ tel que $\mathrm{d}(x_0, x) \leq r/4$. Ainsi, g est continue en $x_0 \in \mathrm{Fr}(A)$.

D'où le résultat.

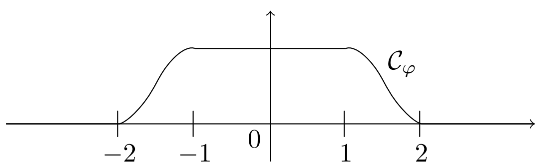
Exercice : Théorème de réalisation de Borel
1) Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ e^{-1/x} & si\ x > 0 \end{cases}$$



Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer qu'il existe une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [-1, 1] \\ 0 & si\ |x| \geq 2 \end{cases}$$



3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer qu'il existe une infinité de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout entier k, on ait $f^{(k)}(0) = a_k$.

Solution : 1) Manifestement, f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Nous devons donc prouver l'existence de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists P_n \in \mathbb{R}[X],\ \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour $n=0$, l'hypothèse est vraie avec $P_0=1$. Supposons donc le résultat vrai jusqu'au rang n et montrons le au rang $n+1$.
On a, pour tout $x>0$,

$$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}e^{-1/x}P_n'\left(\frac{1}{x}\right)=e^{-1/x}P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

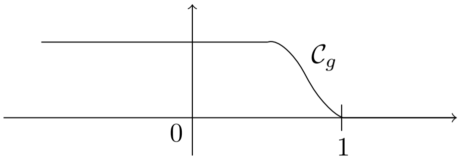
avec $P_{n+1}(X)=X^2P_n(X)-X^2P_n'(X)$.
Par ailleurs, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x)=0$ et pour $x<0$, on a toujours $f^{(n)}(x)=0$. On en déduit donc que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f^{(n)}(x)=0$$

Finalement $f^{(n)}(0)$ existe et on pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0)=0$. Par conséquent, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Pour répondre à cette question, nous allons tout simplement construire cette fonction.
On considère l'application

$$\begin{aligned} g:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\frac{f(f(1)-f(x))}{f(f(1))}\end{aligned}$$



Cette application est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x\leq 0,\quad g(x)=\frac{f(f(1)-0)}{f(f(1))}=1$$

et

$$\forall x\geq 1,\quad f(1)-f(x)\leq 0\ \Rightarrow\ f(f(1)-f(x))=0\ \Rightarrow\ g(x)=0$$

Finalement, l'application $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto g(x-1)g(-x-1)$ convient.

3) Pour répondre à cette question, on va devoir poser quelques trucs ...
On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\varphi_n(x)=x^n\varphi(x)$$

On note M_n un majorant de $|\varphi_n|$, $|\varphi_n'|$,..., $|\varphi_n^{(n-1)}|$ sur $\mathbb{R}$, et on choisit une suite réelle $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lambda_n\geq 1,\ \forall n\in\mathbb{N},\qquad \lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty,\qquad \sum\frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}\text{ converge}$$

Montrons que la fonction $f:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\varphi(\lambda_nx)$ est bien définie, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$:

Remarquons que comme les φ_n sont à support compact, M_n existe bien, et pour le choix de λ_n, on peut prendre

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \lambda_n=1+n^2(1+|a_n|M_n)$$

On remarque également que la fonction f est bien définie en $x=0$ mais également pour $x\neq 0$ car les termes sont nuls à partir d'un certain rang (dès que $|\lambda_nx|>2$, ce qui est possible car $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=+\infty$).
Maintenant, montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$ que f est de classe C^p sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\lambda_n^{p-n}\varphi_n^{(p)}(\lambda_nx)\qquad(\dagger)$$

Pour $p=0$, $(\dagger)$ n'est rien d'autre que la définition de f, et la série $(\dagger)$ converge normalement car

$$\forall n\geq 1,\quad |a_n\lambda_n^{-n}\varphi_n(\lambda_nx)|\leq\frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}$$

et par hypothèse la série $\sum \frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}$ converge. On en déduit donc la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
Supposons donc le résultat vrai jusqu'au rang p et montrons le au rang $p+1$.
On a

$$\text{Pour } n \geq p+2, \qquad |a_n \lambda_n^{p+1-n} \varphi_n^{(p+1)}(\lambda_n x)| \leq \frac{|a_n|M_n}{\lambda_n}$$

On en déduit donc que $f^{(p)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (donc que f est de classe C^{p+1} sur $\mathbb{R}$. Ainsi la formule (†) est vraie au rang $p+1$.

Enfin, pour $x \in [-1,1]$, on a $\varphi_n(x) = x^n$, donc $\varphi_p^{(p)}(0) = p!$ et $\varphi_n^{(p)}(0) = 0$ pour $n \leq p$. Par conséquent, dans (†), on obtient

$$f^{(p)}(0) = p! a_p$$