Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Interpolation Lagrange + Newton Cotes

Approximation uniforme weierstrass

Approx local : Formules de Taylor

Dvpt en SE

Polynômes trigonométriques

Références

[HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[FGNan4] Analyse 4 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas ♠

Développements

Théorème de Weierstrass
Théorème de Féjer

1 Interpolation polynomiale

1.1 Interpolation de Lagrange

Théorème 1 *Soient $a_1, ...a_n$ n éléments distincts de $\mathbb{R}$, et soient $b_1, ...b_n$ n éléments de $\mathbb{R}$. Alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que*

$$P(a_i) = b_i, \quad i = 1...n$$

Ce polynôme s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif à la donnée $a_1, ...a_n$ et $b_1, ...b_n$. De plus, il a pour expression

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\substack{j=i \\ i\neq j}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

1.2 Erreur et convergence

Théorème 2 *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $x_0, ...x_n$ $n+1$ points distincts de $[a, b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, ...x_n$. On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Remarque 3 *Attention, on n'a pas nécesairement une "bonne convergence" du polynôme interpolateur de Lagrange vers la fonction que l'on souhaite interpoler. Un cas très académique illustrant cette mauvaise convergence est le phénomène de Runge.*

Voir Figure 1.

Corollaire 4 *En reprenant les mêmes notations que le thèoème précédent, on a donc*

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{||\Pi_n(x)||_\infty}{(n+1)!} ||f^{(n+1)}(\zeta)||_\infty$$

1.3 Application à l'intégration numérique : Méthode de Newton-Cotes [HUB2] p.1 → 8

Principe 5 *On se donne une subdivision $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ d'un intervalle $[a, b]$. On a donc*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1} - x_k)\int_{-1}^{1} f(\alpha_k)\,\mathrm{d}t$$

avec $\alpha_k = \frac{x_{k+1}+x_k}{2} + t\frac{x_{k+1}-x_k}{2}$.
Une méthode de Newton-Cotes consiste à se donner une formule de quadrature dite élémentaire de

la forme suivante :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \sim \sum_{i=0}^{p} \omega_i g(s_i)$$

où s_i désignent les $p+1$ points équirépartis sur l'intervalle $[-1,1]$:

$$s_i = -1 + \frac{i}{2p}$$

et d'approcher alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \sim \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)\sum_{i=0}^{p}\omega_i f(x_{i,k})$$

avec $x_{i,k} = \frac{x_{k+1}+x_k}{2} + s_i \frac{x_{k+1}-x_k}{2}$

Proposition 6 *La formule de quadrature élémentaire d'ordre p est obtenue en remplaçant la fonction g par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points s_i. En notant L_i, le $i^{\text{ième}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points s_i :*

$$L_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x-s_j}{s_i-s_j}$$

les formules de quadrature élémentaires sont par conséquent données par

$$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t \sim \sum_{i=0}^{p} g(s_i)\int_{-1}^{1} L_i(t)\mathrm{d}t \sim \sum_{i=0}^{p}\omega_i g(s_i)$$

où $\omega_i = \int_{-1}^{1} L_i(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 7 voir Tableau 1

Théorème 8 *Convergence des méthodes de Newton-Cotes*
Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle de discrétisation $[a,b]$. On se donne une famille de discrétisation de $[a,b]$

$$a = x_0^h < x_1^h < \ldots < x_N^h = b$$

de pas $h = \max\limits_{k=0,\ldots,N} |x_{k+1}^h - x_k|$.
Soit $T_p^h(f)$ la formule de quadrature d'ordre p associée :

$$T_p^h(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}^h - x_k^h)\sum_{i=0}^{p}\omega_i f(x_{i,k}^h)$$

Alors $T_p^h(f)$ converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ lorsque le pas h de la discrétisation tend vers zéro.

Théorème 9 *Erreur de quadrature*
On note $T_{[a,b]}^{p,N}(f)$ la formule de quadrature d'ordre p, associée à la discrétisation de $[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$:

$$T_{[a,b]}^{p,N}(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)\sum_{i=0}^{p}\omega_i f(x_{i,k})$$

Si f est une fonction de classe C^{p+1}, et si on note h le pas de la discrétisation $h = \max\limits_{k=0,\ldots,N} |x_{k+1}^h - x_k|$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_{[a,b]}^{p,N}(f)\right| \leq C_p(b-a)h^{p+1}||f^{(p+1)}||_\infty$$

où C_p ne dépend que de p.

2 Approximation uniforme [ML3an] p.141 → 144

Théorème 10 *Théorèmes de Dini*
1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Proposition 11 *La suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} P_0 & = 0 \\ P_{n+1}(u) & = P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0,1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$.

Théorème 12 *Théorème de Stone-Weierstrass (forme réelle)*
Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x,y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 13 *Théorème de Stone-Weierstrass (forme complexe)*
Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x,y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
(iii) Pour toute fonction f de $\mathcal{A}$, la fonction conjuguée $\overline{f}$ est dans $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 14 ♠ *Théorème de Weierstrass* ♠
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. **[GOUan] p.284 → 286**

Remarque 15 *Le précédent théorème utilise dans sa démonstration la convolution qui est définie plus loin.*
On peut également retrouver le théorème de Fejér que l'on verra par la suite.

3 Approximation locale : Formules de Taylor [GOUan] p.73 → 75

Théorème 16 *Formule de Taylor-Lagrange*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$$

Remarque 17 *Lorsque 0 appartient à l'intervalle de définition I, on a, sous les mêmes hypothèses,*

$$\forall x \in I, \exists \theta_x \in]0,1[, \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_x x)$$

Théorème 18 *Formule de Taylor-Young* *Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, telle que $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors, lorsque $h \to 0$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

Théorème 19 *Formule de Taylor avec reste intégral*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

4 Développement en série entière

4.1 Définitions et premières propriétés [GOUan] p.236-239

Définition 20 *On appelle série entière de variable complexe, toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Proposition 21 *Lemme d'Abel*
Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors
(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
(ii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Définition 22 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.
Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.
Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appelée fonction entière.

Proposition 23 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors*
(i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,
(ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.
(iii) $\forall r > 0$, $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.

Théorème 24 *L'application $z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.*

Proposition 25 *Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$$

est convergente. Alors la série entière de variable t, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ et la somme est continue sur ce segment.
[DTZ] p.321-322

Théorème 26 *L'application*

$$f :]-R, R[\to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$$

est de classe C^1. La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} na_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$$

Corollaire 27 *La somme f de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R, R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,*

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

Corollaire 28 *Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $]-R, R[$.*

4.2 Fonctions développables en série entière [GOUan] p.240-241

Définition 29 *Une fonction (de la variable réelle ou complexe) à valeurs complexes définie dans un voisinage de 0 est dite <u>développable en série entière</u> sur un voisinage de 0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.*

Proposition 30 *<u>Développement en série entière des fractions rationnelles</u>*
Soit $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z-z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

Proposition 31 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha, \alpha[$. La série entière

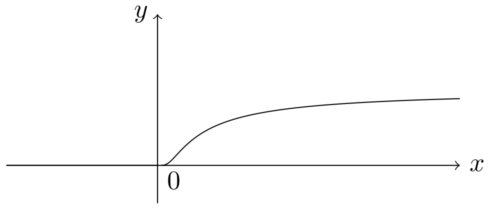
$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Exemple 32 *La fonction*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor (pour tout n, on a $f^{(n)}(0) = 0$).



Proposition 33 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0, une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et R_n l'application définie comme précédemment. Alors*

$$\forall x \in I,\ |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

où pour tout n et pour tout $x \in I$, $M_{n+1}(x)$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0, x]$ si x est positif et $[x, 0]$ si x est négatif. **[DTZ] p.327**

Proposition 34 *Soit f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, et s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \min(\alpha, \rho)$. **[ELAM] p.250**

4.3 Développement en série entière de fonctions usuelles [DTZ] p.327 → 331

Proposition 35 *<u>Développements en série entière classiques :</u>*
• $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
• $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1, 1[$,

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

- *Pour $\alpha = 1$ et en primitivant, $\forall x \in]-1,1[$,*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4.4 Fonctions classiques définies comme sommes de séries entières [GOUan] p.243

Proposotion-Définition 36 *La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On définit l'exponentielle complexe par*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \exp(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n!}$$

Définition 37 *On définit les applications cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique définies sur $\mathbb{C}$, notées respectivement ch (ou cosh) et sh (ou sinh), par :*

$$\mathrm{ch} z = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Définition 38 *On définit les applications cosinus et sinus définies sur $\mathbb{C}$, notées respectivement cos et sin, par :*

$$\cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

5 Polynômes trigonométriques

5.1 Polynômes trigonométriques et séries trigonométriques [ELAM2] p.170 → 173

Définition-Proposition-Rappels 39 *(i) On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.*
Muni de la norme

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$$

$(\mathcal{C}_{2\pi}, ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.
(ii) On note $L^p_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et qui appartiennent à L^p_{loc}
Muni de la norme

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)^p| \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

et si $p = +\infty$

$$||f||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{supess}}\{|f(x)|\ ;\ x \in [0,2\pi]\}$$

$(L^p_{2\pi}, ||.||_p)$ est un espace de Banach $\forall p \in [1,+\infty]$.
(iii) $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $(L^p_{2\pi}, ||.||_p)$ $\forall p \in [1,+\infty[$.
(iv) $L^2_{2\pi}$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert.
(v) Par l'inégalité de Hölder, on a les inclusions suivantes

$$\mathcal{C}_{2\pi} \subset L^\infty_{2\pi} \subset L^p_{2\pi} \subset L^1_{2\pi}$$

Définition 40 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$ donné par*

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Proposition 41 *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal de $L^2_{2\pi}$, appelé système trigonométrique.*

Définition 42 *On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique.*

Définition 43 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes. On dit que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ converge si chacune des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ converge, et on note la somme*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

On appelle série trigonométrique toute somme de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{inx} \qquad (\alpha_n \in \mathbb{C})$$

dont on définit la convergence comme indiqué ci-dessus en prenant pour $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des sommes partielles symétriques d'ordre n :

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$$

Application 44 *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe $c_n(f)$ donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$, où $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.
Toute série de Fourier est une série trigonométrique, mais la réciproque est fausse ! Exemple : $\sum_{n\geq 1}\cos(nx)$

Théorème 45 *Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $||f - P||_2 < \epsilon$.*

Théorème 46 *Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.*

Théorème 47 *Formule de Parseval*
Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
1) $(S_N(f))$ converge vers f en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

5.2 Noyaux de Féjer, de Dirichlet et convergence [ELAM2] p184 → 192

Définition 48 *Pour $f, g \in L^1_{2\pi}$, le produit de convolution $f{*}g$ au point x, quand il existe, est donné par*

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)g(x)\mathrm{d}t$$

Définition 49 *La fonction*

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

où $e_n(x) = e^{inx}$, est appelé le noyau de Dirichlet d'ordre N.

Proposition 50 *(i) D_N est une fonction paire, 2π-périodique, et vérifie*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\mathrm{d}x = 1$$

(ii) D_N est un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}$$

(iii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$S_N(f) = f * D_N$$

Définition 51 *La fonction*

$$K_N = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} D_j \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

où $e_n(x) = e^{inx}$, est appelé le noyau de Fejér d'ordre N.

Proposition 52 *(i) K_N est un prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de la fonction*

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(x/2)}\right)^2$$

(ii) Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a

$$\sigma_N(f) := \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) = f * K_N$$

(iii) $(K_N)_{N\geq 1}$ est une approximation de l'unité de $L^1_{2\pi}$.

Théorème 53 ♠ *Théorème de Féjer* ♠
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
1) Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

2) Si $f \in L^p_{2\pi}$, $p \in [0, +\infty[$, alors

$$||\sigma_N(f)||_p \leq ||f||_p, \text{ et}$$

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_p = 0$$

Illustrations

Méthodes	Coefficients	$\int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{d}t$	$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
Rectangles à gauche	$p=0$ $s_0=-1$ $\omega_0=2$	$\sim 2g(-1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k)$
Rectangles à droite	$p=0$ $s_0=1$ $\omega_0=2$	$\sim 2g(1)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1})$
Point milieu	$p=0$ $s_0=0$ $\omega_0=2$	$\sim 2g(0)$	$\sim \sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$
Trapèzes	$p=1$ $s_0=-1,\ s_1=1$ $\omega_0=1,\ \omega_1=1$	$\sim g(-1)+g(1)$	$\sim \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)(f(x_k)+f(x_{k+1}))$
Simpson	$p=2$ $s_0=-1,\ s_1=0,\ s_2=1$ $\omega_0=\frac{1}{3},\ \omega_1=\frac{4}{3},\ \omega_2=\frac{1}{3}$	$\sim \frac{1}{3}(g(-1)+4g(0)+g(1))$	$\sim \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}-x_k)\left(f(x_k)+4f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)+f(x_{k+1})\right)$

Tableau 1 : Formules élémentaires les plus classiques

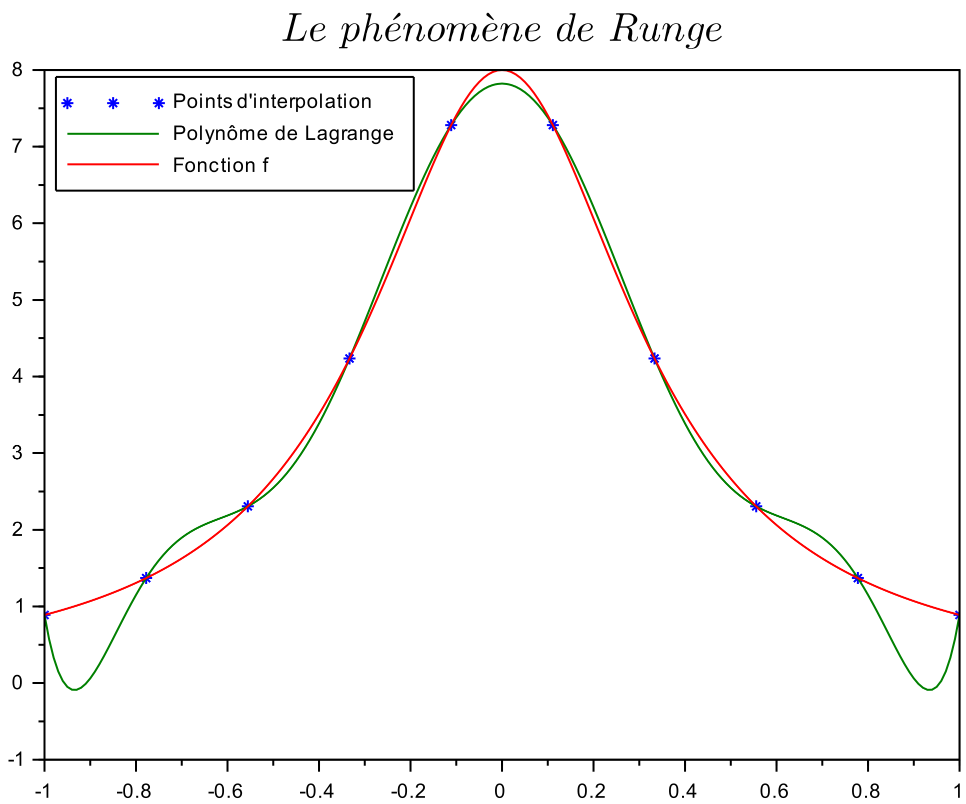


Figure 1 : Phénomène de Runge

Questions

Exercice : Démonstration formules de taylor + exo 6 p81 gouan

---

Solution :

Exercice : Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $x_0, ...x_n$ $n+1$ points distincts de $[a, b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, ...x_n$. On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.
Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

Convergence des méthodes de Newton-Cotes
Soit f une fonction Riemann intégrable sur un intervalle de discrétisation $[a, b]$. On se donne une famille de discrétisation de $[a, b]$

$$a = x_0^h < x_1^h < ... < x_N^h = b$$

de pas $h = \max\limits_{k=0,\dots,N} |x_{k+1}^h - x_k|$.
Soit $T_p^h(f)$ la formule de quadrature d'ordre p associée :

$$T_p^h(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1}^h - x_k^h)\sum_{i=0}^{p}\omega_i f(x_{i,k}^h)$$

Alors $T_p^h(f)$ converge vers $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ lorsque le pas h de la discrétisation tend vers zéro.
Erreur de quadrature
On note $T_{[a,b]}^{p,N}(f)$ la formule de quadrature d'ordre p, associée à la discrétisation de $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$:

$$T_{[a,b]}^{p,N}(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(x_{k+1} - x_k)\sum_{i=0}^{p}\omega_i f(x_{i,k})$$

Si f est une fonction de classe C^{p+1}, et si on note h le pas de la discrétisation $h = \max\limits_{k=0,\dots,N} |x_{k+1}^h - x_k|$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_{[a,b]}^{p,N}(f)\right| \leq C_p(b-a)h^{p+1}||f^{(p+1)}||_\infty$$

où C_p ne dépend que de p.

Solution :