

Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

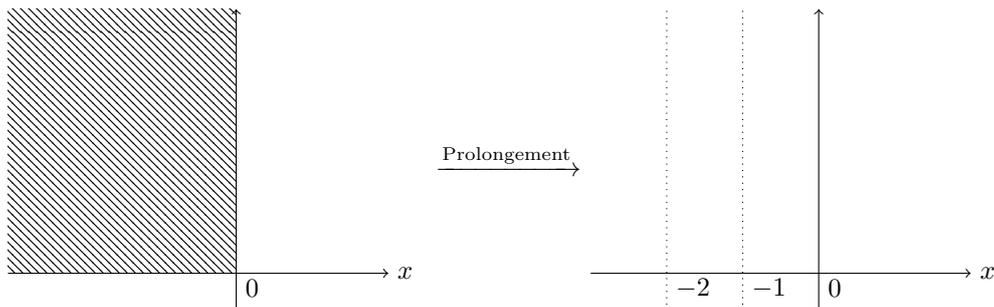
Mohamed NASSIRI

Nous connaissons plusieurs fonctions dites "usuelles". La plus célèbre et "originelle" est la fonction exponentielle. A partir de cette fonction remarquable, il est possible de "directement" définir encore d'autres toutes aussi remarquables : sin, cos, sh, ch, etc.

Mais plusieurs fonctions n'ont pas cette "chance" et sont définies à partir d'une intégrale. Elle sont de la forme $F(x) = \int_I f(x, t)dt$. La plus célèbre est la fonction Γ d'Euler définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \text{ pour } \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$$

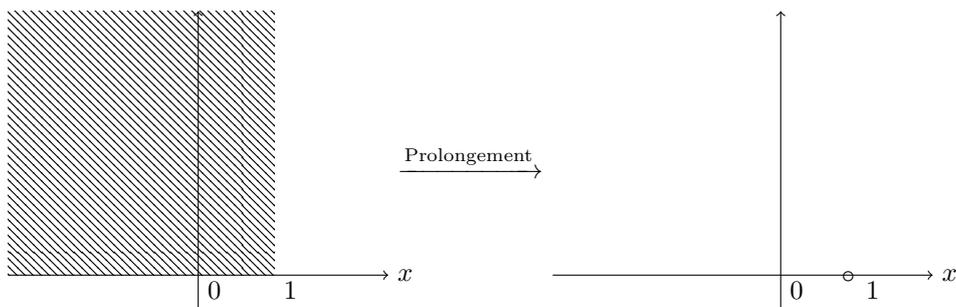
On verra que cette fonction peut-être vu comme une extension de la définition de la factorielle. On tombera aussi sur des célèbres résultats : formule de Weierstrass, formule des compléments, etc. Mais surtout, on verra que l'on peut prolonger holomorphiquement Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$.



D'autres fonctions sont définies à partir d'une série dont la plus célèbre est la fonction ζ de Riemann définie par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \text{ pour } \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 1\}$$

Grâce aux séries de Fourier, on connaît déjà deux valeurs de ζ : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Mais on va également encore sous-tirés quelques informations ... Cette fonction permet de montrer que la série $\sum 1/p_n$ diverge (où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant). Comme pour la fonction Γ , on peut gratter du terrain sur de domaine de définition en prolongeant ζ holomorphiquement sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.



D'autres fonctions méritent également d'être mentionnées car elles ont déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle ont joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques : on va les appeler *fonctions pathologiques*. Parmi celles-ci, on peut citer : la fonction indicatrice sur \mathbb{Q} , la fonction de Takagi (ou blanc-manger), la fonction de Weierstrass, etc.

Références

- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon ♠
 [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
 [DTZ] Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer
 [WAR] Mathématiques Tout-en-Un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel
 [HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Bertrand Hauchecorne
 [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Formule des compléments
 Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

1 Autour de l'exponentielle

1.1 La fonction exponentielle complexe [ML3an] p.404 → 406

Définition 1 La fonction exponentielle complexe est définie pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 2 (i) La fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe (\mathbb{C}^*, \cdot) .

(ii) La fonction \exp est holomorphe sur \mathbb{C} et égale à sa fonction dérivée.

(iii) La fonction \exp est surjective sur \mathbb{C}^* .

Proposition 3 (i) La restriction $\exp|_{\mathbb{R}}$ est une bijection dérivable strictement croissante et convexe de \mathbb{R} sur \mathbb{R}_+^* .

(ii) De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

Proposition 4 La fonction

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \exp(ix)$$

est périodique, à valeurs dans le cercle unité, et elle est surjective. Sa période est notée 2π .

La fonction exponentielle est donc $2i\pi$ -périodique.

Proposition 5 Application réciproque de l'exponentielle réelle

(i) L'application réciproque de $\exp|_{\mathbb{R}}$ est appelée logarithme népérien et notée \ln .

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

1.2 Fonctions trigonométriques [DTZ] p.352-353

Définition 6 On définit les applications cosinus et sinus, notées respectivement cos et sin, par :

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$$

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

Proposition 7 (i) Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x), \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

(ii) Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques.

(iii) La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire.

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

Proposition 8 Les fonctions cosinus et sinus sont développables en série entière sur \mathbb{R} , avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque 9 Le théorème du prolongement analytique permet de montrer que toutes les formules sur \mathbb{R} sont encore valables sur \mathbb{C} .

1.3 Fonctions hyperboliques [WAR] p.160-161

Définition 10 On définit les applications cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées respectivement $\underline{\text{ch}}$ (ou $\underline{\text{cosh}}$) et $\underline{\text{sh}}$ (ou $\underline{\text{sinh}}$), par :

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \end{aligned}$$

Proposition 11 (i) Les fonctions ch et sh sont dérivables sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}'(x) = \text{sh}(x), \quad \text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$$

(ii) La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire.

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$

Application 12 Soit \mathcal{H} l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (\text{cht}, \text{sht}) \end{aligned}$$

est un paramétrage de la partie droite de \mathcal{H} .

Proposition 13 Les fonctions ch et sh sont développables en série entière sur \mathbb{R} , avec

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

[GOUan] p.239

Remarque 14 Le théorème du prolongement analytique permet de montrer que toutes les formules sur \mathbb{R} sont encore valables sur \mathbb{C} .

2 Fonction Γ d'Euler

2.1 Définition et propriétés [ML3an] p.514

Définition 15 La fonction Γ d'Euler est définie sur le demi-plan $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Remarque 16 On a deux valeurs remarquables de Γ : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Proposition 17 La fonction Γ ainsi définie est holomorphe.

Proposition 18 (i) $\forall z \in \mathcal{H}$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

2.2 Propriétés sur \mathbb{R} [GOUan] p.295-296, p.160→162

Proposition 19 Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 20 Γ est logarithmiquement convexe (donc en particulier convexe) sur \mathbb{R}_+^* .

Proposition 21 (i) $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$

(ii) Formule de Stirling
 $\Gamma(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$

Illustration 22 Voir Figure 1.

2.3 Quelques jolis relations [GOUan] p.295 → 298

Proposition 23

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Proposition 24 Formule de Weierstrass

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \right]$$

où γ est la constante d'Euler.

Proposition 25 ♠ Formule des compléments ♠

$\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \text{Re}(z) < 1$

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi}$$

2.4 Prolongement de Γ

Théorème 26 ♠ Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$

♠
 La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur \mathbb{C} , holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. [OBJ] p.82-83

3 Fonction ζ de Riemann

3.1 Définition et propriétés [ML3an] p.514

Définition 27 La fonction ζ est définie sur le demi-plan $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$ par

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

Remarque 28 On connaît deux valeurs de ζ : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Proposition 29 La fonction ζ ainsi définie est holomorphe.

3.2 Propriétés sur \mathbb{R} [GOUan] p.282-283

Proposition 30 ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

Proposition 31 (i) $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1$
(ii) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Proposition 32 Pour $s > 1$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

[ML3an] p.514

Proposition 33 (admis ?) $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} b_{2k}$$

[GOUan] p.299 \rightarrow 301

Théorème 34 (admis) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Alors,

$$\forall s > 1, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$$

Corollaire 35 La série $\sum 1/p_n$ diverge.

3.3 Prolongement de ζ

Théorème 36 (admis) Prolongement de ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ La fonction ζ de Riemann se prolonge en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et admettant un pôle simple en 1.

4 Fonctions pathologiques

Définition 37 "Une fonction f est dite pathologique si elle a déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle a joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques." Christian Aebi.

Proposition 38 La fonction de Dirichlet

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

est une fonction qui :

- (i) n'est continue en aucun point.
- (ii) est bornée, intégrable au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann. [HAU] p.134,208

Proposition 39 En notant Δ la fonction définie sur \mathbb{R} , 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors la fonction de Takagi (ou blanc-manger)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$$

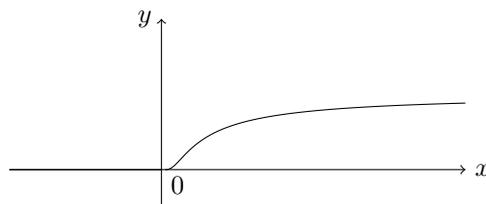
est continue mais n'est dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

Voir Figure 13 et Figure 14. [GOUan] p.85

Proposition 40 La fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor.



[GOUan] p.241

Proposition 41 La fonction de Weierstrass

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{N}, \\ & q \in \mathbb{N}^*, (p, q) = 1 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel. [GOUan] p.110

Illustrations

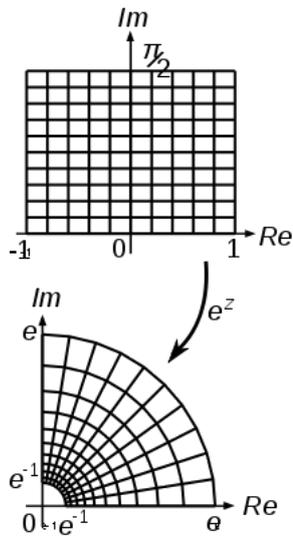


Figure 1 : La fonction exponentielle complexe

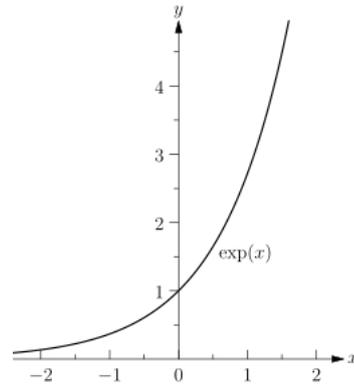


Figure 2 : La fonction exponentielle réelle

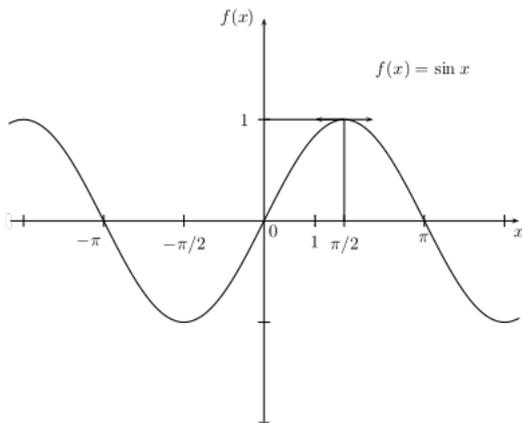


Figure 3 : La fonction sinus

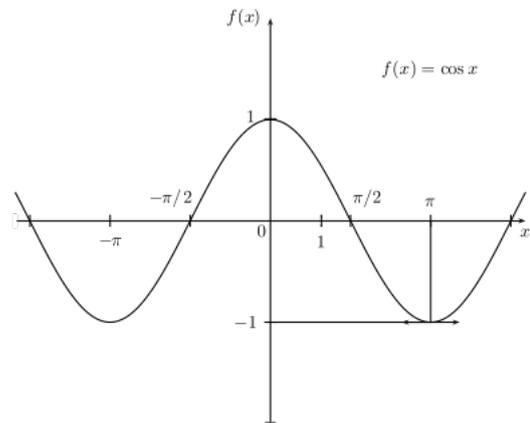


Figure 4 : La fonction cosinus

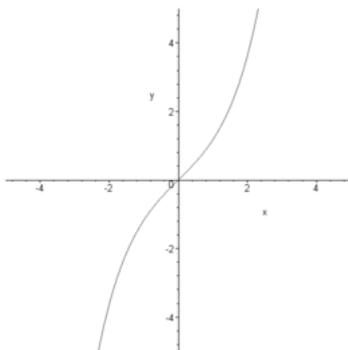


Figure 5 : La fonction sinus hyperbolique

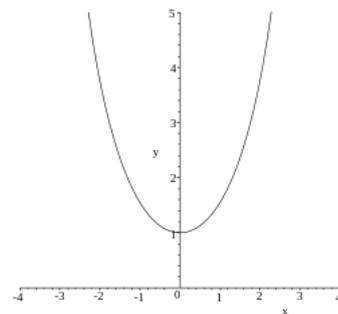


Figure 6 : La fonction cosinus hyperbolique

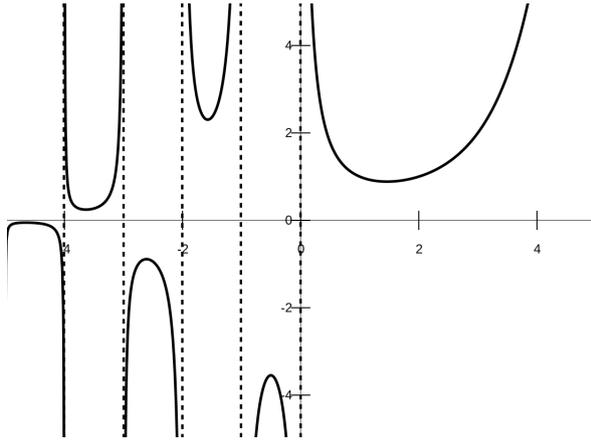


Figure 7 : Allure de la fonction Gamma

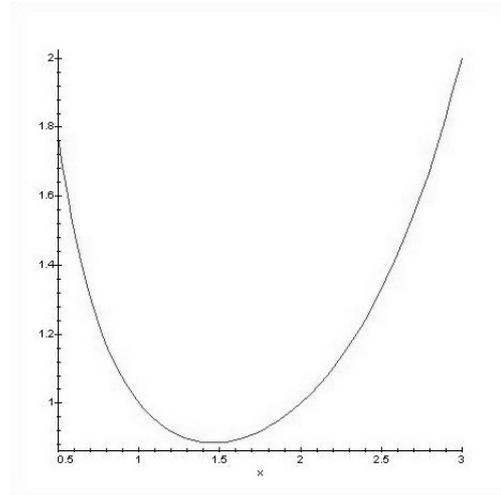


Figure 8 : La fonction Gamma en positif

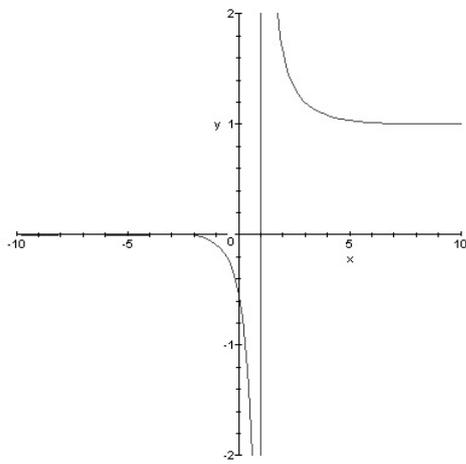


Figure 9 : Allure de la fonction Zeta

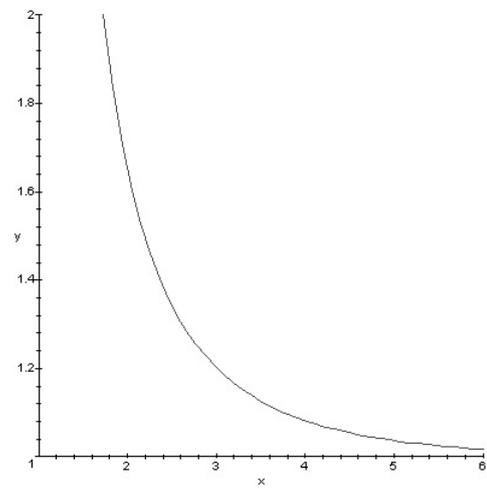


Figure 10 : La fonction Zeta en positif

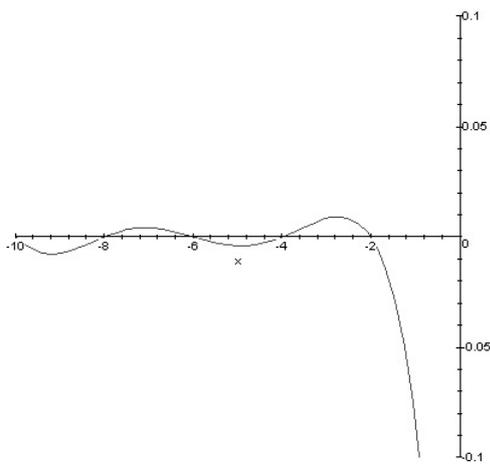


Figure 11 : La fonction Zeta en négatif

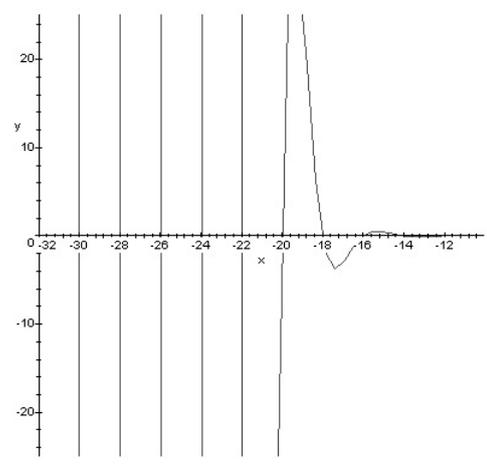


Figure 12 : La fonction Zeta en (fortement) négatif

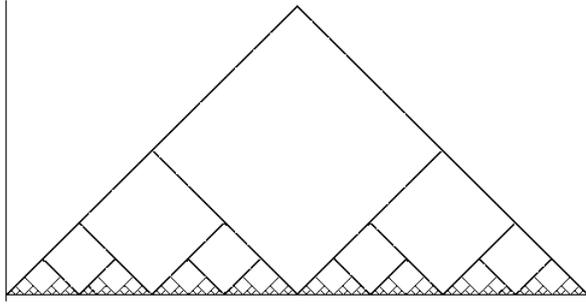


Figure 13 : Les fonctions à sommer pour obtenir la fonction de Takagi

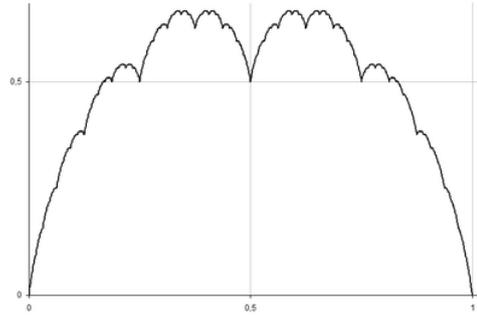


Figure 14 : La fonction de Takagi

Questions

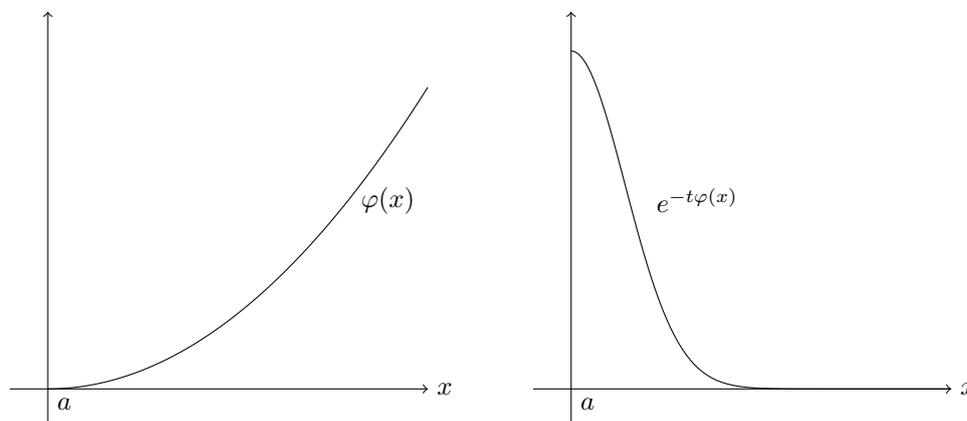
Exercice : Formule de Stirling Montrer que $\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}$.

Solution : Il faudra ici utiliser la fameuse méthode de Laplace dont on rappelle l'énoncé

Méthode de Laplace : Soit $\varphi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que $e^{-t_0\varphi} f$ soit Lebesgue intégrable pour un certain t_0 . On suppose que f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et on pose $F(t) = \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$
 Si $\varphi' > 0$ sur $]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$ alors

$$F(t) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \frac{e^{-t\varphi(a)} f(a)}{\sqrt{t}}$$

En remarquant que, pour t assez grand, la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$ décroît rapidement, la méthode de Laplace dit que *grosso modo* la contribution essentielle à l'intégrale provient d'un voisinage du point a qui est l'abscisse du maximum de la fonction $x \mapsto e^{-t\varphi(x)}$



Revenons donc à notre exercice ...

Comme $\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx$, on remarque que la fonction $x \mapsto x^t e^{-x}$ atteint son maximum en $x = t$, donc on peut s'attendre à ce que la contribution essentielle à l'intégrale provienne d'un voisinage de ce point.

On a, en appliquant un changement de variable qui nous ramène à un maximum atteint en 0 :

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx \underset{x=t(u+1)}{=} \int_{-1}^{+\infty} (t(u+1))^t e^{-t(u+1)} t du = t^{t+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du$$

avec $\varphi(u) = 1 + u + \ln(u+1)$.

On peut appliquer la méthode de Laplace en remarquant que

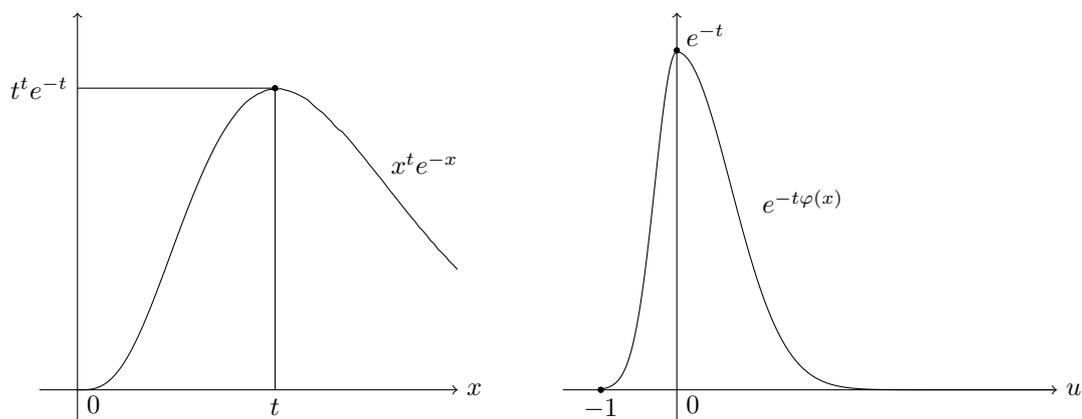
$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi''(0) = 1 \\ \varphi'(0) = 0 \\ f = 1 \\ t_0 > 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 e^{-t\varphi(u)} du \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

Par conséquent,

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}$$



Exercice : Montrer que, pour $s > 1$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s > 1$, on a

$$\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{-t}}{n^s} dt \underset{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-nu} du$$

Par suite, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{s-1} e^{-nu} du$$

On aimerait intervertir la somme et l'intégrale grâce au théorème de Fubini mais pour cela, il faut s'assurer que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u^{s-1} e^{-nu}| \right) du < +\infty$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} |u^{s-1} e^{-nu}| du &= \int_0^{+\infty} u^{s-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} u^{s-1} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du < +\infty \end{aligned}$$

car pour $0 \leq u \leq 1$, la fonction $u \mapsto \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}$ est continue et donc intégrable sur $]0, 1]$ et pour $u \in [1, +\infty[$,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}, \text{ donc } \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} = O(u^{-2}).$$

Par conséquent, pour $s > 1$, on a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$