Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Nous connaissons plusieurs fonctions dites "classiques" : sin, cos, exp, etc. Certaines sont même définies à partir de ces fonctions : sh, ch, etc. Mais plusieurs fonctions n'ont pas cette "chance" et sont définies à partir d'une intégrale. Elle sont de la forme $F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$. La plus célèbre est la fonction Γ d'Euler définie par

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$$

On est donc amené à étudier très soigneusement les intégrales et de trouver des conditions pour obtenir des résultats de régularité. En effet, la continuité seule de l'intégrande f ne suffit pas pour obtenir la continuité F. Par exemple, la fonction

$$f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto xe^{-tx}$$

est continue sur $[0,+\infty[\times[0,+\infty[$, mais la fonction

$$F : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^{+\infty} xe^{-tx}\mathrm{d}t$$

n'est pas continue en 0.

Une des applications intéressantes des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre est sans doute la convolution. Cette "opération" permet de "gagner de la régularité" sur les fonctions comme on peut le voir dans la partie "Illustrations".

Un autre type de fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre sont les transformées de Fourier. Sans précaution, pour une fonction f, la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ est définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ \xi &\mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Il faut néanmoins faire attention aux espaces où est définit cette transformée ($L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, etc.) car les propriétés que l'on peut en tirer seront probablement différentes : continuité, injectivité, surjectivité, etc.

Comme nous avons à faire à des fonctions, on peut s'intéresser au comportement asymptotique de celles-ci. La méthode de Laplace illustre particulièrement bien le comportement asymptotique des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[FAR] Calcul intégral, Jacques Faraut
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠

Développements

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Base hilbertienne des polynômes orthogonaux

Méthode de Laplace

0 Résultats préliminaires d'intégration [ML3an] p.239 → 261

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré.

Théorème 1 <u>Théorème de convergence monotone</u>
Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Alors f est mesurable, et on a

$$\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n$$

Corollaire 2 *Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables vérifiant $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Alors f est intégrable si et seulement si la suite croissante $(\int_x f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est marjorée. Dans ce cas, on a*

$$\int_X f = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n$$

Théorème 3 <u>Lemme de Fatou</u>
Soit $(f_n : X \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Alors

$$\int_X (\liminf f_n) = \liminf \left(\int_X f_n\right)$$

Théorème 4 <u>Théorème de convergence dominée</u>
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré complet et $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que :
(i) La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $f(x)$ pour presque tout x.
(ii) Il existe une fonction $g : X \to [0,+\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ pour presque tout x.
Alors, la fonction f est intégrable sur X et on a
1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| = 0$
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n = \int_X f$

Théorème 5 <u>Théorème de Fubini-Tonelli</u>
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.
1. <u>Tonelli :</u>
Soit $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-mesurable. Alors,
(i) pour tout $x \in X$, la fonction $f_x : Y \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{N}$-mesurable,
(ii) pour tout $y \in Y$, la fonction $f_y : X \to \mathbb{C}$ est $\mathcal{M}$-mesurable,
(iii) la fonction

$$\begin{aligned} g : X &\to [0,+\infty] \\ x &\mapsto \int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

est $\mathcal{M}$-mesurable,
(iv) la fonction

$$\begin{aligned} h : Y &\to [0,+\infty] \\ y &\mapsto \int_X f_y(x)\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

est $\mathcal{N}$-mesurable.
(v) Enfin, on

$$\begin{aligned} \int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \end{aligned}$$

2. <u>Fubini :</u>
Soit $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ une fonction $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$-intégrable. Alors,
(i) pour μ-presque tout $x \in X$, la fonction $f_x : Y \to \mathbb{C}$ est ν-intégrable,
(ii) pour ν-presque tout $y \in Y$, la fonction $f_y : X \to \mathbb{C}$ est μ-intégrable,
(iii) la fonction g définie μ-presque partout par

$$\begin{aligned} g : X &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_Y f_x(y)\mathrm{d}\nu(y) \end{aligned}$$

est μ-intégrable,
(iv) la fonction h définie ν-presque partout par

$$\begin{aligned} h : Y &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto \int_X f_y(x)\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

est ν-intégrable.
(v) Enfin, on

$$\begin{aligned} \int_X g(x)\mathrm{d}\mu(x) &= \int_Y h(y)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \end{aligned}$$

(i.e.)

$$\begin{aligned} &\int_X \left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu(y)\right)\mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\nu(y) \\ &= \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \end{aligned}$$

1 Régularité

1.1 Continuité

Théorème 6 <u>Théorème de continuité sous le signe intégral</u>
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré, (E,d) un espace métrique et $a \in E$. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$ telle que :

(i) $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est $\mathcal{M}$-mesurable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point a.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$ $\forall x \in E$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie et continue en a. **[ML3an] p.275**

Théorème 7 *Dans la pratique ...*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et (E,d) un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times I \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
(ii) $\forall t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
(iii) il existe une fonction positive g, continue par morceaux et intégrable sur I telle que $|f(x,y)| \leq g(y)$ $\forall x \in E$.
Alors l'application

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$$

est définie et continue sur E. **[GOUan] p.157**

Exemple 8 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. **[ML3an] p.277**

1.2 Dérivabilité

Théorème 9 *Théorème de dérivabilité sous le signe intégral*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : I \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in I$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur I.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq g(y)$ $\forall x \in I$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application

$$F : E \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_X f(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

est définie et dérivable sur I, et on a

$$F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

[ML3an] p.276

Théorème 10 *Dans la pratique ...*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : J \times I \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall x \in J$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
(ii) f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème 7.
Alors l'application

$$F : J \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}t$$

est définie et de classe C^1 sur J, et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.157

Exemple 11 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. La transformée de Laplace F de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. **[ML3an] p.277**

Corollaire 12 *Sans l'hypothèse de domination*
Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : J \times [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $J \times [a,b]$. Alors l'application

$$F : J \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}t$$

est continue sur J.
Si de plus, f est dérivable par rapport à x et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times [a,b]$, alors F est de classe C^1 sur J, et on a

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.158

Exemple 13 *Fonction Gamma - cas réel*
Pour tout $x > 0$, la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n e^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t$$

[GOUan] p.158

1.3 Holomorphie

Théorème 14 *Théorème de d'holomorphie sous le signe intégral*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et D un ouvert de $\mathbb{C}$. On considère une fonction $f : D \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
(i) $\forall z \in D$, l'application $y \mapsto f(z,y)$ est mesurable.
(ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est holomorphe dans D.
(iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z,y)| \leq g(y)$ $\forall z \in D$ et pour presque tout $y \in X$.
Alors l'application

$$\begin{aligned} F : D &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \int_X f(z,y)\mathrm{d}\mu(y) \end{aligned}$$

est définie et holomorphe dans D, et on a

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,y)\mathrm{d}\mu(y)$$

[MLan] p.279

Exemple 15 *Fonction Gamma - cas complexe*
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 0$, la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ **[ML3an] p.279**

2 Convolution

2.1 Convolution et espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 $\to$ 124

Définition 16 *Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On appelle translatée de f par a la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

Proposition 17 *(i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ et $||\tau_a f||_p = ||f||_p$.*
(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim\limits_{a \to 0} ||\tau_a f - f||_p = 0$

Théorème 18 *$L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$:*
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
Pour presque tout x, l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable.
La fonction $f*g$, qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

est intégrable, et

$$||f*g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$$

Théorème 19 *$L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$:*
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
Pour presque tout x, l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable.
La fonction $f*g$, qui est définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

appartient à $L^p(\mathbb{R})$, et

$$||f*g||_p \leq ||f||_1||g||_p$$

Théorème 20 *$L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:*
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
La fonction $f*g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et

$$||f*g||_\infty \leq ||f||_1||g||_\infty$$

Théorème 21 *$L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:*
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
La fonction $f*g$ appartient à $C_0(\mathbb{R})$, et

$$||f*g||_\infty \leq ||f||_2||g||_2$$

2.2 Approximation de l'unité et régularité

Illustration 22 *Effet de la convolution sur une fonction Figure (1)*

Proposition 23 *L'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}), +, ., *)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution.* **[ELAM2] p.85**

Définition 24 *On appelle approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$ toute suite $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}$ telles que*

$$(i)\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$(ii)\ \forall \epsilon > 0, \quad \lim_{j\to+\infty} \int_{|x|>\epsilon} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

[ELAM2] p.86

Exemple 25

$$\begin{aligned} \textit{Approximation de Laplace} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{2}e^{-j|x|} \\ \textit{Approximation de Cauchy} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi}\frac{1}{1+j^2x^2} \\ \textit{Approximation de Gauss} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{j^2x^2}{2}} \end{aligned}$$

[ELAM2] p.86

Théorème 26 *Théorème d'approximation*
Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$.
(i) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors $(f*\varphi_j)_{j\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $(f*\varphi_j)_{j\geq 1}$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$. **[ELAM2] p.87**

Proposition 27 *(i) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ et*

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}$$

[FAR] p.123-124

Théorème 28 *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.* **[FAR] p.125**

3 Application à l'analyse de Fourier

3.1 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.109 → 122

Proposition-Définition 29 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction*

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

est continue et bornée par $||f||_1$. On l'appelle la transformée de Fourier de f dans $L^1(\mathbb{R})$.
L'application

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto \widehat{f}$$

est linéaire et continue. On l'appelle la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Exemple 30

$$\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})(\xi) = \begin{cases} 2\frac{\sin(\frac{b-a}{2}\xi)}{\xi}e^{-i(a+b)\xi/2} & si\ \xi \neq 0 \\ b-a & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{F}(\chi_{[a,b]}) \notin L^1(\mathbb{R})$, donc la transformée de Fourier n'opère pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

Proposition 31 *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$$

Théorème 32 *Formule d'échange*
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)g(u)\mathrm{d}u$$

Théorème 33 *La transformation de Fourier*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto \widehat{f}$$

est une application injective

Remarque 34 *La transformation de Fourier conjuguée est donnée par*

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{ix\xi}\mathrm{d}x$$

Théorème 35 *Formule d'inversion*
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$

Théorème 36 *Si $f, \widehat{f}, g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et de plus, on a*

$$\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$$

Théorème 37 *(i) Transformation de Fourier d'une dérivée*
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$$

(ii) Dérivée d'une transformation de Fourier
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\widehat{f}$ admet une dérivée $(\widehat{f})'$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f})'(\xi) = -i\mathcal{F}(xf)(\xi)$$

3.2 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ [ELAM2] p.122 → 130

Théorème 38 *Formule de Plancherel-Parseval*
Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a

$$||\widehat{f}||_2^2 = 2\pi||f||_2^2$$

Proposition-Définition 39 *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors (i) Il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.*
(ii) la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers une limite $\tilde{f}$ (indépendante de la suite $(\widehat{f_n})$). Cette limite est la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R})$ (que l'on notera encore $\widehat{f}$).
(iii) $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), ||.||_2)$
(iv) Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{f} = \tilde{f}$.

Proposition 40 *(i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lim_{A \to +\infty} ||\varphi_A - \widehat{f}||_2 = 0 \quad et \quad \lim_{A \to +\infty} ||\Psi_A - f||_2 = 0$$

où
$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$, et
$\Psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$
(ii) Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$$

Théorème 41 *Formule d'échange*
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f\widehat{g}$ et $\widehat{f}g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\widehat{g}(u)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)g(u)\mathrm{d}u$$

Théorème 42 *(i) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors*

$$f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g}) \quad \text{et} \quad \widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$$

(ii) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\widehat{f}.\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad f * g = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}.\widehat{g})$$

Définition 43 *On appelle opérateur de Fourier-Plancherel, l'opérateur*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

Théorème 44 *(i) L'espace vectoriel $\{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.*
(ii) L'opérateur de Fourier-Plancherel

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}) &\to L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}(f) \end{aligned}$$

est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$.

3.3 Polynômes orthogonaux

Définition 45 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un espace de Hilbert. Une famille $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de vecteurs de H est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker)
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ est dense dans H.
On appelle base hilbertienne de H une famille orthonormée totale de vecteurs de H. [**ML3an**] **p.331**

Proposition 46 *1) Toute famille orthormée est libre*
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ est une famille totale si et seulement si la condition ($\langle x, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \in I$) implique $x = 0$. [**ML3an**] **p.331**

Définition 47 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to R$ mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. [**OBJ**] **p.110**

Théorème 48 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$ pour la norme $||.||_\rho$. [**OBJ**] **p.140 → 143**

4 Comportement asymptotique : méthode de Laplace [ROU] p.349 → 351

Théorème 49 ♠ *Méthode de Laplace* ♠
Soit $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f[a, b[\to \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi}f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0. On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)}f(x)\mathrm{d}x$
Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

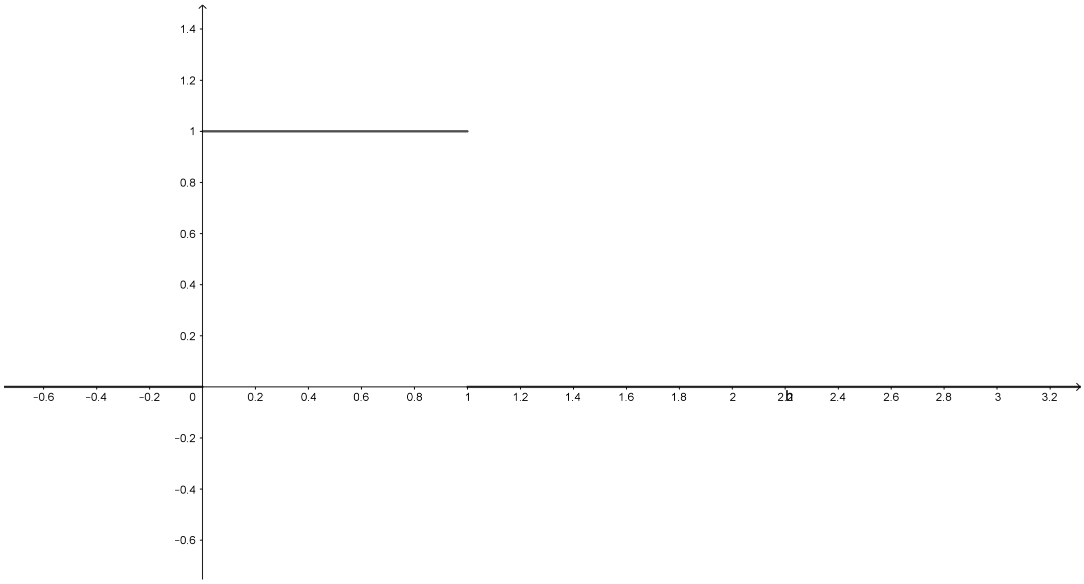
$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\frac{e^{-t\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{t}}$$

Application 50 *Formule de Striling :*
Soit $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{x\ln t - t}\mathrm{d}t$. Alors

$$\Gamma(x+1) \sim x^{x+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-x}\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}$$

Illustrations

Afin de voir l'effet de la convolution sur une fonction f, prenons une fonction très simple et sans "une trop bonne régularité" : $f = \chi_{[0,1]}$.



Courbe de f

Calculons $f * f$:
$\forall x \in \mathbb{R}$,

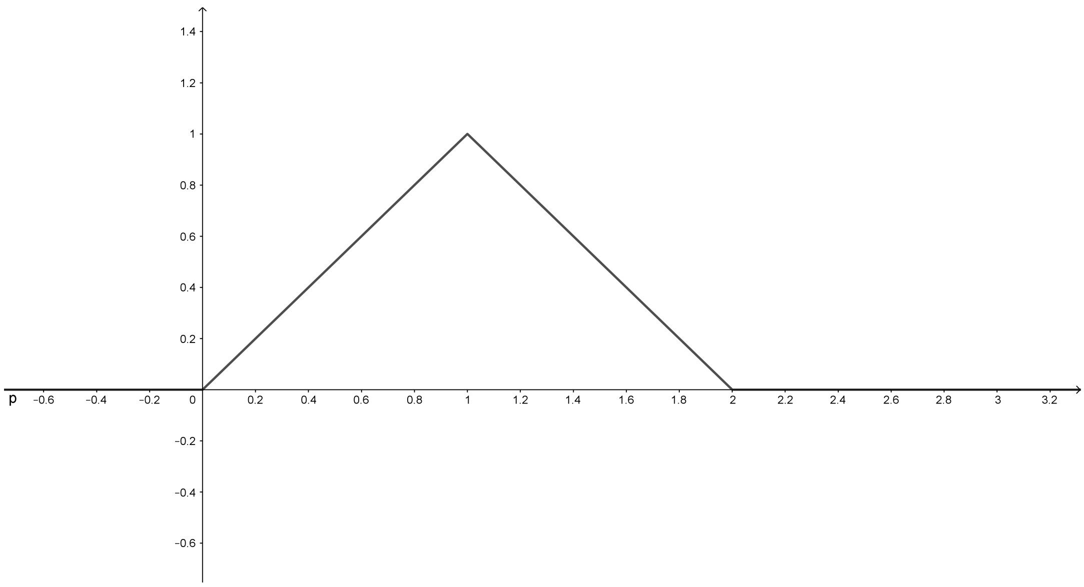
$$f * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-1,x]\cap[0,1]}(y)\mathrm{d}y$$

or

$$[x-1,x]\cap[0,1] = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ [0,x] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ [x-1,1] & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Ainsi,

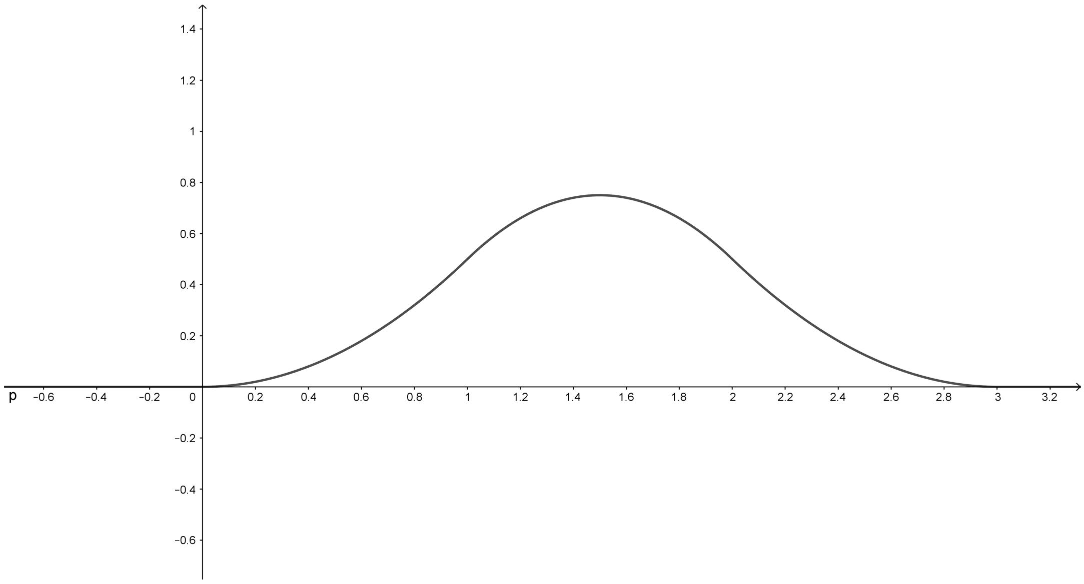
$$f * f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



Courbe de $f * f$

Noter que nous avons déjà "gagner" un peu de régularité. En effet, la fonction f de départ était seulement continue par morceaux alors que $f*f$ l'est. On peut encore "voir" que l'on va gagner de la régularité en calculant $f*f*f$. On a

$$f*f*f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{-2x^2+6x-3}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Courbe de $f*f*f$

<u>Conclusion :</u>
- f est continue par morceaux
- $f*f$ est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux
- $f*f*f$ est $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux

Questions

Exercice : Etude de la fonction Γ
1) Montrer que, pour tout $x > 0$, la fonction

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x)$.
3) Montrer que :
  (i) $\forall x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,
  (ii) $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$, et
  (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Solution : 1) Montrons que $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$:

Pour t proche de 0, on a $e^{-t} t^{x-1} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ et donc

$$\int_0^1 t^{x-1} \mathrm{d}t \text{ converge} \Leftrightarrow x - 1 > -1 \Leftrightarrow x > 0$$

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-t} t^{x-1} = 0$ et donc par le critère de Riemann, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.
Conclusion : $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

Montrons que la fonction Γ continue sur $]0, +\infty[$:

On va utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral :
- $\forall x \in]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- $\forall t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- $\forall x \in]0, +\infty[$, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \alpha < x < \beta$, et donc $\forall x \in]\alpha, \beta[$, on a $e^{-t} t^{x-1} \leq g(t)$ où

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} t^{\alpha - 1} & \text{si } t \in]0, 1] \\ e^{-t} t^{\beta - 1} & \text{si } t \in [1, +\infty] \end{cases} \in L^1(]0, +\infty[)$$

Par le théorème de continuité sous le signe intégral, la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2) Calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x)$:

Nous allons utiliser le lemme de Fatou pour déterminer cette limite.
Soit donc une suite (α_n) de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$. Le lemme de Fatou nous donne

$$\liminf_{n \to +\infty} \Gamma(\alpha_n) \geq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \to +\infty} e^{-t} t^{\alpha_n - 1} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1} \mathrm{d}t = +\infty$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$$

Calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x)$:

De même, soit une suite (β_n) de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$. Le lemme de Fatou donne

$$\liminf_{n \to +\infty} \Gamma(\beta_n) \geq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \to +\infty} e^{-t} t^{\beta_n - 1} \mathrm{d}t = +\infty$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty$$

3) (i) A l'aide d'une intégration par parties, $\forall x\in]0,+\infty[$,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x\mathrm{d}t=\underbrace{\left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty}}_{=0}+\int_0^{+\infty}xe^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t=x\Gamma(x)$$

(ii) En remarquant $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}t=1$, la relation précédente et la continuité de Γ donnent

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x}$$

(iii) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la relation de la question 4)(i) donne

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)...(x+1)x\Gamma(x)\Leftrightarrow\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}=(x+n-1)...(x+1)x$$

Pour $x=1$, on a

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\underbrace{\Gamma(1)}_{=1}}=n...2.1=n!$$

<u>Conclusion :</u> $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)=(n-1)!$.

Exercice : Pour tout $f\in L^1(\mathbb{R})$, la fonction

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f):=\widehat{f}:\mathbb{R}&\to\mathbb{C}\\ \xi&\mapsto\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Montrer que $\widehat{f}$ est bien définie, continue et uniformément bornée sur $\mathbb{R}$.

Solution :
• $\forall\xi\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est mesurable (car continue par exemple) et on a $|f(x)e^{-ix\xi}|=|f(x)|$ donc $\widehat{f}$ est bien définie (car $f\in L^1(\mathbb{R})$)
• En outre, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\xi\mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de continuité sous le signe intégral, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• $\forall\xi\in\mathbb{R}$, on a

$$|\widehat{f}(\xi)|\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)e^{-ix\xi}|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x=||f||_1$$

Par passage au supremum sur $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|\widehat{f}(\xi)|\leq||f||_1$$

Donc $\widehat{f}$ est uniformément bornée sur $\mathbb{R}$.