Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Mohamed NASSIRI

La convexité est une notion topologique qui caractérise le fait que pour deux points A et B d'un ensemble, tous les points du segments $[AB]$ appartiennent à l'ensemble.

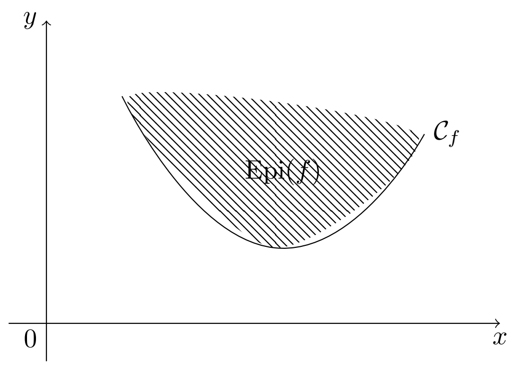
Puis, si par malheur notre ensemble n'est pas convexe, on peut toujours *en faire un convexe* grâce à la notion d'*enveloppe convexe*. Cette notion n'est pas sans applications : le théorème de Gauss-Lucas nous dit que pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P. On a également le théorème de Carathéodory qui nous dit que dans un espace E de dimension n, tout point de l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset E$ est barycentre à coefficients positifs de moins de $n+1$ points de A.

On définit également les *fonctions convexes* comme suit :

$f : I \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si* $\forall a, b \in I,\ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Le lien avec les parties convexes est le suivant : une fonction f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe.
On peut également une notion plus forte de convexité : on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est *logarithmiquement convexe* si la fonction $\log f$ est convexe.



Les fonctions convexes (et concaves) nous permettent d'avoir des inégalités dites *de convexité*. En plus de l'inégalité arithmético-géométrique, on retrouve notamment :

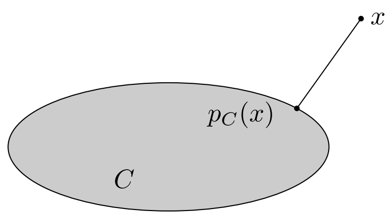
Inégalité de Hölder
Soient p et q deux exposants conjugués. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

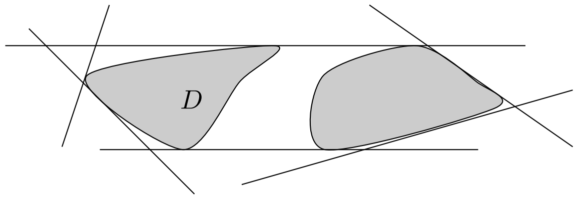
Inégalité de Minkowski
Soient $p \geq 1$ un nombre réel. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

La convexité a une forte application à l'optimisation. Par exemple, dans les espaces de Hilbert, la théorème de projection sur un convexe fermé en est un très bon exemple.



Le théorème de Hahn-Banach géométrique est également un bon exemple d'application de la convexité. On cherche en effet à séparer des convexes disjoints par un hyperplan et ce théorème nous dit que c'est possible avec un peu de "fermé" et de "compact". Une des applications de ce théorème et qui nous fait revenir aux enveloppes convexes est le résultat suivant : l'enveloppe convexe fermé d'une partie D est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent D.



En revenant aux fonctions convexes, l'algorithme du gradient à pas optimal offre une belle application de la convexité en analyse numérique. A partir d'une matrice A symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$, on peut alors les problèmes suivant sont équivalents

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$

Trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$
avec $f(y) = \langle Ay, y\rangle - \langle b, y\rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$

On peut donc montrer que pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k\rangle} \end{cases}$$

appelé *méthode du gradient à pas optimal* est convergent.

Références

[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠
[BRZ] Analyse fonctionnelle : théorie et applications, Haïm Brezis ♠
[FGNal1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas

Développements

Théorème de Gauss-Lucas
Projection sur un convexe fermé
Méthode du gradient à pas optimal

1 Parties et fonctions convexes

1.1 Parties convexes [GOUan] p.51 → 55

Dans cette partie, E un $\mathbb{K}$-e.v. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1 *Soient $A, B \in E$. On appelle segment d'extrémités A et B, et on note $[A, B]$, l'ensemble*

$$\{\lambda A + (1 - \lambda)B \ , \ \lambda \in [0, 1]\}$$

Remarque 2 *Dans un e.v.n., un segment est fermé.*

Définition 3 *Soit C une partie de E. On dit que C est convexe si pour tout $(A, B) \in C^2$, $[A, B] \subset C$.*

Exemple 4 - *Un s.e.v. est convexe.*
- *Une partie convexe est connexe par lignes brisées donc connexe.*

Proposition 5 *Soit C un convexe d'un e.v.n. E, alors $\overline{C}$ et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.*

Proposition 6 *Soit K un compact convexe d'un e.v.n. et $f : K \to K$ une application continue telle que*

$$\forall (x, y) \in K^2, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq ||x - y||$$

Alors f admet au moins un point fixe.

Définition 7 *Une partie A de E est dite étoilée s'il existe $P \in A$ tel que $[P, M] \subset A$ pour tout $M \in A$. On dit alors que A est étoilée par rapport à P et P s'appelle un centre de A.*

Définition 8 *Soit A une partie de E. Il existe une plus petite partie convexe de E contenant A. On l'appelle enveloppe convexe de A et on la note* $\mathrm{Conv}(A)$

1.2 Enveloppe convexe

Définition 9 *Soit A une partie non vide de E. Le convexe*

$$\begin{aligned} Conv(A) &= \bigcap_{\substack{\mathcal{C} \text{ convexe} \\ \mathcal{A} \subset \mathcal{C}}} \mathcal{C} \\ &= \mathrm{Min}\{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ convexe et } A \subset \mathcal{C}\} \end{aligned}$$

où le minimum est considéré pour la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{P}(E)$.

Théorème 10 *L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A.*

Application 11 • *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.*
• *Le plus grand entier n tel que les racines non nulles de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1 est 7.*
• *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. On suppose que P' a une racine dans H_1. Alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.*

Théorème 12 *Théorème de Carathéodory :*
Si $\dim E = n$ alors tout point de l'enveloppe convexe de A est barycentre à coefficients positifs de moins de $n+1$ points de A.

Corollaire 13 *Dans un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

1.3 Fonctions convexes

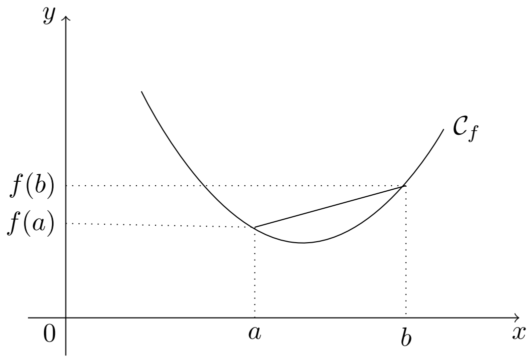
Dans cette partie, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 14 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si*
$\forall a, b \in I, \ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$f[(1-\lambda)a + \lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$$

Elle est dite concave -f est convexe.
Lorsque l'inégalité est stricte pour $\lambda \in]0,1[$, on dit que f est strictement convexe.

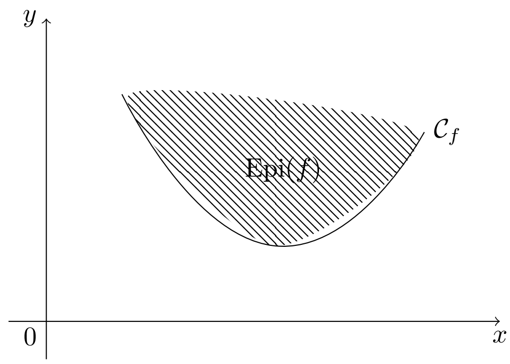
Remarque 15 *L'inégalité de convexité dans la définition se traduit graphiquement par le fait que tous les points du segment $[(a, f(a)), (b, f(b))]$ sont au dessus du graphe de f.*



Définition 16 *On appelle épigraphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$\mathrm{Epi}(f) := \{(x,y) \in I \mid y \geq f(x)\}$$

Proposition 17 *La fonction f est convexe si et seulement si l'épigraphe de f est convexe.*



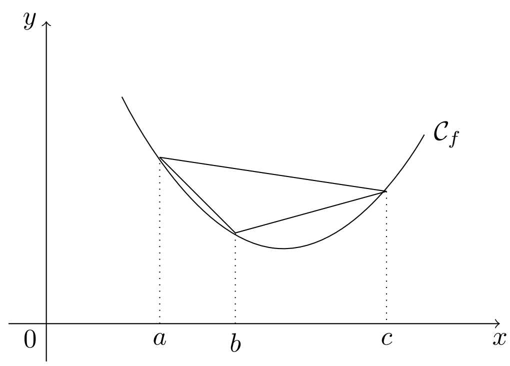
Proposition 18 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, l'application*

$$\begin{aligned} g_{x_0} : I \backslash \{x_0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

est croissante.

Corollaire 19 *Inégalité des trois pentes*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe et $a, b, c \in I$ tel que $a < b < c$. Alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$



Proposition 20 *Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$ (pas forcément aux bornes de I). De plus, les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $f'g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \mathring{I}$.*

Théorème 21 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est convexe.
(ii) f' est croissante.
(iii) La courbe représentative de f est au dessus de ses tangentes.

Corollaire 22 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Proposition 23 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors, $\forall x_1, ..., x_n \in I$, $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n > 0$*

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}$$

1.4 Fonctions logarithmiquement convexes [GOUan] p.101-102

Définition 24 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est logarithmiquement convexe si la fonction $\log f$ est convexe.*

Proposition 25 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une application.*
Si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

Proposition 26 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une application.*
f est logarithmiquement convexe si et seulement si l'application $I \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.

Corollaire 27 *Si f et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ sont logarithmiquement convexes, alors $f + g$ aussi.*

2 Inégalités de convexité

2.1 Les classiques

Théorème 28 *Inégalité arithmético-géométrique*
Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres réels positifs. On a

$$(x_1 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}$$

Corollaire 29 *Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors*

$$(\det A)^{1/n} \leq \frac{\mathrm{tr} A}{n}$$

2.2 Inégalités de Jensen, de Hölder et Minkowski

2.2.1 Dans le cas discret [GOUan] p.95-96

Définition 30 *On appelle couple d'exposants conjugués un couple (p, q) de réels strictement supérieurs à 1 qui vérifient*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On dit aussi que p est l'exposant conjugué de q.
Convention : L'exposant conjugué de 1 est $+\infty$.
[ML3an] p.287

Proposition 31 *Inégalité de Jensen*
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout n-uplet $(x_1,..., x_n)$ de I et tout n-uplet $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ de $[0, 1]$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

[DTZ] p.127-128

Proposition 32 *Inégalité de Hölder*
Soient p et q deux exposants conjugués. Pour tout nombres réels positifs $a_1,..., a_n$ et $b_1,..., b_n$, on a

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

Proposition 33 *Inégalité de Minkowski*
Soient $p \geq 1$ un nombre réel. Pour tout nombres réels positifs $a_1,..., a_n$ et $b_1,..., b_n$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

2.2.2 Dans les espaces L^p [ML3an] p.287 → 289

Proposition 34 *Inégalité de Hölder*
Soient p et q deux exposants conjugués, et f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors

$$\int_X fg \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \leq +\infty$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu μ-presque partout.

Corollaire 35 *Soient p et q deux exposants conjugués.*
Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^q(X)$, alors le produit fg est dans $L^1(X)$, et on a

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma|f|^p = \delta|g|^q$ ait lieu μ-presque partout.

 CC BY NC SA

Corollaire 36 *Supposons que $\mu(X) = 1$. Alors, pour toute f mesurable et $1 \leq p \leq q < +\infty$, on a*

$$||f||_p \leq ||f||_q$$

Corollaire 37 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Si f et g sont dans $L^2(X)$, alors

$$\left|\int_X f\overline{g}\mathrm{d}\mu\right| \leq ||f||_p||g||_q$$

L'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f = \delta g$ ait lieu μ-presque partout.

Proposition 38 *Inégalité de Minkowski*
Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Proposition 39 *Inégalité de Jensen*
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to]a, b[$ une fonction de $L^1(X)$. Alors, si φ est une fonction convexe sur $]a, b[$, on a

$$\varphi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)\mathrm{d}\mu$$

[ML3an] p.878

3 Applications à l'optimisation

3.1 Projection sur un convexe fermé [BRZ] p.79-80

Théorème 40 ♠ *Projection sur un convexe fermé* ♠ *Soient H un espace de Hilbert réel et $K \subset H$ un convexe fermé non vide.*
Alors $\forall x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$||x-u|| = \min_{y \in K}||x-y|| \qquad (i)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

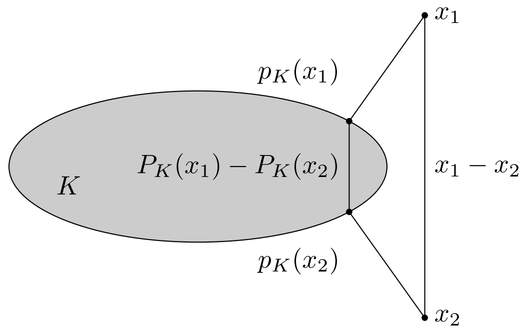
$$u \in K \quad \text{et} \quad \langle x-u, y-u\rangle \leq 0 \ \forall y \in K \qquad (ii)$$

Le point $u \in K$ est appelé projeté orthogonal de x sur K et est noté $p_K(x)$.

Corollaire 41 *En notant, $P_K(x_1)$ la projection de x_1 sur K et de même pour x_2, on a :*

$$\forall x_1, x_2 \in K, \quad ||P_K(x_1) - P_K(x_2)|| \leq ||x_1 - x_2||$$

Remarque 42 *Sur un dessin, le résultat est évident.*



Théorème 43 *Projection sur un sous-espace fermé Soient K un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H et $x \in H$. Alors pour tout $y \in H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $y \in p_K(x)$
2) $y \in K$ et $(x-y) \in K^\perp$

3.2 Méthode de gradient [DIM] p.208 → 212

Théorème 44 *Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes*

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$
$$\text{avec } f(y) = \langle Ay, y\rangle - \langle b, y\rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sont équivalents.

Définition 45 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k\rangle} \end{cases}$$

est appelé méthode du gradient à pas optimal.

Théorème 46 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 47 ♠ *Inégalité de Kantorovitch* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}||x||^4$$

4 Théorème de Hahn-Banach géométrique [OBJ] p.97-133

Définition 48 *Soit $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert.*
Un hyperplan est un ensemble de la forme

$$\mathcal{P} = \{x \in H \mid f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire sur H non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que $\mathcal{P}$ est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

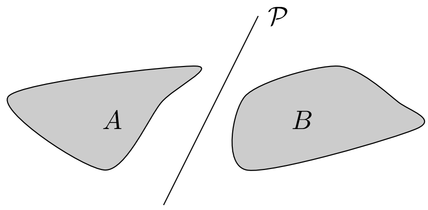
[BRZ] p.4

Définition 49 *Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $A \subset H$ et $B \subset H$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si l'on a*

$$f(x) \leq \alpha,\ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha,\ \forall x \in B$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\epsilon > 0$ tel que

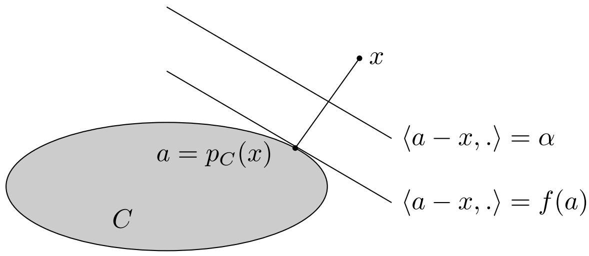
$$f(x) \leq \alpha - \epsilon,\ \forall x \in A \quad \text{et} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon,\ \forall x \in B$$



[BRZ] p.5

Proposition 50 *Soient $(H, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $C \subset H$ une partie non vide convexe et fermé et $x \notin H$.*
On note H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H.
Alors, il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in C, \quad f(x) < \alpha < f(y)$$



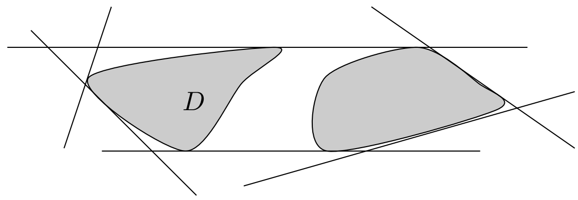
Théorème 51 *Théorème de Hahn-Banach géométrique*
Soient A et B deux convexes non vides disjoints de H. On suppose que A est fermé et B est compact. Alors, il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B (i.e.) qu'il existe $f \in H'$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

Corollaire 52 *Soit D une partie de H. Pour $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $H(f, \alpha)$ le demi-espace*

$$H(f, \alpha) = \{y \in H \mid f(y) \leq \alpha\}$$

Alors, l'enveloppe convexe fermé de D est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent D.



Exercice : Inégalités de Jensen, de Hölder et de Minkowski
Dans le cas discret
1) Inégalité de Jensen Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout n-uplet (x_1,..., x_n) de I et tout n-uplet (λ_1,...,λ_n) de $[0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

2) Inégalité de Hölder Soient p et q deux exposants conjugués. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

3) Inégalité de Minkowski Soient $p \geq 1$ un nombre réel. Pour tout nombres réels positifs a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

Dans les espaces L^p
4) Inégalité de Jensen Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$ et $f : X \to]a,b[$ une fonction de $L^1(X)$. Alors, si φ est une fonction convexe sur $]a,b[$, on a

$$\varphi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \mathrm{d}\mu$$

5) Inégalité de Hölder Soient p et q deux exposants conjugués, et f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors

$$\int_X fg \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \leq +\infty$$

Si le second membre est fini, l'égalité a lieu si et seulement s'il existe deux réels γ et δ, non tous deux nuls, tels que l'égalité $\gamma f^p(x) = \delta g^q(x)$ ait lieu μ-presque partout.

6) Inégalité de Minkowski Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $[0, +\infty]$. Alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

Solution : 1) Pour commencer, remarquons que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ est un élément de I puisqu'il s'agit d'un barycentre à coefficients positifs d'éléments de I. Donc $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$ est bien défini.
Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Posons la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n \quad : \quad "\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in [0,1]^n,\ \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \quad \Rightarrow \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)"$$

Initialisation : La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie pour $n = 1$ ($\lambda_1 = 1$).
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.
Considérons un $(n+1)$-uplet (x_1,..., x_{n+1}) de I et tout $(n+1)$-uplet (λ_1,...,λ_{n+1}) de $[0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$
$\to$ Si $\lambda_{n+1} = 1$: Alors $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = 0$, et donc

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

$\underline{\to \text{ Si } \lambda_{n+1} \neq 1 :}$ Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

et donc, la propriété $\mathcal{P}_n$ nous donne

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} f(x_k) \qquad (\dagger)$$

La fonction f étant convexe, on a

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\underset{(\dagger)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

On a donc bien montré que $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

2) Par concavité du logarithme, on obtient

$$\forall x, y > 0, \quad \frac{\log x}{p} + \frac{\log y}{q} \leq \log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \quad \text{donc} \quad x^{1/p} y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$$

Cette inégalité est encore vraie lorsque x ou y est nul. Choisissons

$$x = \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} \quad \text{et} \quad y = \frac{b_i^q}{\sum_{j=1}^n b_j^q}$$

Sans perte de généralités, on peut supposer qu'au moins l'un des a_i et l'un des b_j sont non nuls (sinon l'inégalité de Hölder est évidente !). On en déduit donc

$$\frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^n a_j^p\right)^{1/p}} . \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^n b_j^q\right)^{1/q}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{j=1}^n a_j^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{j=1}^n b_j^q}$$

Puis en sommant sur i de 1 à n, on a donc

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où le résultat.

3) On aura besoin de l'inégalité de Hölder. Si $p = 1$, l'inégalité de Minkowski est évidente. Sinon, on pose $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Par l'inégalité de Hölder, on a, d'une part,

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

et d'autre part,

$$\sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

Puis, en sommant ces deux inégalités et en remarquand que $p = q(p-1)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/q}$$

Par suite, et sans perte de généralités, on peut supposer qu'au moins l'un des x_i et l'un des y_j sont non nuls (sinon l'inégalité de Minkowski est évidente !). On a ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}$$

D'où le résultat (puisque $1-1/q = 1/p$).

4) Comme f est convexe, les pentes sont croissantes (*i.e.*) pour tous $a<s<t<u<b$, on a

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Posons $t = \int_X f\mathrm{d}\mu$. Alors $a<t<b$. Par ailleurs, considérons

$$\alpha = \sup_{s\in]a,t[}\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$$

Par suite, on a donc

$$\alpha \leq \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

Ainsi, pour tout $u \in]a,b[$, on a

$$\varphi(u) \geq \varphi(t)+\alpha(u-t)$$

En posant $u = f(x)$, on a donc

$$\varphi(f(x))-\varphi(t)-\alpha(f(x)-t) \geq 0$$

Comme φ est continue, la fonction $\varphi\circ f$ est mesurable. En intégrant cette dernière inégalité (et en utilisant le fait que $\mu(X) = 1$ et que $t = \int_X f\mathrm{d}\mu$), on a

$$\int_X \varphi(f(x))\mathrm{d}\mu - \mu(X)\varphi(t) - \alpha\left(\int_X f(x)\mathrm{d}\mu - \mu(X)t\right) \geq 0$$

$$\varphi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X(\varphi\circ f)\mathrm{d}\mu$$

5) Par concavité du logarithme, on obtient

$$\forall u,v>0,\ \forall\alpha\in]0,1[,\quad \log\left(\alpha u+(1-\alpha)v\right) \geq \alpha\mathrm{log}u+(1-\alpha)\mathrm{log}v = \mathrm{log}u^\alpha+\mathrm{log}v^{1-\alpha} = \mathrm{log}u^\alpha v^{1-\alpha}$$

puis, par croissance de la fonction logarithme, on a donc

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u+(1-\alpha)v \qquad (\dagger\dagger)$$

Posons $I = \left(\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ et $J = \left(\int_X g^q\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$. Si I ou J est nul, alors la fonction correspondante est nulle μ-presque partout et donc l'inégalité est vérifiée. De même, si I ou J est $+\infty$, l'inégalité est encore vérifiée.
Supposons donc $I\in\mathbb{R}_+^*$ et $J\in\mathbb{R}_+^*$. Pour $x\in X$, posons

$$u = \frac{f(x)^p}{I^p} \quad\text{et}\quad v = \frac{g(x)^q}{J^q}$$

En prenant $\alpha = /p$ et $1-\alpha = 1/q$, l'inégalité $(\dagger\dagger)$ s'écrit

$$\frac{f(x)g(x)}{IJ} \leq \frac{1}{p}\frac{f(x)^p}{I^p}+\frac{1}{q}\frac{g(x)^q}{J^q} \qquad (\clubsuit)$$

La fonction $x \mapsto f(x)g(x)$ étant mesurable, on obtient par intégration sur X :

$$\frac{1}{IJ}\int_X f(x)g(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

D'où le résultat.

Si , alors une condition nécessaire et suffisante pour d'égalité dans l'inégalité de Hölder est que l'inégalité (♣) soit une égalité pour μ-presque tout x (*i.e.*) que les fonctions $\frac{f^p}{I^p}$ et $\frac{g^q}{J^q}$ soient égales μ-presque partout. D'où le résultat.

6) On peut supposer que $||f||_p$ et $||g||_p$ sont finis, sinon l'inégalité est évidente.
On remarque que l'on a

$$|f+g|^p = |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

En intégrant sur X, et en appliquant l'inégalité de Hölder à chacun des termes du second membre (et en remarquant que $p = (p-1)q$), on obtient

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu &\leq ||f||_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} + ||g||_p \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{1/q} \\ &= (||f||_p + ||g||_p)\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right)^{1-1/p}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ une application.
1) Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.
2) Montrer que f est logarithmiquement convexe si et seulement si l'application $I \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto f(x)c^x$ est convexe pour tout $c > 0$.
3) Montrer que si f et $g : I \to \mathbb{R}_+^*$ sont logarithmiquement convexes, alors $f+g$ aussi.

Solution : 1) Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Par la log-convexité de f, on a donc

$$\log[f(\lambda x + (1-\lambda)y)] \geq \lambda \log f(x) + (1-\lambda)\log f(y)$$

puis, par concavité du logarithme, on obtient

$$\lambda \log f(x) + (1-\lambda)\log f(y) \leq \log[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)]$$

et enfin, par croissance de la fonction logarithme, on a donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

D'où le résultat.

2) $\underline{\Rightarrow :}$ $\forall c > 0$, l'application $x \mapsto \log f(x) + x\log c$ est convexe (c'est la somme de deux fonctions convexes) (*i.e.*) $x \mapsto \log(f(x)c^x)$ est convexe. D'après ce qui précède, on en déduit que $x \mapsto f(x)c^x$ est convexe.

$\underline{\Leftarrow :}$ Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Par hypothèse, on a

$$\forall c > 0, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y)c^{\lambda x + (1-\lambda)y} \leq \lambda f(x)c^x + (1-\lambda)f(y)c^y$$

Inégalité que l'on peut réécrire comme suit

$$\forall c > 0, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)c^{(1-\lambda)(x-y)} + (1-\lambda)f(y)c^{\lambda(y-x)} = \lambda f(x)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(y)\alpha^{-\lambda} \quad (♣♣)$$

avec $\alpha = c^{x-y}$.
Maintenant, on va tenter de minorer le terme de droite avec d'avoir la majoration la plus fine du terme

 CC BY NC SA

de gauche. L'étude de la fonction $\alpha \mapsto \lambda f(x)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(y)\alpha^{-\lambda}$ montre qu'elle atteint son minimum en $\alpha = f(b)/f(a)$ et que ce minimum vaut $f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$. Ainsi, dans (♣♣), on obtient

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$$

Par passage au logarithme, dans cette dernière inégalité, on a

$$\log[f(\lambda x + (1-\lambda)y)] \leq \log[f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}] = \log(f(a)^{\lambda}) + \log(f(b)^{1-\lambda}) = \lambda \log f(a) + (1-\lambda)\log f(b)$$

D'où le résultat.

3) Sans le résultat de la question précédente, la question est très difficile ... Par ce qui précède, pour tout $c > 0$, les applications $x \mapsto f(x)c^x$ et $x \mapsto g(x)c^x$ sont convexes, donc l'application $x \mapsto (f(x)+g(x))c^x$ est convexe (c'est encore la somme de deux fonctions convexes) et ainsi $f+g$ est log-convexe.

Exercice : Hahn-Banach géométrique
Soient $(H, \langle .,. \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert, $C \subset H$ une partie non vide convexe et fermé et $x \notin H$.
On note H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H.
1)a) Montrer qu'il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in C, \quad f(x) < \alpha < f(y)$$

b) Soient A et B deux convexes non vides disjoints de H. On suppose que A est fermé et B est compact. Montrer qu'il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B (*i.e.*) qu'il existe $f \in H'$ tel que

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

2) Soit D une partie de H. Pour $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $H(f,\alpha)$ le demi-espace

$$H(f,\alpha) = \{y \in H \mid f(y) \leq \alpha\}$$

Montrer que l'enveloppe convexe fermé de D est égale à l'intersection des demi-espaces qui contiennent D.

Solution : 1) Dans un premier temps, on va montrer que l'on peut séparer strictement un point d'un convexe auquel il n'appartient pas, puis nous montrerons que l'on peut séparer un convexe fermé et convexe compact.

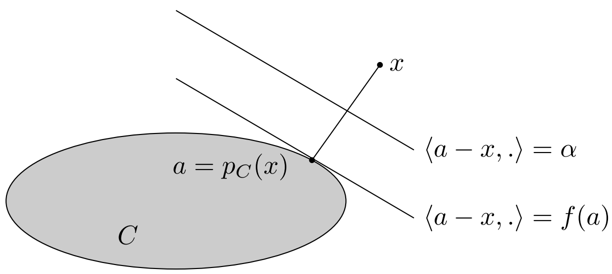
a) Posons $a = p_C(x)$ la projection de x sur C et l'application

$$f = \langle a - x, . \rangle$$

Comme $x \notin C$, on a $x \neq a$, ce qui implique

$$f(a-x) = \langle a-x, a-x \rangle = ||a-x||^2 > 0$$

et donc que $f(a) > f(x)$



De plus, la caractérisation angulaire de la projection nous donne

$$\forall y \in C, \quad \langle a-x, a-y \rangle \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall y \in C, \quad \underbrace{\langle a-x, a \rangle}_{f(a)} \leq \underbrace{\langle a-x, y \rangle}_{f(y)}$$

Par suite, $\forall y \in C, \ f(a) \leq f(y)$.
En posant $\alpha = \frac{f(x)+f(a)}{2}$, on a

$$\forall y \in C, \quad f(x) < \alpha < f(a) \leq f(y)$$

CC BY NC SA

b) Soient A et B deux convexes non vides disjoints de H. On suppose que A est fermé et B est compact. Ramenons nous au cas précédent en posant $C = B - A = \{b - a \ ; \ a \in A, \ b \in B\}$.
Comme $A \cap B = \varnothing$, on a donc que $0 \notin C$. De plus, comme A et B sont convexes, C est convexe (†), comme A est fermé et B est compact, alors C est fermé (††).

Par conséquent, on peut donc séparer 0 et C, et ainsi il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in B - A, \quad 0 < \alpha < f(y)$$

$(i.e.)$

$$\forall a \in A, \ \forall b \in B, \quad f(a) + \alpha < f(y)$$

Par suite,

$$\sup_{x \in A} f(x) + \alpha \leq \inf_{x \in B} f(x)$$

Finalement,

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$$

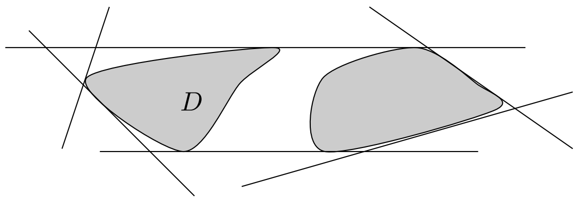
2) Rappelons que l'enveloppe convexe fermé de D, que l'on note $\overline{Conv(D)}$ est le plus petit convexe fermé contenant D.
Soit $\mathcal{I}$ l'intersection des demi-espaces contenant D. Alors $\mathcal{I}$ est un convexe comme intersection de convexes. C'est également un fermé comme intersection de fermés. Par conséquent $\mathcal{I}$ est un convexe fermé et il contient D, donc $\overline{Conv(D)} \subset \mathcal{I}$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, on va montrer que $\overline{Conv(D)}^c \subset \mathcal{I}^c$.
Soit $x \notin \overline{Conv(D)}$, alors on peut séparer x et le convexe fermé $\overline{Conv(D)}$. Par ce qui précède, il existe $f \in H'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in \overline{Conv(D)}, \quad f(x) > \alpha > f(y)$$

Ainsi $\overline{Conv(D)} \subset H(f, \alpha)$ mais $x \notin H(f, \alpha)$, donc $x \notin \mathcal{I}$.

<u>Conclusion :</u> $\overline{Conv(D)} = \mathcal{I}$



(†) **Convexe + Convexe = Convexe :** Soit A et B deux ensembles convexes d'un espace normé E. Alors $A + B = \{a + b \ ; \ a \in A, \ b \in B\}$ est convexe.
(††) **Fermé + Compact = Fermé :** Soit A et B deux ensembles d'un espace normé E. Alors, si A est compact et B est fermé, $A + B = \{a + b \ ; \ a \in A, \ b \in B\}$ est fermé.

Démonstration :

(†) Soient $x_1, x_2 \in A + B$ et $t \in]0, 1[$. Alors il existe $a_1, a_2 \in A$, et $b_1, b_2 \in B$ tels que

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 \\ x_2 = a_2 + b_2 \end{cases}$$

Par suite,

$$(1-t)x_1 + tx_2 = (1-t)(a_1 + b_1) + t(a_2 + b_2) = \underbrace{(1-t)a_1 + ta_2}_{\substack{\in A \\ car\ A\ convexe}} + \underbrace{(1-t)b_1 + tb_2}_{\substack{\in B \\ car\ B\ convexe}} \in A + B$$

Par conséquent, $A+B$ est convexe.

(††) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A+B$ qui converge vers $x \in E$. Il faut donc montrer que $x \in A+B$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A+B$, il existe $a_n \in A$, et $b_n \in B$ tels que $x_n = a_n + b_n$.
Par suite, comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$. Mais alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ converge vers $b := x - a \in B$ puisque B est fermé.
Par conséquent, $x = a + b \in A+B$.

La compacité est importante ! La somme de deux fermés n'est pas forcément fermé ... Par exemple, en considérant :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \ et \ x \geq 0\} \quad \text{et} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \ et \ x \geq 0\}$$

Alors

$$A + B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$$

Et, $A+B$ n'est pas un fermé (ni un ouvert d'ailleurs).

$\square$