Espaces de fonctions. Exemples et applications.

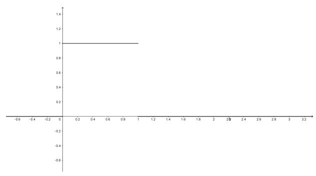
Mohamed NASSIRI

Espace fonctions continues sur un compact

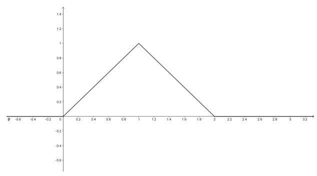
Après ces brefs rappels, nous attaquons les espaces L^p. Le choix a été fait de donner quelques résultats (*Inégalité de Hölder, Inégalité de Cauchy-Schwarz* et *Inégalité de Minkowski*) dans les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ et non les espaces $L^p(X)$. Le seul *théorème de Riesz-Fischer* est énoncé dans les espaces $^p(X)$.

La *convolution* est une notion importante dans les espaces L^p. Elle permet de "gagner de la régularité". En effet, afin de voir l'effet de la convolution sur une fonction f, prenons une fonction très simple et sans "une trop bonne régularité" : $f = \chi_{[0,1]}$. On peut montrer que l'on a

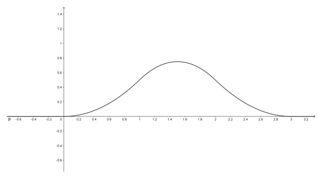
$$f * f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f * f * f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{-2x^2+6x-3}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{(3-x)^2}{2} & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Courbe de f



Courbe de $f * f$



Courbe de $f * f * f$

On peut montre que l'algèbre de Banach $(L^1(\mathbb{R}), +, ., *)$ n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution. C'est ce résultat qui va nous pousser à définir des *approximations de l'unité*. Ces dernières vont nous permettre d'obtenir un résultat sympathique : $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ et à support compact, est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Un résultat de dualité dans les espaces L^p mérite d'être mis en avant : *Théorème de représentation de Riesz*. Il nous dit que pour $1 \leq p < +\infty$, q son exposant conjugué, et $\varphi \in (L^p(X))'$. Alors il existe une unique $g \in L^q(X)$ telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in L^p(X) \quad \text{et on a} \quad ||\varphi||_{(L^p)'} = ||g||_q$$

Ce qui nous permet de faire l'identification $(L^p(X))' = L^q(X)$

L'espace L^2 est un espace L^p un peu spécial : c'est un espace de Hilbert. Il a un petit "plus" géométrique : orthogonalité, projection sur des sous-espaces, etc. Avec la notion de *base hilbertienne*, on obtient des résultats très intéressants. Une application aux séries de Fourier en est un bon exemple. Dans l'espace $L^2_{2\pi}$, en notant, $e_n(x) = e^{inx}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$, si bien que

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

Le "dans $L^2_{2\pi}$" est très important ! Cette relation n'est pas toujours vraie en l'appliquant en un point x ! En ajoutant la notion de *fonction poids*, on peut même construire des bases hilbertiennes dites *bases hilbertiennes des polynômes orthogonaux.*

Pour finir, les *espaces de Sobolev* offre une très belle application aux équations différentielles. Notre point de départ est le suivant : Soient $f \in L^2(]0,1[)$ et $q \in L^\infty(]0,1[)$ des fonctions à valeurs positives. On considère le problème

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions de classe $C^2([0,1])$ qui s'annule en 0 et 1 est équivalent à trouver une solution au problème

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

avec

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert. Le génie de cette méthode n'est pas de chercher des fonctions de "façon locale" mais un espace de fonctions, donc de "façon globale". Les espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ et $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ seront solutions :

Espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \Big\{ u \in C([0,1]) \mid \exists g \in L^2([0,1]), \; u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \Big\}$$

Espace de Sobolev $\mathcal{H}^1_0([0,1])$

$$\mathcal{H}^1_0([0,1]) = \{ u \in \mathcal{H}^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0 \}$$

Seul petit hic, on va devoir définir une nouvelle notion de "dérivée" : *dérivée faible*. Les fonctions solutions ne seront pas forcément de classe $C^2([0,1])$. Cependant, si f et q sont des fonctions continues, alors u est une fonction de classe $C^2([0,1])$. Ouf !

Références

[ROM] Elements d'analyse réelle, Jean-Etienne Rombaldi
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[FAR] Calcul intégral, Jacques Faraut
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[ELAM2] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amrani
[HUB2] Calcul scientifique : Tome 2, Florence Hubert et John Hubbard
[NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Théorème de Riesz-Fischer
Théorème de Weierstrass
Théorème de Féjer
Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < +\infty)$

1 Espace des fonctions continues sur un compact

1.1 Continuité et compacité

Proposition 1 *Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,δ) un espace métrique, et une application continue $f : E \to F$. Alors $f(E)$ est compact.* **[GOUan] p.31**

Remarque 2 *La réciproque est fausse !*

$$\sin^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{compact}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{pas\ compact}$$

Proposition 3 *Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ une application continue et bijective. Si (E,d) est compact, alors $f^{-1} : F \to E$ est continue.* **[GOUan] p.31**

Proposition 4 *Soit $f : (E,d) \to \mathbb{R}$ une application continue, avec (E,d) compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes.* **[GOUan] p.31**

Théorème 5 *Théorème de Heine*
Toute fonction f définie sur un intervalle réel fermé borné $[a,b]$ et continue, est uniformément continue sur $[a,b]$. **[ROM] p.51**

Proposition 6 *Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ périodique, et à valeurs réelles est uniformément continue.* **[ROM] p.52-53**

1.2 Convergence simple et convergence uniforme [ELAM] p.139 → 145

Dans cette section, X est un ensemble et $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

Définition 7 *Soient (f_n) une suite d'applications de X dans E et f une application de X dans E. On dit que (f_n) converge simplement vers f sur X si,*

$$(\forall x \in X)(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \Rightarrow (||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

On dit alors que f est la limite simple sur X de la suite de fonctions (f_n). On note parfois

$$P_n \xrightarrow{CVS} f$$

Exemple 8 *La suite de fonctions définies sur [0,1] par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [0,1[\\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Définition 9 *Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E et f une application de X dans E. On dit que la suite (f_n) converge unifomément vers f sur X si,*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) \Rightarrow (\forall x \in X, ||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

On dit alors que f est la limite uniforme sur X de la suite de fonctions (f_n). On note parfois

$$P_n \xrightarrow{CVU} f$$

Proposition 10 *Si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, alors elle converge simplement sur X vers f.*

Proposition 11 *(f_n) converge uniformément sur X vers f si et seulement si*

$$\sup_{x \in X} ||f_n(x) - f(x)|| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 12 *La suite de fonctions de l'exemple 2 ne converge pas uniformément vers f car*

$$\sup_{x \in [0,1]} ||x^n - f(x)|| = 1 \cancel{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Théorème 13 *Théorèmes de Dini*
1) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.
2) Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. Si f_n converge simplement vers une fonction f continue sur I, alors la convergence est uniforme.

Théorème 14 *Critère de Cauchy uniforme :*
Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E. Alors (f_n) converge uniformément si :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, p \geq N) \Rightarrow (\forall x \in X,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

Définition 15 *On note $\mathcal{B}(X,E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E muni de la norme de la convergence uniforme $||f||_\infty = \sup_{x \in X} ||f(x)||$.*

Proposition 16 *Une suite (f_n) de $\mathcal{B}(X,E)$ converge uniformément sur X vers $f \in \mathcal{B}(X,E)$ si et seulement si $||f_n - f||_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Théorème 17 *$(\mathcal{B}(X,E), ||.||_\infty)$ est complet.*

Proposition 18 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.*
(i) L'espace $\mathcal{C}_b(E,F)$ des applications continues bornées sur E est un fermé de $(\mathcal{B}(E,F), ||.||_\infty)$.
(ii) Si $(E, \mathcal{T})$ est compact, l'espace $\mathcal{C}_b(E,F)$ coïncide avec $\mathcal{C}(E,F)$ l'espace des applications continues sur E. **[ML3an] p.138**

1.3 Densité [ML3an] p.141 → 144

Proposition 19 *La suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} P_0 & = 0 \\ P_{n+1}(u) & = P_n(u) + \frac{1}{2}(u - P_n^2(u)) \quad \forall u \in [0,1] \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $u \mapsto \sqrt{u}$.

Théorème 20 *Théorème de Stone-Weierstrass (forme réelle)*
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x,y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 21 *Théorème de Stone-Weierstrass (forme complexe)*
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :
(i) Pour tout couple (x, y) de points de E vérifiant $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.
(ii) Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
(iii) Pour toute fonction f de $\mathcal{A}$, la fonction conjuguée $\overline{f}$ est dans $\mathcal{A}$.
Alors, $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 22 ♠ *Théorème de Weierstrass* ♠
Soit I un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. Alors f est limite uniforme sur I d'une suite de fonctions polynôme. **[GOUan] p.284 → 286**

Théorème 23 ♠ *Théorème de Féjer* ♠
En notant $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} S_N(f)$, on a
Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$||\sigma_N(f)||_\infty \leq ||f||_\infty, \text{ et}$$

$$\lim_{N \to +\infty} ||\sigma_N(f) - f||_\infty = 0$$

[ELAM2] p.185-186, 190-191

Remarque 24 *Les deux précédents théorèmes utilisent dans leur démonstration la convolution qui est définie plus loin.*

1.4 Compacité [ML3an] p.145 → 147

Dans cette section, (E, d_E) et (F, d_F) sont deux espaces métriques.

Définition 25 *Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace $\mathcal{C}(E, F)$ est dite équicontinue en un point $x \in E$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in E$ vérifiant $d_E(x, y) < \alpha$, l'inégalité $d_F(f(y), f(x)) < \epsilon$ soit vérifiée pour toute fonction $f \in \mathcal{A}$. La partie $\mathcal{A}$ est dite équicontinue sur E si elle est équicontinue en tout point x de E.*

Définition 26 *Soit A une partie de E.*
(i) On dit que A est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.
(ii) E est dit précompact, si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des boules de rayon ϵ. **[NEHH] p.120-124**

Exemple 27 *Toute partie finie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(E, F)$ est équicontinue sur E.*

Proposition 28 *Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E, F)$ est précompact, alors elle est équicontinue.*

Proposition 29 *On suppose que l'espace E est compact et on considère une partie $\mathcal{A}$ équicontinue de $\mathcal{C}(E, F)$. Alors, une suite (f_n) de $\mathcal{A}$ converge uniformément vers une fonction f de E dans F si et seulement si elle converge simplement vers f.*

Théorème 30 *Théorème d'Ascoli*
Soient (E, d_E) un espace métrique compact et (F, d_F) un espace métrique complet. On munit $\mathcal{C}(E, F)$ de la distance uniforme. Pour qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(E, F)$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ soit équicontinue et que, pour tout $x \in E$, la partie

$$\mathcal{A}_x = \{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$$

soit relativement compacte dans F.

Corollaire 31 *Soient E un espace compact et (f_n) une suite d'applications continues de E dans $\mathbb{R}^n$, muni de la distance euclidienne, telle que :*
(i) Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$.
(ii) La famille $\{f_n \ ; \ n \geq 0\}$ est équicontinue.
Alors la suite (f_n) possède une sous-suite convergente pour la topologie de la convergence uniforme.
[NEHH] p.209

2 Espaces $L^p(X)$ [ML3an] p.285 → 294

2.1 Espaces $\mathcal{L}^p(X)$ et premières propriétés

Définition 32 *Soit $0 < p < +\infty$. On note $\mathcal{L}^p(\mu)$, ou $\mathcal{L}^p(X)$, l'ensemble des fonctions f, mesurables de X dans $\mathbb{C}$, qui vérifient*

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{L}^p(X)$, on note

$$||f||_p = \left(\int_X |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

Définition 33 *(i) Soit f une fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Un majorant essentiel de f est un élément $m \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que l'ensemble $\{f > m\}$ soit négligeable. On notera $M(f)$ l'ensemble des majorants essentiels de f.*
(ii) Soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$. La borne inférieure m_0 de $M(f)$ est appelée borne supérieure essentielle de f et est notée $\mathrm{supess}(f)$.
(iii) Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ est dite essentiellement bornée, si $\mathrm{supess}|f| < \infty$. On note alors $||f||_\infty = \mathrm{supess}|f|$. L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{C}$ mesurables et essentiellement bornées est noté $\mathcal{L}^\infty(X)$.

Proposition 34 *Pour* $p \in]0,+\infty]$, *l'ensemble* $\mathcal{L}^p(X)$ *est un s.e.v. de l'espace des fonctions* $\mathcal{F}(X,\mathbb{C})$.

Proposition 35 *Si l'espace mesuré* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *est de mesure finie, les espaces* $\mathcal{L}^p(X)$ *sont décroissants (pour l'inclusion) avec l'exposant* p *(i.e.)*

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{p'}(X) \subset \mathcal{L}^p(X)$$

Proposition 36 *Si* I *est un ensemble quelconque d'indices, les espaces* $l^p(I)$ *sont croissants (pour l'inclusion) avec l'exposant* p *(i.e.)*

$$0 < p \leq p' \leq +\infty \quad \Rightarrow \quad l^p(X) \subset l^{p'}(X)$$

Définition 37 *On appelle couple d'exposants conjugués un couple* (p,q) *de réels strictement supérieurs à 1 qui vérifient*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On dit aussi que p *est l'exposant conjugué de* q.
Convention : L'exposant conjugué de 1 est $+\infty$.

Proposition 38 *Inégalité de Hölder*
Soient p *et* q *deux exposants conjugués, et* f *et* g *deux fonctions mesurables de* X *dans* $[0,+\infty]$. *Alors*

$$\int_X fg\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X g^q\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \leq +\infty$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ *et* δ, *non tous deux nuls, tels que l'égalité* $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ *ait lieu* μ*-presque partout.*

Corollaire 39 *Soient* p *et* q *deux exposants conjugués.*
Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ *et* $g \in \mathcal{L}^q(X)$, *alors le produit* fg *est dans* $\mathcal{L}^1(X)$, *et on a*

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ *et* δ, *non tous deux nuls, tels que l'égalité* $\gamma|f|^p = \delta|g|^q$ *ait lieu* μ*-presque partout.*

Corollaire 40 *Supposons que* $\mu(X) = 1$. *Alors, pour toute* f *mesurable et* $1 \leq p \leq q < +\infty$, *on a*

$$||f||_p \leq ||f||_q$$

Corollaire 41 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Si f *et* g *sont dans* $\mathcal{L}^2(X)$, *alors*

$$\left|\int_X f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu\right| \leq ||f||_p||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ *et* δ, *non tous deux nuls, tels que l'égalité* $\gamma f = \delta g$ *ait lieu* μ*-presque partout.*

Proposition 42 *Inégalité de Minkowski*
Soient f *et* g *deux fonctions mesurables de* X *dans* $[0,+\infty]$. *Alors, pour tout* $p \in [1,+\infty]$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Corollaire 43 *Pour tout* $p \in [1,+\infty]$, $||.||_p$ *est une semi-norme sur l'espace* $\mathcal{L}^p(X)$.

2.2 Construction des espaces $L^p(X)$ [ML3an] p.289 → 294

Définition 44 *Pour* $p \in [1,+\infty]$, *l'espace* $L^p(X)$ *est le quotient de l'espace* $\mathcal{L}^p(X)$ *par le noyau de la semi-norme* $||.||_p$

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathrm{Ker}||.||_p$$

Proposition 45 *Pour* $p \in [1,+\infty]$, *l'application*

$$\begin{aligned} L^p(X) &\to \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto ||f||_p \end{aligned}$$

est une norme sur $L^p(X)$.

Théorème 46 ♠ *Théorème de Riesz-Fischer* ♠
L^p *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.
[**BRZ**] **p.57**

2.3 Convolution et espaces $L^p(\mathbb{R})$ [FAR] p.113 → 124

Définition 47 *Soient* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *On appelle translatée de* f *par* a *la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tau_a f)(x) = f(x-a)$$

Proposition 48 *(i) Soient* $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq +\infty$, *alors* $\tau_a f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $||\tau_a f||_p = ||f||_p$.
(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, *alors* $\lim_{a\to 0}||\tau_a f - f||_p = 0$

Théorème 49 $L^1(\mathbb{R}) * L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ *:*
Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.
Pour presque tout x, *l'application* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable.*
La fonction $f*g$, *qui est définie presque partout par*

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

est intégrable, et

$$||f*g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$$

Théorème 50 $L^1(\mathbb{R}) * L^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ *:*
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
Pour presque tout x, *l'application* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *est intégrable.*
La fonction $f*g$, *qui est définie presque partout par*

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

appartient à $L^p(\mathbb{R})$, *et*

$$||f*g||_p \leq ||f||_1||g||_p$$

Théorème 51 $L^1(\mathbb{R}) * C_0(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $g \in C_0(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$.
La fonction $f * g$ *appartient à* $C_0(\mathbb{R})$, *et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_1 ||g||_\infty$$

Théorème 52 $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R}) \subseteq C_0(\mathbb{R})$:
Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.
La fonction $f * g$ *appartient à* $C_0(\mathbb{R})$, *et*

$$||f * g||_\infty \leq ||f||_2 ||g||_2$$

Proposition 53 *L'algèbre de Banach* $(L^1(\mathbb{R}), +, ., *)$ *n'a pas d'élément neutre pour le produit de convolution.* **[ELAM2] p.85**

Définition 54 *On appelle approximation de l'unité dans* $L^1(\mathbb{R})$ *toute suite* $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ *de fonctions mesurables positives sur* $\mathbb{R}$ *telles que*

$$(i)\ \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 1$$

$$(ii)\ \forall \epsilon > 0, \quad \lim_{j \to +\infty} \int_{|x|>\epsilon} \varphi_j(x)\mathrm{d}x = 0$$

[ELAM2] p.86

Exemple 55

$$\begin{aligned}
\textit{Approximation de Laplace} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|} \\
\textit{Approximation de Cauchy} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1 + j^2 x^2} \\
\textit{Approximation de Gauss} &: \quad \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{j^2 x^2}{2}}
\end{aligned}$$

[ELAM2] p.86

Théorème 56 *Théorème d'approximation*
Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ *une approximation de l'unité dans* $L^1(\mathbb{R})$.
(i) Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ *et bornée, alors* $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ *converge uniformément vers f sur* $\mathbb{R}$.
(ii) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, *alors* $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ *converge vers f dans* $L^p(\mathbb{R})$. **[ELAM2] p.87**

Proposition 57 *(i) Soient* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, *alors* $f * \varphi \in C^1(\mathbb{R})$ *et*

$$(f * \varphi)' = f * \varphi'$$

(ii) Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, *alors* $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$(f * \varphi)^{(n)} = f * \varphi^{(n)}$$

[FAR] p.123-124

Théorème 58 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. **[FAR] p.125**

2.4 Dualité dans les espaces $L^p(X)$ [BRZ] p.61 → 66

Définition 59 *Soit E un e.v.n. de norme* $||.||$. *On désigne par E' le dual (topologique) de E (i.e.) l'espace des formes linéaires et continues sur E.*
E' est muni de la norme duale

$$||f||_{E'} = \sup_{\substack{x \in E \\ ||x|| \leq 1}} |f(x)|$$

Lorsque $f \in E'$ *et* $x \in E$, *on notera généralement* $\langle f, x \rangle$ *au lieu de* $f(x)$. *On dit que* $\langle ., . \rangle$ *est le produit scalaire dans la dualité E',E.*

Théorème 60 *Théorème de représentation de Riesz*
Soient $1 \leq p < +\infty$, *q son exposant conjugué, et* $\varphi \in (L^p(X))'$. *Alors il existe une unique* $g \in L^q(X)$ *telle que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f \mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in L^p(X)$$

De plus, on a

$$||\varphi||_{(L^p)'} = ||g||_q$$

Remarque 61 *Pour* $1 \leq p < +\infty$, *on fait souvent l'identification*

$$(L^p(X))' = L^q(X)$$

Ce théorème est faux pour $p = +\infty$. *On peut montrer que*

$$L^1(X) \subsetneq (L^\infty(X))'$$

3 Espace $L^2(X)$

3.1 Propriétés hilbertiennes de $L^2(X)$

Proposition 62 *(i) La norme sur* $L^2(X)$ *associé au produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu$$

est

$$||f||_2 = \left(\int_X |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

(ii) $(L^2(X), ||.||_2)$ *est un espace de Hilbert.* **[ML3an] p.323 → 325**

Théorème 63 *Théorème de représentation de Riesz-Fréchet*
Soit $\varphi \in (L^2(X))'$. *Alors il existe une unique* $g \in L^2(X)$ *telle que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X g f \mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in L^2(X)$$

De plus, on a $||\varphi||_{(L^2)'} = ||g||_2$.
Autrement dit, on a

$$(L^2(X))' = L^2(X)$$

3.2 Application aux séries de Fourier

Définition-Proposition-Rappels 64 *(i)* $L^2_{2\pi}$, *l'ensemble des fonctions de* L^2 *et* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{C}$*, muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

est un espace de Hilbert. **[ELAM2] p.170 → 194**
(ii) Soit $(H, \langle.,.\rangle)$ *un espace de Hilbert. Une famille* $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ *de vecteurs de* H *est dite*
1) orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ *pour tous* $i, j \in I$ *tels que* $i \neq j$
2) orthonormée si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ *(où* δ_{ij} *est le symbole de Kronecker)*
3) totale si $\mathrm{vect}((e_i)_{i\in I})$ *est dense dans* H*.*
On appelle base hilbertienne de H *une famille orthonormée totale de vecteurs de* H*.* **[ML3an] p.331**
(iii) 1) Toute famille orthormée est libre
2) $(e_i)_{i\in\mathbb{I}}$ *est une famille totale si et seulement si la condition* $(\langle x, e_i\rangle = 0$ *pour tout* $i \in I)$ *implique* $x = 0$. **[ML3an] p.331**

Théorème 65 *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, on désigne par* e_n *l'application définie par*

$$e_n(x) = e^{inx}$$

Le système trigonométrique $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* $L^2_{2\pi}$*.*

Définition 66 *Soient* $f \in L^1_{2\pi}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe* $c_n(f)$ *donné par*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x$$

Soit $f \in L^1_{2\pi}$*. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique (formelle)* $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$*, où* $c_n(f)$ *sont les coefficients de Fourier de* f*.*

Théorème 67 *Formule de Parseval*
Si $f \in L^2_{2\pi}$*, alors*
1) $(S_N(f))$ *converge vers* f *en moyenne quadratique :*

$$\lim_{N\to+\infty} ||\sigma_N(f) - f||_2 = 0,$$

(i.e.)

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n \text{ dans } L^2_{2\pi}$$

2) On a la formule de Parseval

$$||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

3.3 Polynômes orthogonaux

Définition 68 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On appelle fonction poids une fonction* $\rho : I \to R$ *mesurable, strictement positive et telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

On note $L^2(I,\rho)$ *l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité* ρ *par rapport à la mesure de Lebesgue.* **[OBJ] p.110**

Théorème 69 ♠ *Base hilbertienne des polynômes orthogonaux* ♠ *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* ρ *une fonction poids. S'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ *forme une base hilbertienne de* $L^2(I,\rho)$ *pour la norme* $||.||_\rho$*.* **[OBJ] p.140 → 143**

4 Espaces de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ et $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ [HUB2] p.111 → 122

Motivation 70 *Soient* $f \in L^2(]0,1[)$ *et* $q \in L^\infty(]0,1[)$ *des fonctions à valeurs positives. On considère le problème*

$$(\dagger) \quad \begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver une solution dans l'espace $\mathcal{H}$ *des fonctions de classe* $C^2([0,1])$ *qui s'annule en* 0 *et* 1 *est équivalent à trouver une solution au problème*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

où
a est une forme bilinéaire symétrique définie par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

et L est une forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_0^1 f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Le théorème de Riesz permet de résoudre de tels problèmes lorsque l'espace $\mathcal{H}$ *est un espace de Hilbert.*

Définition 71 *On appelle espace de Sobolev* $\mathcal{H}^1([0,1])$*, l'espace de fonctions défini, sur l'intervalle* $[0,1]$ *par*

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \Big\{u \in C([0,1]) \mid \exists g \in L^2([0,1]), \\ u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t\Big\}$$

On appelle espace de Sobolev $\mathcal{H}_0^1([0,1])$, le sous-espace de $\mathcal{H}^1([0,1])$ défini par

$$\mathcal{H}_0^1([0,1]) = \{u \in \mathcal{H}^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

Remarque 72 *Cette définition est propre à la dimension 1.*

Proposition 73 *Soit $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, il existe une unique fonction $g \in L^2([0,1])$ telle que*

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

Définition 74 *La fonction g est alors notée Du et est appelée dérivée faible de u.*

Remarque 75 *Si $u \in C^1([0,1])$, alors $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, et $Du = u'$.*

Remarque 76 *Soit $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, alors pour toute fonction $\phi \in C_c^1([0,1])$,*

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 Du(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

Et réciproquement, si $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$ et qu'il existe $g \in L^2([0,1])$ telle que pour toute fonction $\Phi \in C_c^1([0,1])$,

$$\int_0^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

alors $g = Du$.

Proposition 77 *(i) L'application ϕ définie par*

$$\phi(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 Du(t)Dv(t)\mathrm{d}t$$

pour tout $u, v \in L^2([0,1])$, est un produit scalaire sur $\mathcal{H}^1([0,1])$. On le notera $\langle .,. \rangle$.
(ii) Muni de la norme (associé au produit scalaire) :

$$||u||_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathcal{H}^1([0,1])$ est un espace de Hilbert.

Proposition 78 *Les fonctions de l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ sont höldériennes de rapport $\frac{1}{2}$: pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$*

$$|u(x) - u(y)| \leq ||Du||_{L^2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

où $||.||_{L^2}$ désigne la norme dans l'espace $L^2([0,1])$. De plus, l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon continue dans l'espace $C([0,1])$ /

$$||u||_\infty \leq \sqrt{2}||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Proposition 79 *L'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon compacte dans les espaces $C([0,1])$ et $L^2([0,1])$.*

Remarque 80 *L'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ coïncide avec l'espace*

$$\{u \in L^2([0,1]) \mid Du \in L^2([0,1])\}$$

où Du est la dérivée faible de u.

Proposition 81 *L'espace $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1([0,1])$, c'est donc un espace de Hilbert réel.*

Lemme 82 *Inégalité de Poincaré*
Soit $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a

$$\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t$$

Corollaire 83 *L'application $u \mapsto ||Du||_{L^2}$ définit sur $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ une norme. Cette norme est équivalente à la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$: pour tout $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a*

$$\sqrt{\frac{2}{3}}||u||_{\mathcal{H}^1} \leq ||Du||_{L^2} \leq ||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Définition 84 *Lorsque $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$ est solution du problème $a(u,v) = L(v)$ issu de (†), u est dite solution faible ou une solution variationnelle de (†).*

Théorème 85 *On se donne $f \in L^2([0,1])$ et $q \in L^\infty([0,1])$ avec $q(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in [0,1]$. Alors le problème variationnel*

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$.
Si, de plus, f et q sont des fonctions continues, alors u est une fonction de classe $C^2([0,1])$ qui vérifie

$$\begin{cases} -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Remarque 86 *Si la forme bilinéaire a n'est plus symétrique, on utilisera le théorème de Lax-Milgram.*

Théorème 87 *Théorème de Lax-Milgram*
Soit V un espace de Hilbert. On considère a une forme bilinéaire continue coercive sur $V \times V$ et L une forme linéaire sur V.
Alors il existe un unique $u \in V$ tel que $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

Exercice : Théorème de Heine
1) Soit f une application continue de l'espace métrique compact (E, d) dans l'espace métrique (F, δ). Alors f est uniformément continue.
2) Montrer que toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ périodique, et à valeurs complexes est uniformément continue.

Solution : 1) Nous allons nier la continuité uniforme de f. On a donc

$$(\exists \epsilon > 0)(\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \text{ tel que } d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0)(\forall n \geq N) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N})(\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon)$$

Comme E est compact, il existe une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a. Comme $d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a.
Et puisque f est continue en a, alors les suites $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(a)$. Ce qui est absurde puisque que l'on a supposé que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$.

2) Supposons que la fonction f est T-périodique, avec $T > 0$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la question précédente, f est uniformément continue sur le segment $[-T, 2T]$ (Oui, il faut déborder un peu du segment de période ...)
Il existe $\alpha > 0$ (que l'on peut supposer inférieur à T) tel que

$$\forall x, y \in [-T, 2T],\ |x - y| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad (\dagger)$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha < T$, on a donc

$$x - T < y < x + T$$

On peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x - nT$ et $y - nT$ soient tous les deux dans le segment $[-T, 2T]$. En effet, en prenant

$$-2 < n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{T} - 2 < n < 1 + \frac{x}{T} \quad \Leftrightarrow \quad -T < x - nT < 2T$$

Et comme $x - T < y < x + T$, on en déduit également que $-T < y - nT < 2T$.
Ainsi, $(\dagger)$ et la périodicité de f nous donne $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

Exercice : Soient X un espace compact, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans Y.
1) Montrer que si $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f, alors elle converge uniformément vers f et que, de plus, f est continue.
2) La compacité de X est-elle nécessaire ?

Solution : Soit $x_0 \in X$. Montrons d'abord que f est continue en x_0.
Soit $\epsilon > 0$, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tel que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \epsilon$$

Par passage à la limite, on a

$$d(f(x), f(x_0)) = \lim_{n\to+\infty} d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \epsilon$$

Ainsi, f est continue en x_0. Comme x_0 est arbitraire dans E, alors f est continue sur E.

Montrons la convergence uniforme. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue et f est continue, alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_x$ de x dans X tel que pour $z \in \mathcal{U}_x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$d(f_n(x), f_n(z)) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad d(f(x), f(z)) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Comme X est compact, il existe un sous-ensemble fini $\{x_1, ..., x_p\}$ de X tel que

$$X = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{U}_{x_i}$$

De plus, comme pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, la suite $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_i)$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$d(f_n(x_i), f(x_i)) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Soit maintenant $x \in X$. Alors il existe x_i tel que $x \in \mathcal{U}_{x_i}$. Donc on a

$$d(f_n(x), f(x)) \leq d(f_n(x_i), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Ainsi, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

2) Oui ! Prenons la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2}$$

On peut montrer que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ et que la famille $\{f_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue. Mais il n'y a pas convergence uniforme puisque

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$$

$\rightarrow$ La convergence simple est immédiate.
$\rightarrow$ Pour l'équicontinuité, donnons quelques explications.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_n'(x) = -\frac{2(x-n)}{(1+(x-n)^2)^2}$$

Or,

$$(1+(x-n)^2)^2 = 1 + 2(x-n) + (x-n)^4 \geq 2(x-n)$$

Ce qui implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f_n'(x)| \leq 1$$

Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, on obtient que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y|$$

Soit $\epsilon > 0$, en prenant $\alpha = \epsilon$ tel que pour $|x-y| < \alpha$, on obtient bien

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Remarque : Ce résultat est encore valable s'il existe $k > 0$ tel que $|f_n'(x)| \leq k$. Il suffit de poser $\alpha = \epsilon/k$.

$\rightarrow$ Pour montrer que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$, il suffit de remarquer que

$$f_n'(x) = -\frac{2(x-n)}{(1+(x-n)^2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = n$$

Puis qu'en $x = n$, $f_n(x) = 1$.

Exercice : Propriétés fondamentales de l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$
On rappelle que l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ est l'espace de fonctions définies, sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\mathcal{H}^1([0,1]) = \left\{ u \in C([0,1]) \mid \exists g \in L^2([0,1]),\ u(x) = u(0) + \int_0^x Du(t)\mathrm{d}t \right\}$$

où Du est la dérivée faible de u, et que l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ est le sous-espace de $\mathcal{H}^1([0,1])$ défini par

$$\mathcal{H}^1_0([0,1]) = \{u \in \mathcal{H}^1([0,1]) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

On munit de la norme $\mathcal{H}^1([0,1])$:

$$||u||_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^1 |Du(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

1) Montrer que les fonctions de l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ sont höldériennes de rapport $\frac{1}{2}$: pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$

$$|u(x) - u(y)| \leq ||Du||_{L^2} |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

où $||.||_{L^2}$ désigne la norme dans l'espace $L^2([0,1])$.
2) Montrer que l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon continue dans l'espace $C([0,1])$:

$$||u||_\infty \leq \sqrt{2} ||u||_{\mathcal{H}^1}$$

3) Montrer que l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1([0,1])$ s'injecte de façon compacte dans les espaces $C([0,1])$ et $L^2([0,1])$.
4) Montrer que l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ est un espace de Hilbert et que l'espace $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1([0,1])$ (c'est donc un espace de Hilbert réel).
5)*Inégalité de Poincaré* Soit $u \in \mathcal{H}^1_0([0,1])$. Montrer que

$$\int_0^1 |u(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |Du(t)|^2 \mathrm{d}t$$

En déduire que l'application $u \mapsto ||Du||_{L^2}$ définit sur $\mathcal{H}^1_0([0,1])$ une norme. Cette norme est équivalente à la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$: pour tout $u \in \mathcal{H}^1_0([0,1])$, on a

$$\sqrt{\frac{2}{3}} ||u||_{\mathcal{H}^1} \leq ||Du||_{L^2} \leq ||u||_{\mathcal{H}^1}$$

Solution : 1) Soit $x, y \in [0,1]$, on a

$$u(y) - u(x) = \int_x^y Du(t)\mathrm{d}t$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2[0,1]$ nous donne

$$|u(y) - u(x)| \leq |y-x|^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y |Du(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \leq |y-x|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |Du(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où le résultat.

2) 1) Soit $x, y \in [0,1]$, on a

$$u(y) = u(x) + \int_x^y Du(t)\mathrm{d}t$$

Par suite, on a

$$
\begin{aligned}
u(y)^2 &= \left(u(x) + \int_x^y Du(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\leq 2u^2(x) + 2\left(\int_x^y Du(t)\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\leq 2u^2(x) + 2\int_0^1 (Du(t))^2\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Puis, en intégrant cette inégalité par rapport à x entre 0 et 1, on obtient que pour tout $y \in [0,1]$

$$u(y)^2 \leq 2||u||_{\mathcal{H}^1}^2$$

Par passage au supremum sur $y \in [0,1]$, on obtient

$$||u||_\infty \leq \sqrt{2}||u||_{\mathcal{H}^1}$$

3) Montrons que de toute suite bornée de $\mathcal{H}^1([0,1])$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $C([0,1])$. De plus, une suite converge dans $C([0,1])$, converge *a fortiori* dans $L^2([0,1])$.

Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathcal{H}^1([0,1])$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||u||_{\mathcal{H}^1} = \left(\int_0^1 |u(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Du_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $L^2([0,1])$, et par la question 1), on a

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Par ailleurs, par la question 2), on a

$$|u(x)|^2 \leq 2||u||_{\mathcal{H}^1}^2 \leq 2C^2$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C([0,1])$. Par le théorème d'Ascoli, elle admet une sous-suite convergente dans $C([0,1])$.

4) *Montrer que l'espace $\mathcal{H}^1([0,1])$ est un espace de Hilbert :*

Il suffit de montrer que toute suite de Cauchy de $\mathcal{H}^1([0,1])$ converge dans $\mathcal{H}^1([0,1])$. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^1([0,1])$. Alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Du_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $L^2([0,1])$ qui est un espace de Hilbert. Ainsi, il existe deux fonctions u et g dans $L^2([0,1])$ telles que :

$$
\begin{cases}
u_n & \to u \text{ dans } L^2([0,1]) \\
Du_n & \to g \text{ dans } L^2([0,1])
\end{cases}
$$

D'après la question précédente, il existe une fonction $v \in C([0,1])$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers v :

$$u_{\varphi(n)} \to v \text{ dans } C([0,1])$$

En particulier,

$$u_{\varphi(n)} \to v \text{ dans } L^2([0,1])$$

Autrement dit $u = v$ et $u \in C([0,1])$. De plus, on a

$$u_{\varphi(n)}(x) = u_{\varphi(n)}(0) + \int_0^x Du_{\varphi(n)}(t)\mathrm{d}t = u_{\varphi(n)}(0) + \int_0^1 \chi_{[0,x]}Du_{\varphi(n)}(t)\mathrm{d}t$$

Par passage à la limite dans cette égalité, on a, pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(x) = u(0) + \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

On déduit donc que $u \in \mathcal{H}^1([0,1])$, que $Du = g$ et finalement que u_n converge vers u dans $\mathcal{H}^1([0,1])$.

Montrer que l'espace $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ muni de la norme $||.||_{\mathcal{H}^1}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1([0,1])$:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}_0^1([0,1])$ qui converge dans $\mathcal{H}^1([0,1])$. Il suffit de montrer que $u(0) = u(1) = 0$. D'après la question 3), il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers u. En particulier,

$$0 = u_{\varphi(n)}(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(0) \quad \text{et} \quad 0 = u_{\varphi(n)}(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(1)$$

D'où le résultat.

5) Soit $u \in \mathcal{H}_0^1([0,1])$, on a

$$u(x) = \int_0^x Du(t)\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad |u(x)|^2 = \left|\int_0^x Du(t)\mathrm{d}t\right|^2$$

En intégrant cette dernière égalité par rapport à x entre 0 et 1, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u(x)|^2\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left|\int_0^x Du(t)\mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^1 x \int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 |Du(t)|^2\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Il suffit de montrer l'encadrement de $||Du||_{L^2}$. D'une part, on

$$||u||_{\mathcal{H}^1}^2 = ||Du||_{L^2}^2 + ||u||_{L^2}^2 \geq ||Du||_{L^2}^2$$

D'autre part, par l'inégalité de Poincaré, on a

$$||u||_{\mathcal{H}^1}^2 \leq ||Du||_{L^2}^2 + \frac{1}{2}||Du||_{L^2}^2$$

D'où le résultat.