Fonctions numériques de plusieurs variables

Notes de cours

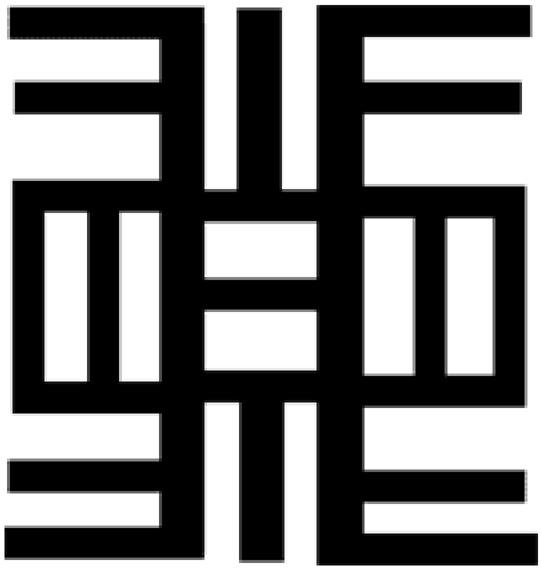
Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Dernière version, décembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Premières notions

II Dérivabilité et différentiabilité

Premières notions

1. Premières notions

1.1 Premières définitions

Pour tout ce chapitre, nous étudierons uniquement les fonctions de deux variables.

R
- $\mathbb{R}^2$, ensemble des couples de réels. L'ordre a de l'importance : $(x,y) \neq (y,x)$. Géométriquement, on représente $\mathbb{R}^2$ par un plan muni d'un repère (O,i,j).
- De même, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, on le représente par l'espace (à trois dimension) muni d'un repère (O,i,j,k).

Definition 1.1 — Fonction. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Une **fonction** définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ fait correspondre, à tout élément (x,y) de E, un unique élément $f(x,y)$ dans $\mathbb{R}$.

Definition 1.2 — Ensemble de définition. L'ensemble E est appelé **ensemble de définition** de f.

R Comme en une variable, une fonction est souvent donnée par une formule/expression.

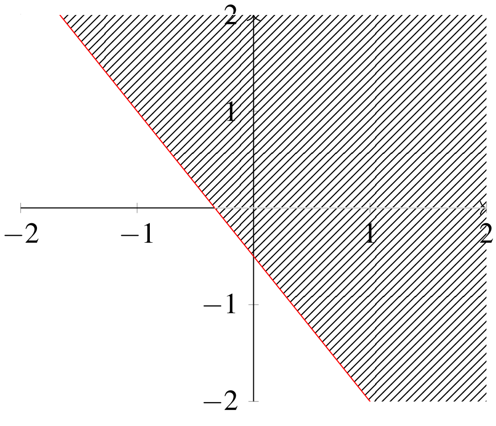
■ **Exemple 1.1**
- On considère la fonction

$$f \ : \begin{cases} E_1 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \ln(3x+2y+1) \end{cases}$$

Son ensemble de définition est

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x+2y+1 > 0\right\}$$

C'est le demi-plan situé sur le côté droit de la droite $y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$.



- On considère la fonction

$$g \ : \begin{cases} E_2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \sqrt{x^2+y^2-1} \end{cases}$$

Son ensemble de définition est $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-1 \geqslant 0\}$. Afin de caractériser cet ensemble, on remarque tout d'abord que l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+ \ y^2 < 1\}$ est le disque ouvert de centre $(0,0)$ est de rayon 1 . L'ensemble E_2 est le complémentaire, dans $\mathbb{R}^2$, de D. Autrement dit, $E_2 = \mathbb{R}^2 \backslash D$. *Dessiner cet ensemble...*

— On considère la fonction

$$h \ : \ \begin{cases} E_3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto x \exp -x^2-y^2 \end{cases}$$

Son ensemble de définition est $E_3 = \mathbb{R}^2$.

■

Definition 1.3 — Graphe. Soit f une fonction de deux variables, $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. On appelle **graphe** de f, ou surface représentative de f, l'ensemble des points (x,y,z) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la relation $z = f(x,y)$.

R
— Se rappeler comment on faisait en une variable (pour chaque x sur son axe, on s'élève d'une hauteur $y = f(x)$). Remarquer que l'axe des ' x ' est la droite d'équation $y = 0$.
— En deux variables : pour chaque point (x,y) sur le plan des variables, on s'élève d'une hauteur $z = f(x,y)$.

1.2 Fonctions particulières

Definition 1.4 — Fonctions polynomiales. Une fonction de deux variables est dite **polynomiale** si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$(x,y) \mapsto x^m y^n$$

, avec m et n deux entiers naturels.

■ **Exemple 1.2** — La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ est polynomiale.
— La fonction $g : (x,y) \mapsto x^2-y^2$ est polynomiale.
— La fonction $h : (x,y) \mapsto 1-x^2$ est polynomiale.
— La fonction $s : (x,y) \mapsto xy$ est polynomiale.

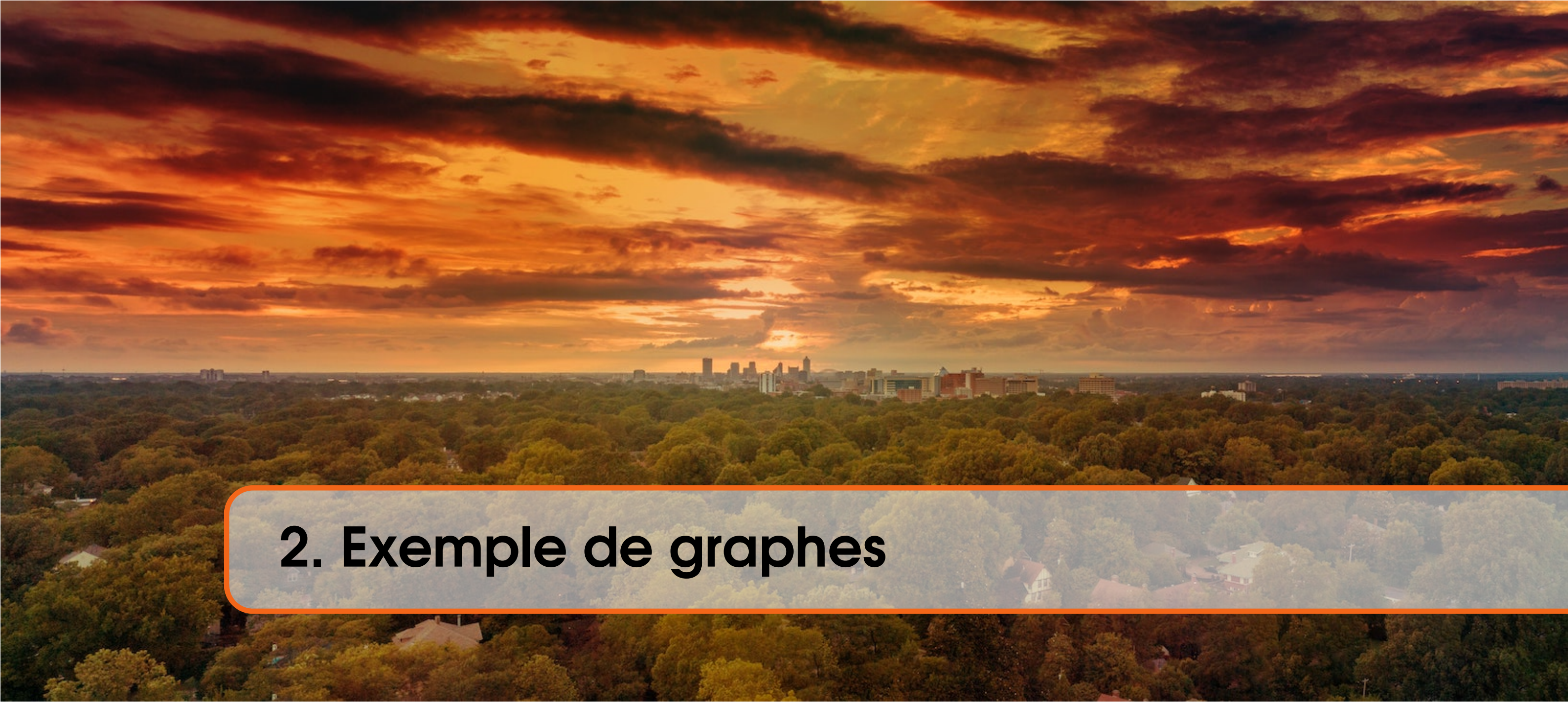
■

Definition 1.5 — Fonctions coordonnées. Les fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont appelées **fonctions coordonnées** ou **projections**.
En particulier, ce sont des fonctions polynomiales.

Definition 1.6 — Applications partielles. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble D.
On appelle **applications partielles** de f en le point (x_0,y_0) les deux fonctions obtenues à partir de f en fixant l'une ou l'autre des variables.
Plus précisément, f admet deux applications partielles en (x_0,y_0).

$$f(.,y_0) : x \mapsto f(x,y_0) \quad \text{et} \quad f(x_0,.) : y \mapsto f(x_0,y)$$

R Ainsi, les applications partielles $f(.,y_0)$ et $f(x_0,.)$ sont des fonctions réelles d'une variable réelle : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



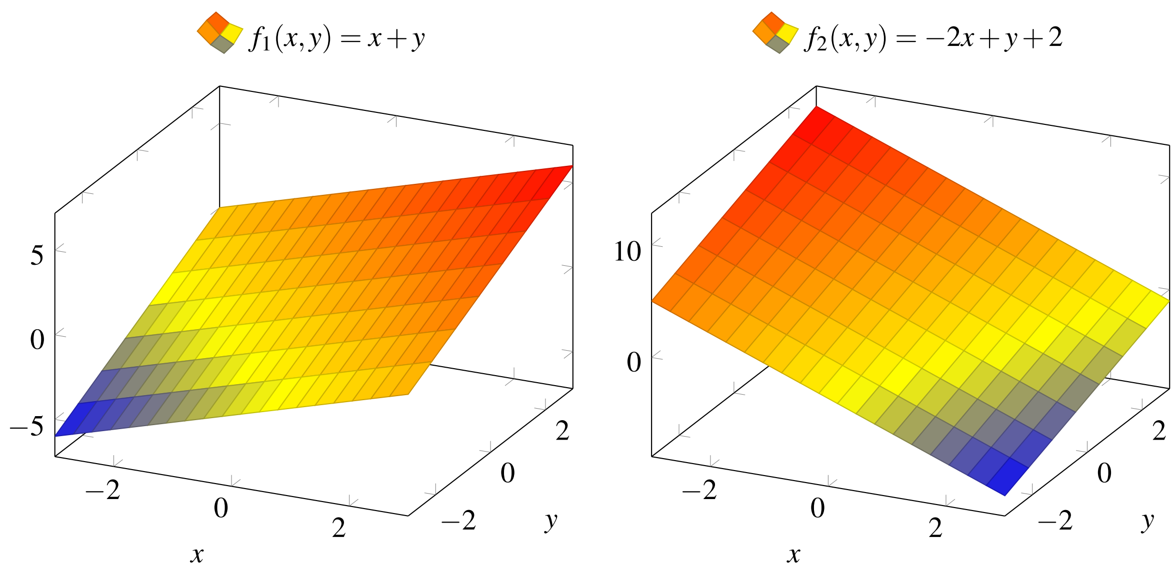
2. Exemple de graphes

2.1 Fonctions affines

Comme en une variable, les fonctions de deux variables les plus simples sont les fonctions affines

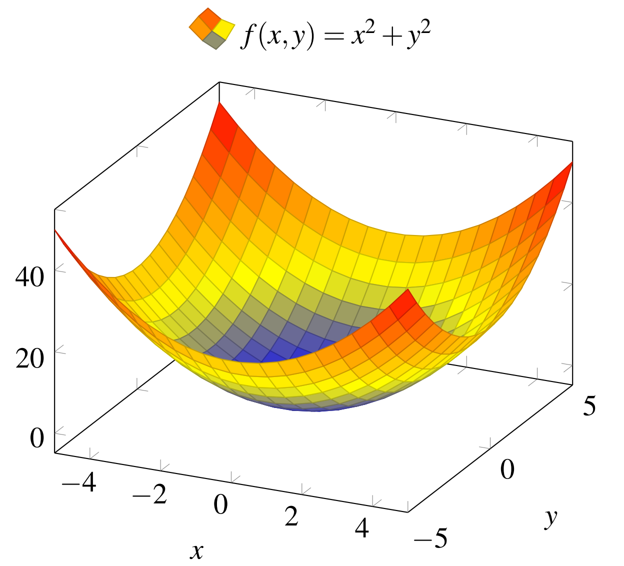
$$(x,y) \mapsto ax+by+c$$

où a, b, c sont des constantes.
Leur graphes sont des plans. Réciproquement, tout plan (non vertical) est le graphe dune fonction affine.
Ci-dessous, les graphes des fonctions $f_1(x,y) = x+y$ et $f_2(x,y) = -2x+y+2$.



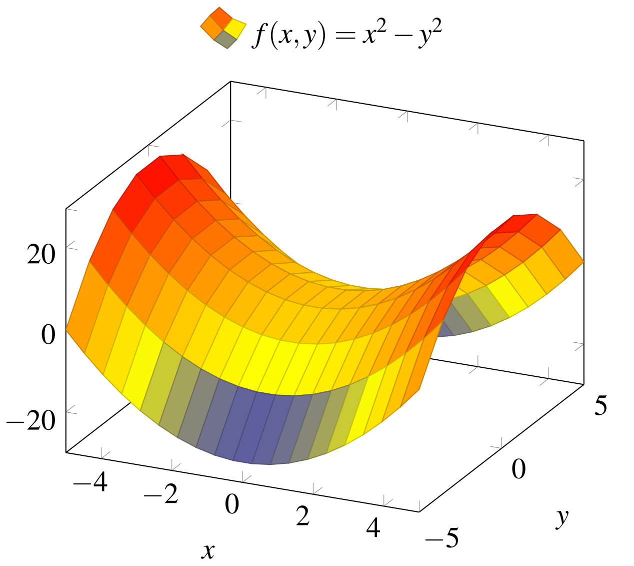
2.2 Paraboloïde à une nappe

La figure ci-dessous montre une portion du graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloïde à une nappe).
Sur la figure, on a dessiné le plan (Oxy) (plan des variables) ; au dessus de chaque point (x,y) dans ce plan, on place le point de hauteur $z = f(x,y)$. Autrement dit, si on imagine que le graphe est le dessin dun relief, la fonction f est la fonction altitude (x, y étant latitude et longitude).
Le plan (Oxy) est le plan d'altitude $z = 0$, graphe de la fonction $(x,y) \mapsto 0$.



2.3 Hyperboloïde à une nappe

La fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$ (selle de cheval, ou col de montagne ou hyperboloïde à une nappe)



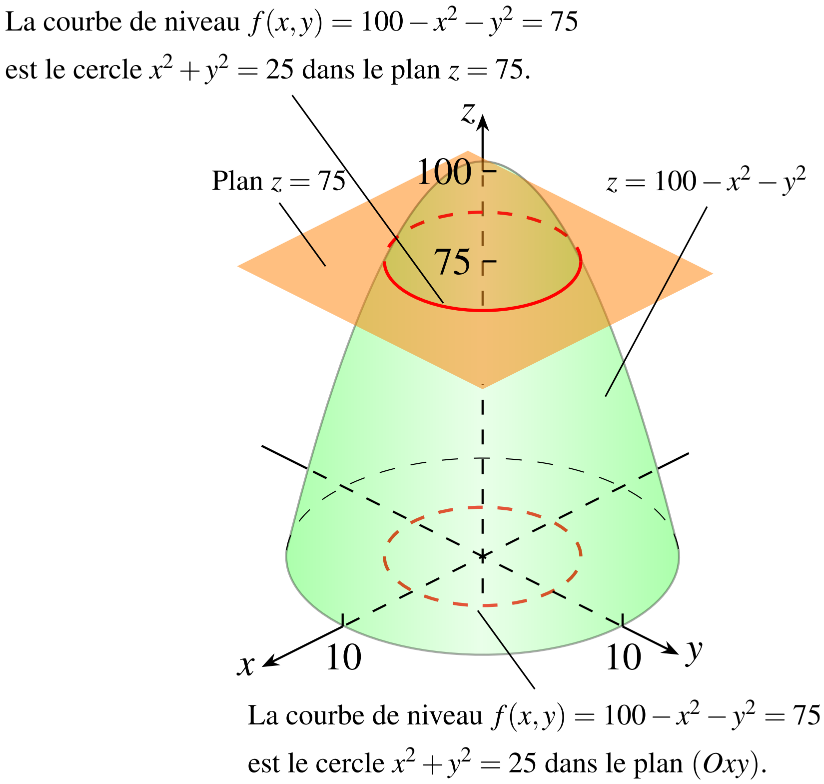
2.4 Courbes de niveaux

Definition 2.1 — Courbes de niveau. Soit f une fonction de deux variables, et h un nombre réel. On appelle **courbe de niveau** de f de hauteur h l'ensemble des points (x,y) du plan (Oxy) en lesquels f prend la valeur h :

$$L_h = \{(x,y) \text{ tels que } f(x,y) = h\}$$

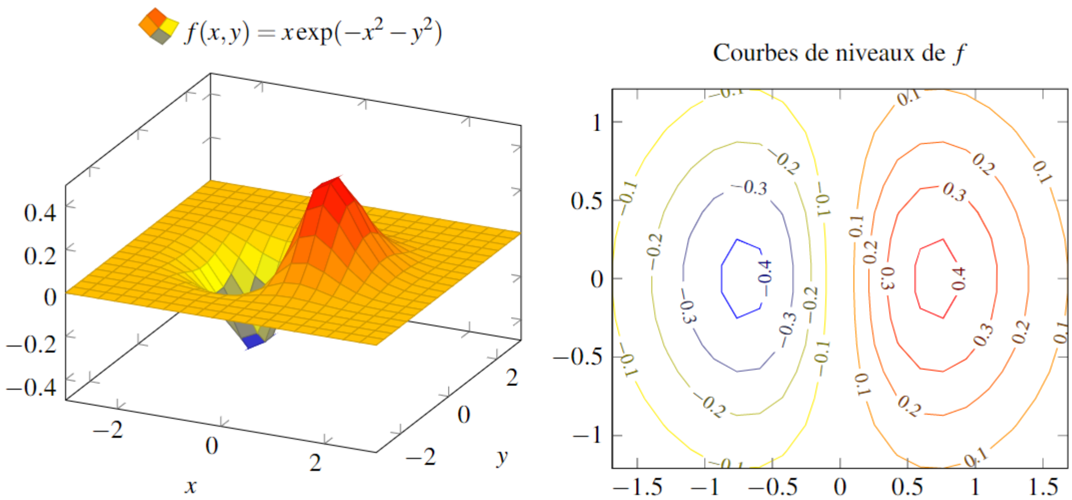
R Le plan horizontal d'altitude h est le plan d'équation $z = h$; la ligne de niveau de hauteur h est donc la trace du graphe de f sur ce plan (projetée dans le plan (Oxy)).
Soit h une hauteur donnée. Dans le plan horizontal d'équation $z = h$, muni des coordonnées (x,y), la ligne de niveau de hauteur h est la trace du graphe de f.

■ **Exemple 2.1** Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.



■

■ **Exemple 2.2** Quelques tracés de courbes de niveau pour $f : (x,y) \mapsto x\exp(-x^2 - y^2)$:



■

II Dérivabilité et différentiabilité

3. Dérivées partielles d'ordre 1 et 2

3.1 Rappels sur le nombre dérivé en a dune fonction d'une variable réelle - Fonction dérivée

Definition 3.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

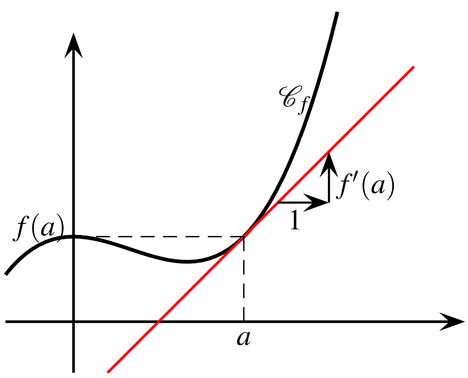
• On appelle **taux d'accroissement**, ou **taux de variation**, en a de la fonction f le nombre

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

• On appelle **nombre dérivé en a** la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0.
On note ce nombre, lorsqu'il existe, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

• Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.



• On dit que f est **dérivable sur I** si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.

• On appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

3.2 Dérivées partielles

3.2.1 Définitions et notations

Dans toute cette section, on considère une fonction f définie au voisinage du point (x_0, y_0) : cela signifie que son ensemble de définition contient un petit disque centré au point (x_0, y_0).

Soit f une fonction de deux variables (x, y), définie au voisinage de (x_0, y_0). On considère les deux fonctions partielles

$$f_1 : x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(x_0, y).$$

Definition 3.2 — Dérivée partielle. On appelle **dérivées partielles** de f au point (x_0, y_0) les nombres

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$$

■ **Exemple 3.1** Les dérivées partielles de $f(x, y) = x^2 y^3$ sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 y_0^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3x_0^2 y_0^2.$$

■

R La dérivée partielle de f par rapport à x est encore une fonction de deux variables. On la note $\frac{\partial f}{\partial x}$. De même, la dérivée partielle d'une fonction f par rapport à y se note $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3.2.2 Dérivées partielles dordre supérieur

R Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Nous savons définir (à la condition qu'elles existent...) $f', f'', f''', f^{(4)}$, etc. Il s'agit des dérivées première, seconde, troisième et quatrième de f.

Definition 3.3 Exactement de la même façon, il est aisé de définir :

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$: on dérive deux fois par rapport à x

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$: on dérive deux fois par rapport à y ;

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$: on dérive une fois par rapport à y, puis une fois par rapport à x ;

— $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$: on dérive une fois par rapport à x, puis une fois par rapport à y ;

■ **Exemple 3.2** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $g(x, y) = x^3 e^y$. Si x est fixé, $y \longmapsto g(x, y)$ est bien infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par rapport à x (fonction usuelle classique) et si y est fixé, $x \longmapsto g(x, y)$ est encore infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par rapport à x.
On a clairement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 e^y, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^3 e^y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 6x e^y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = x^3 e^y$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = 3x^2 e^y$$

■

Théorème 3.1 — Théorème de Schwarz. . On suppose que f est dérivable et si ses dérivées f' et f'' sont continues (sur un ensemble ouvert). Alors, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

R Attention tout de même ! Il existe des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent en un point a (sans que f ne soit de classe C^2) mais prennent des valeurs distinctes.
La continuité en a des dérivées partielles est essentielle. Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$. Les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais ne sont pas égales (valant respectivement 1 et -1).
On a encore un contre-exemple, en considérant l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Definition 3.4 — Matrice hessienne. On appelle **matrice hessienne** (ou **hesssienne**) de f en (x,y) la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ notée et définie par

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \end{pmatrix}$$

R $Hf(x,y)$ est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

4. Gradient

Definition 4.1 — Gradient. Soit f une fonction de deux variables, différentiable tout point d'un domaine D. Son gradient est le champ de vecteurs défini sur D par

$$\nabla f : (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

R

— Le gradient d'une fonction f est généralement noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$ (se lit « nabla f »).

— Dans la littérature en anglais, ou en français par commodité typographique, on préfère souvent mettre en gras le symbole du gradient pour afficher son caractère vectoriel : $\mathbf{grad} f$ ou $\boldsymbol{\nabla} f$.

■ **Exemple 4.1** Le gradient de la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y$ est le champ de vecteurs horizontal $\nabla_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

R Dans un repère orthonormé, le vecteur gradient pointe dans la direction où la fonction croît le plus rapidement, et son module est égal au taux de croissance dans cette direction.

Definition 4.2 — Approximation linéaire - Plan tangent. Si f est une fonction de deux variables, l'approximation linéaire au point (a,b) est la fonction dont le graphe est le plan tangent, à savoir :

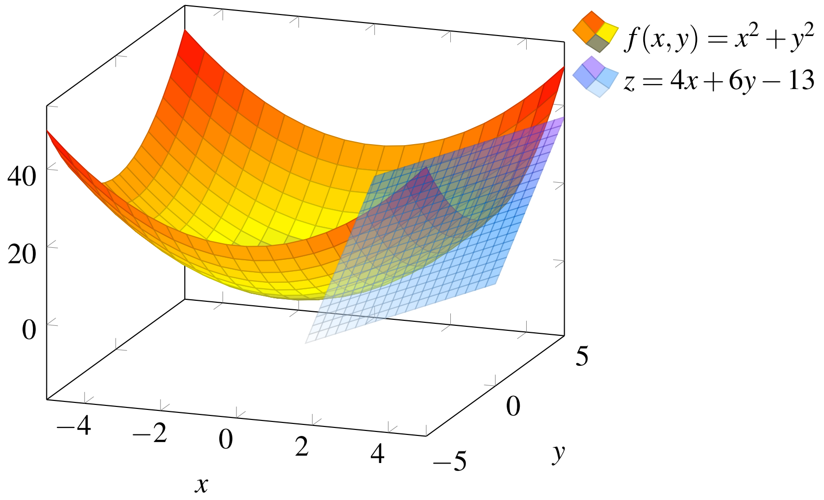
$$(x,y) \mapsto f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

R Pour une fonction dérivable f d'une variable, on se rappelle que l'approximation linéaire au point a est la fonction dont le graphe est la tangente, à savoir :

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a)$$

■ **Exemple 4.2** Pour $f = (x,y) = x^2 + y^2$, et $A = (2;3)$, l'équation du plan tangent est

$$z = 13 + 4(x-2) + 6(y-3) = 4x + 6y - 13.$$



∎

R Là où le gradient est non nul, il est perpendiculaire à la courbe de niveau. Autrement dit, la tangente à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Pour monter (ou descendre) le plus vite, il faut partir perpendiculairement à la courbe de niveau

5. Différentielles d'ordre 1 et 2

Pour une fonction d'une variable f, définie au voisinage de 0, être dérivable en 0 , c'est admettre un développement limité à l'ordre 1 ,

$$f(x)=b+ax+x\varepsilon(x).$$

Alors $b=f(0)$ et $a=f'(0)$.

R <u>**Interprétation géométrique :**</u> La courbe représentative de f possède en $(0,a)$ une tangente, la droite d'équation $y=b+ax$.

On veut faire pareil pour une fonction de deux variables. La courbe représentative est remplacée par une surface représentative d'équation $z=f(x,y)$, la droite tangente par un plan tangent d'équation $z=c+ax+by$. La tangence s'exprime en disant que la distance entre le point $(x,y,f(x,y))$ de la surface et le point $(x,y,c+ax+by)$ du plan est petite devant la distance de (x,y) à l'origine.

■ **Exemple 5.1** $f(x,y)=x^2+y^2$. ■

5.1 Différentiabilité d'une fonction de deux variables

Definition 5.1 — Différentiabilité d'une fonction de deux variables. Soit f une fonction de deux variables, définie au voisinage de $(0,0)$. On dit que f est différentiable en $(0,0)$ si elle admet un développement limité à l'ordre 1, i.e. si on peut écrire

$$f(x,y)=c+ax+by+\sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y),$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers 0 . Dans ce cas, f admet des dérivées partielles en $(0,0)$, et

$$c=f(0,0),\quad a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

La différentiabilité de f en un point quelconque (x_0,y_0) se traduit par le développement limité

$$f\left(x_0+u,y_0+v\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)u+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)v+\sqrt{u^2+v^2}\,\varepsilon(u,v),$$

où $\varepsilon(u,v)$ tend vers 0 lorsque u et v tendent vers 0 .

■ **Exemple 5.2** $f(x,y)=x(2-x+y)+y(1-x-y)$ est différentiable à l'origine. En effet,

$$\begin{aligned}f(x,y)&=2x+y-x^2-y^2\\&=2x+y+\sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x,y = -\sqrt{x^2+y^2})$ qui tend bien vers 0 quand x et y tendent vers 0. ■

Proposition 5.1 — (admise). Théorème 1 Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de $(0,0)$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies au voisinage de $(0,0)$ et continues en $(0,0)$, alors f est différentiable en $(0,0)$, et son développement limité à l'ordre 1 s'écrit

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\varepsilon(x,y).$$

■ **Exemple 5.3** $f(x,y) = x(2-x+y)+y(1-x-y)$ est différentiable en tout point. En effet, utiliser la proposition précédente pour le démontrer... ■

5.2 Développement limité à l'ordre 2

Pour une fonction d'une variable f , définie au voisinage de 0, on a le résultat suivant

Proposition 5.2 Soit f une fonction d'une variable. Supposons que $f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$. Alors f possède un minimum local strict en 0 : pour $x \neq 0$ suffisamment petit, $f(x) > f(0)$.

Preuve. Le développement limité de Taylor-Young donne

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Alors

$$\frac{f(x)-f(0)}{x^2} = \frac{1}{2}f''(0) + \varepsilon(x) > 0$$

pour x assez petit. ■

R On peut aussi parler de développement limité à l'ordre 2 pour une fonction de plusieurs variables. C'est lié aux dérivées partielles secondes, cela donne un condition suffisante pour un minimum local strict.

Definition 5.2 — Développement limité à l'ordre 2. Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de 0 . On dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ si on peut écrire

$$f(x,y) = c + ax + by + px^2 + qxy + ry^2 + \left(x^2+y^2\right)\varepsilon(x,y),$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers 0.

R Plus généralement, on dit que f admet un développement limité à l'ordre 2 en (x_0,y_0) si on peut écrire

$$f(x_0+u, y_0+v) = c + au + bv + pu^2 + quv + rv^2 + \left(u^2+v^2\right)\varepsilon(u,v)$$

où $\varepsilon(u,v)$ tend vers 0 lorsque u et v tendent vers 0.

Proposition 5.3 — Développement limité de Taylor-Young en $(0;0)$. Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de $(0;0)$. On suppose que f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, et que celles-ci sont continues au voisinage de $(0;0)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 ,

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right) \\ &+ \left(x^2+y^2\right)\varepsilon(x,y). \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers 0.

R Autrement dit, la plupart des fonctions qu'on rencontrera admetteront un développement limité.

Proposition 5.4 — Développement limité de Taylor-Young en $(x_0;y_0)$. Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage de $(x_0;y_0)$. On suppose que f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, et que celles-ci sont continues au voisinage de $(x_0;y_0)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 ,

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \\
&+ (|x-x_0| + |y-y_0|)^2 \varepsilon(x,y)
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon(x,y)$ tend vers 0 lorsque x et y tendent vers 0.

■ **Exemple 5.4** Soit la fonction f définie par $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$. Cette fonction est bien définie et admet des dérivées partielles de tout ordre au voisinage du point $(1,-1)$. Calculons son développement limité à l'ordre 2.

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2y}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{(x-y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{4y}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4x}{(x-y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2\frac{x+y}{(y-x)^3}
\end{gathered}
$$

On évalue ces dérivées partielles en $(1,-1)$, on obtient :

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = \frac{1}{2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0.
\end{gathered}
$$

On obtient le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1,-1)$:

$$
f(x,y) = \frac{1}{2}\{(x-1)+(y+1)\} - \frac{1}{4}\left\{(x-1)^2 + (y+1)^2\right\} + (|x-1|+|y+1|)^2 \varepsilon(x,y),
$$

avec $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \varepsilon(x,y) = 0$ ■

III Optimisation

6. Optimisation sans contraintes

6.1 Extrema et point critique

Definition 6.1 — Maximum (local) - Minimum (local). — On dit que la fonction f atteint en un point (x_0, y_0) son **maximum** sur un ensemble D si

$$f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad \text{pour tout point } (x,y) \text{ de } D.$$

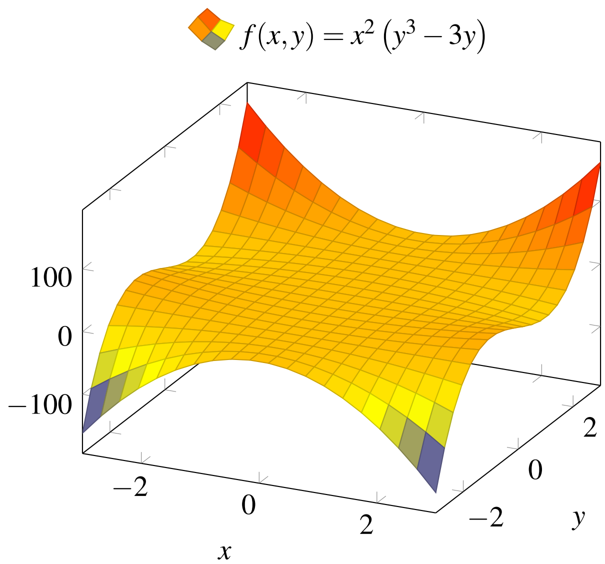
— On dit que f a un **maximum local** en (x_0, y_0) si l'inégalité précédente est valable pour tous les points (x,y) dans un voisinage du point (x_0, y_0).

— On dit que la fonction f atteint en un point (x_0, y_0) son **minimum** sur un ensemble D si

$$f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0) \quad \text{pour tout point } (x,y) \text{ de } D.$$

— On dit que f a un **minimum local** en (x_0, y_0) si l'inégalité précédente est valable pour tous les points (x,y) dans un voisinage du point (x_0, y_0).

■ **Exemple 6.1** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^2\left(y^3 - 3y\right)$ admet un maximum local, un minimum local, pas de maximum ou minimum globaux.



■

Definition 6.2 — Point critique. On dit que le point (x_0,y_0) est un **point critique** de la fonction f si le vecteur gradient en ce point est nul ; autrement dit, les deux dérivées partielles y sont nulles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0.$$

R Graphiquement, cela signifie que le plan tangent au graphe de f au point (x_0,y_0) est horizontal.

Proposition 6.1 Soit f une fonction de deux variables définie au voisinage d'un point (x_0,y_0). Si (x_0,y_0) est un maximum local de f, alors c'est un point critique.

■ **Exemple 6.2** Cherchons les points critiques de la fonction f définie par $f(x,y)=x^2+y^2+xy+1$.
On calcule les dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x+2y.$$

Si (x,y) est un point critique de f, il vérifie donc le système :

$$\begin{cases} 2x+y &= 0\\ x+2y &= 0\end{cases}$$

$(0,0)$ est donc le seul point critique de f. ■

R Bien sûr, même chose si c'est un minimum local. Un maximum global est aussi un maximum local, donc c'est encore vrai (a fortiori) pour un maximum global.

6.2 Méthode classique pour la recherche d'extrema

Tout comme en dimension un, les dérivées partielles d'ordres 2, peuvent fournir un **critère suffisant** pour déterminer la nature des extremums locaux d'une fonction $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^2.

1. En calculant les dérivées partielles d'ordre 1, on determine les points critiques de f en résolvant le système

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$

   R **Attention !** Les points obtenus comme solutions du système précédent ne sont pas forcément des extrema. Etre un point critique n'est qu'une condition nécessaire pour être un extremum.

2. On calcule ensuite la matrice hessienne de f aux points critiques (x,y) :

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}$$

   Il reste ensuite à appliquer le **critère de Monge** :
   - si $s^2-rt<0$ et $r<0$ il s'agit d'un maximum local.
   - si $s^2-rt<0$ et $r>0$ il s'agit d'un minimum local.
   - si $s^2-rt>0$ il s'agit d'un point selle et ce n'est pas un extremum local.

— si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

■ **Exemple 6.3** Cherchons sur $\mathbb{R}^2$ les extrema de $f : (x,y) \to x^3 + y^3$
On cherche d'abord les points critiques.

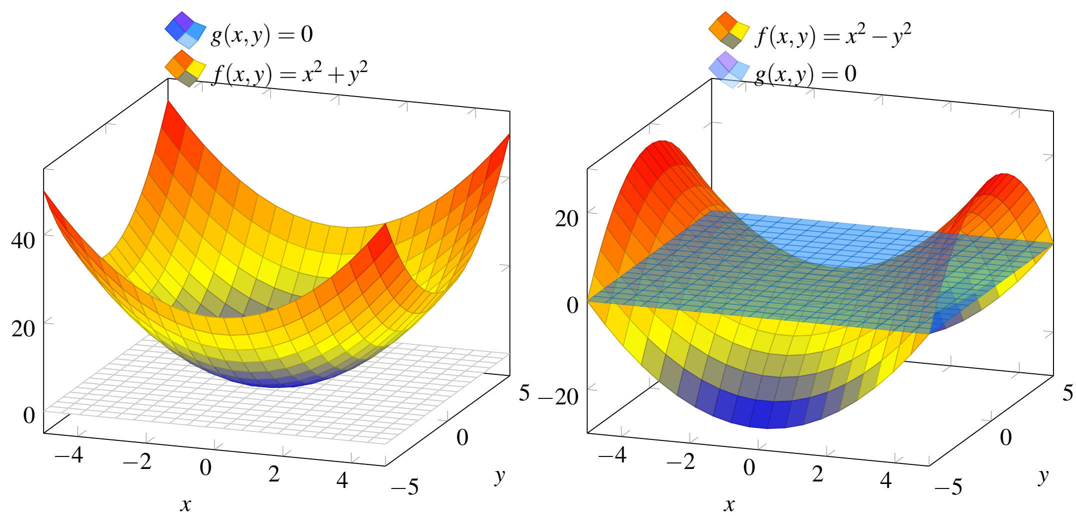
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Il n'y a qu'un seul point critique $(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 = r \text{ en } (0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 = s \text{ en } (0,0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 = t \text{ en } (0,0)$$

En $(0,0), s^2 - rt = 0$, le théorème ne permet pas de conclure.
Mais $f(x,y) - f(0,0) = x^3 + y^3$ et $f(-x,-y) - f(0,0) = -x^3 - y^3$ exprssion de signe opposé.
Ainsi $f(x,y) - f(0,0)$ change de signe au voisinage du point critique : $(0,0)$ est un point col. ■

R On va ici donner deux exemples classiques sous forme de surfaces où $(0,0)$ est un point critique, on a aussi représenté la fonction nulle qui donne un plan.
Les fonction étudiées sont respectivement
- $x^2 + y^2$ où $r = 2, s = 0, t = 2, s^2 - rt = -4$
- $x^2 - y^2$ où $r = 2, s = 0, t = -2, s^2 - rt = 4$



Exercice 6.1 — Exercice corrigé. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
1. $f(x,y) = y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

■

Corrigé. 1. On commence par chercher les points critiques de f. Pour cela, on calcule les dérivées partielles par rapport à x et à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2x^3 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Un point (x,y) est critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} -2x + 2x^3 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Les seules solutions de ce système sont $(0,0),(1,0)$ et $(-1,0)$. On a donc 3 points critiques et on va étudier la nature de chacun. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2+6x^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

En $(0,0)$, on obtient donc, avec les notations usuelles, $r=-2, t=2$ et $s=0$, soit $rt-s^2 = -4 < 0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,0)$, on a $r=4, t=2$ et $s=0$, soit $rt-s^2 = 8 > 0$. Le point $(1,0)$ est un extrémum local, c'est même un minimum local puisque $r>0$. L'étude en $(-1,0)$ donne exactement le même résultat.

2. On procède exactement de la même façon. Cette fois,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2-3y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2-3x$$

Un point (x,y) est un point critique si et seulement s'il est solution du système

$$\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$$

Ce système implique $x^4=x$, soit $x=0$ ou $x=1$. On en déduit facilement que les seuls points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Les dérivées partielles du second ordre sont égales à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -3$$

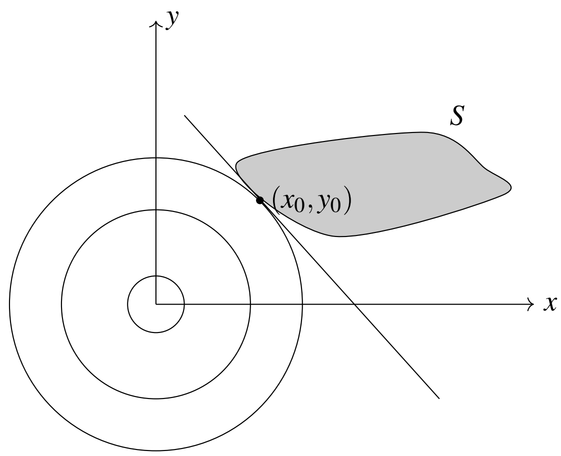
En $(0,0)$, on a $r=0, t=0$ et $s=-3$, soit $rt-s^2=-9<0$. Le point $(0,0)$ est un point col, ce n'est pas un extrémum local de f. En $(1,1)$, on a $r=6, t=6$ et $s=-3$, soit $rt-s^2=27>0$. Puisque de plus $r>0$, le point $(1,1)$ est un minimum local de f.

■

7. Optimisation sous contraintes

7.1 Exemple d'introduction

Un résultat et une technique quasi-incontournable pour qui parle d'extrema et d'application différentiables est la méthode du Lagrangien. En guise d'introduction, tentons de visualiser la recherche d'extrema liés, aussi appelés extrema sous contrainte. Prenons la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$ (qui n'est rien d'autre que la fonction distance au carré) et cherchons son minimum sur la surface S :



Noter que le minimum (libre) de la fonction f est 0 et il est atteint en $(0,0)$ mais ce point n'est pas dans S.
Pour trouver le minimum sur S de f, on trace les lignes de niveaux de f ($x^2 + y^2 = constante$) et on regarde quand la "première" ligne de niveau touche S. Le point d'intersection sera le minimum recherché.

Mais pourquoi diable parler d'espace tangent ? Comme le montre notre exemple, le minimum recherché se situe sur la tangente commune de la ligne de niveau de f et de la surface S. C'est ce qu'explique en partie la méthode du Lagrangien ...

7.2 La méthode du Lagrangien

Le but de ce document est de décrire la méthode du Lagrangien pour chercher et étudier les extremums d'une fonction sous contraintes. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions régulières. On cherche les extremums de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$. On considère la fonction

$$\mathscr{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y).$$

Cette application est appelée le Lagrangien du problème d'optimisation et va nous permettre de trouver et d'étudier les extremum de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Proposition 7.1 — Méthode du Lagrangien. $P_0 = (x_0, y_0)$ est un point critique sur $D = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 si et seulement si (x_0, y_0, λ_0) est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = 0 \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = 0 \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) & = 0 \quad (\Leftrightarrow g(x,y) = 0) \end{cases}$$

Proposition 7.2 Notons (x^*, y^*, λ^*) un point critique du Lagrangien, on cherche ensuite à déterminer si il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local (ou d'aucun des deux). Pour cela on va utiliser des conditions d'ordre 2 dite "faibles". On calcule

$$r = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial^2 x}(x^*, y^*, \lambda^*), \quad t = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial^2 y}(x^*, y^*, \lambda^*), \quad s = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial x \partial y}(x^*, y^*, \lambda^*).$$

La matrice Hessienne de $\mathscr{L}$ au point (x^*, y^*, λ^*) est donnée par

$$H = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

La nature du point (x^*, y^*, λ^*) dépend de H. On a trois cas :

- Si $\det H > 0$ et $\operatorname{Tr} H > 0$, (x^*, y^*) est un minimum local de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
- Si $\det H > 0$ et $\operatorname{Tr} H < 0$, (x^*, y^*) est un maximum local de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
- Si $\det H < 0$, on ne peut pas conclure.

Proposition 7.3 — Théorème de Weierstrass. Toute fonction f continue sur un ensemble K borné et fermé (qui contient ses bords) possède un maximum global et un minimum global.

■ **Exemple 7.1** Optimisons la fonction f définie par $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ (ce qui nous donne la fonction g définie par $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$)

- **Domaines de définitions :** $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^2$
- **Méthode du Lagrangien :** $\mathscr{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$ Finalement les quatre points critiques sur D sont :
  - $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ associé au multiplicateur $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.
  - $(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ associé au multiplicateur $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
  - $(x_3, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ associé au multiplicateur $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.
  - $(x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ associé au multiplicateur $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$.

- **Théorème de Weierstrass :** Par le Théorème de Weierstrass, f possède parmi ces points stationnaires au moins un point de minimum global sur D et un point de maximum global. Il suffit d'évaluer f en ces points stationnaires :

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) = \frac{1}{2}, f(x_3,y_3) = f(x_4,y_4) = -\frac{1}{2}$$

  f possède donc deux point de maximums globaux sur D : (x_1,y_1) et (x_2,y_2) et deux point de minimums globaux sur D : (x_3,y_3) et (x_3,y_3)

∎

IV Fonction de Cobb-Douglas

8. Fonction de Cobb-Douglas

8.1 Définitions

La fonction de Cobb-Douglas est une fonction utilisée en économie et en économétrie comme modèle de fonction de production. Elle permet de représenter les effets de la technologie sur deux ou plusieurs facteurs de production (notamment le capital physique et le capital travail) et sur l'output qu'ils permettent.
Elle a été proposée et testée économétriquement par l'économiste américain Paul Douglas et le mathématicien américain Charles Cobb en 1928. Elle est parfois utilisée pour représenter le lien entre intrant et extrant. D'un point de vue mathématique, c'est une simple moyenne géométrique pondérée.

Definition 8.1 — Fonction de Cobb-Douglas. Dans le cadre d'une fonction de production à deux facteurs, la forme généralement retenue pour une **fonction de Cobb-Douglas** est la suivante :

$$f(K,L) = Y = cK^{\alpha}L^{\beta}$$

où :

- Y correspond au niveau de production
- K à celui du capital
- L à celui du travail
- c, α et β sont des constantes déterminées (par la technologie).

R

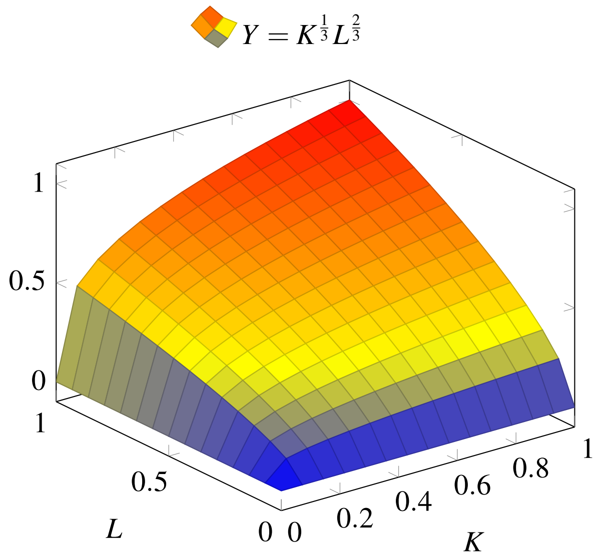
- Dans le cadre du modèle de la concurrence pure et parfaite, les coefficients α et β correspondent à la répartition des revenus entre le travail et le capital.
- Une des propriétés importantes des fonctions de production est la suivante $f(0,L) = f(K,0) = 0$, autrement dit les facteurs sont indispensables.

Definition 8.2 — Fonction de Cobb-Douglas - Cas des rendements d'échelle constants. En modélisation économique, on utilise fréquemment, en reprenant les mêmes notations que précédemment, la fonction particulière suivante :

$$Y = cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

R Dans ce cas particulier (où la somme des coefficients est égale à 1), les rendements d'échelle sont constants (mathématiquement, la fonction est homogène de degré 1), ce qui signifie que si le niveau de tous les intrants (inputs) est augmenté d'un même pourcentage, celui des extrants (outputs) augmentera de ce pourcentage.

■ **Exemple 8.1** En prenant $\alpha = \frac{1}{3}$, on obtient la fonction de Cobb-Douglas suivante :

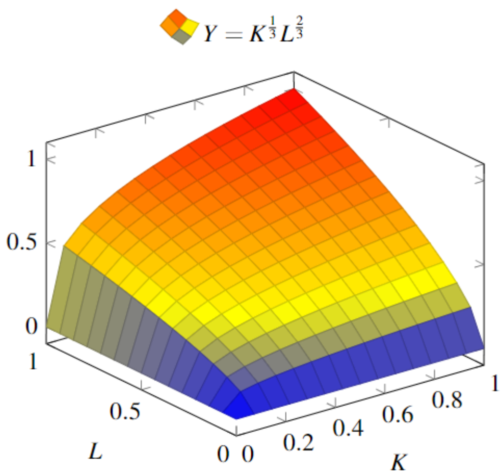


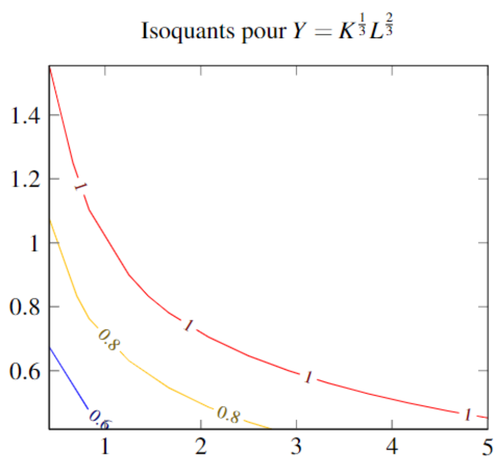
■

Definition 8.3 — Isoquant. Un **isoquant** est une courbe qui relie toutes les combinaisons de facteurs (capital et travail) permettant d'obtenir le même niveau de production. Un isoquant est aussi appelée **courbe de produit égale**.

R Ce n'est rien d'autre qu'une courbe de niveau de la fonction f définie par $f(K,L) = cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$.

■ **Exemple 8.2** Quelques tracés d'isoquants pour la fonction de Cobb-Douglas en prenant $\alpha = \frac{1}{3}$:





■

8.2 Élasticités, productivités et rendements

8.2.1 Les élasticités

Definition 8.4 — Élasticité de la production. En microéconomie, l'**élasticité de la production** est le rapport entre le pourcentage de variation de la production (PIB ou production d'une entreprise) et le pourcentage de variation d'un facteur de production (ou intrant). Elle est parfois appelée élasticité partielle de production pour souligner le fait qu'elle prend en compte la variation d'un seul facteur de production.

Proposition 8.1 Dans le cas particulier des rendements d'échelle constants, les élasticités de la fonction de Cobb-Douglas sont

$$\varepsilon(Y,K) = \alpha \quad \text{et} \quad \varepsilon(Y,L) = 1-\alpha$$

où :

- $\varepsilon(Y,K)$ correspond à l'élasticité par rapport au capital
- $\varepsilon(Y,L)$ correspond à l'élasticité par rapport au travail

R Les élasticités $\varepsilon(Y,K)$ et $\varepsilon(Y,L)$ sont parfois respectivement notées ε_K et ε_L (ou encore e_K et e_L).

Preuve. On rappelle que $Y = cK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ et que par définition, on a

$$\varepsilon(Y,K) = \frac{\partial Y}{\partial K} \times \frac{K}{Y} \quad \text{et} \quad \varepsilon(Y,L) = \frac{\partial Y}{\partial L} \times \frac{L}{Y}$$

D'une part,

$$\varepsilon(Y,K) = \frac{\partial Y}{\partial K} \times \frac{K}{Y} = c\alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \times \frac{K}{cK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = \alpha$$

D'autre part,

$$\varepsilon(Y,L) = \frac{\partial Y}{\partial L} \times \frac{L}{Y} = cK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha} \times \frac{L}{cK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = 1-\alpha$$

■

R

- Les exposants α et $1-\alpha$ qui affectent les variables travail et capital, ne sont rien d'autre que les élasticités de la production par rapport à ces variables.
- Dire que l'élasticité de la production par rapport au travail est $alpha$, revient à dire qu'une augmentation de 1% des quantités de travail déterminera une augmentation de $alpha$% des quantités produites.

8.2.2 Les productivités moyennes

Tout comme les productivités marginales, les productivités moyennes de chacun des facteurs sont fonction des proportions des quantités utilisées des deux facteurs.

Proposition 8.2

$$\frac{Y}{K} = c\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad \frac{Y}{L} = c\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}$$

R La productivité moyenne de chaque facteur dépend donc du rapport de son utilisation avec l'autre.

8.2.3 Les productivités marginales

Definition 8.5 — Productivité marginale. On appelle **productivité marginale** d'un intrant (ou d'un facteur de production), l'augmentation de la quantité de production provoquée par l'augmentation d'une unité de cet intrant (ou de ce facteur de production).
Elles sont mesurées par les dérivées de la production par rapport au travail et au capital, soit $\frac{\partial Y}{\partial L}$ et $\frac{\partial Y}{\partial K}$.

Proposition 8.3

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = c\frac{Y}{L} = c\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}$$

et

$$\frac{\partial Y}{\partial C} = (1-\alpha)\frac{Y}{K} = (1-\alpha)c\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha}.$$

8.2.4 Les rendements décroissants

Definition 8.6 En économie, la **loi des rendements décroissants** énonce le principe selon lequel le rendement marginal (ou productivité marginale) obtenu par l'utilisation d'un facteur de production supplémentaire (le capital ou le travail) diminue, toutes choses égales par ailleurs.

R

- Le facteur de production est traditionnellement le travail ou le capital, mais le raisonnement a été étendu à d'autres champs.
- Elle est aussi connue sous le nom de la **loi des proportions variables**, **loi des rendements non proportionnels** ou **loi des rendements marginaux décroissants**.

Le calcul des dérivés du second ordre permet également de préciser certains aspects du processus de production. On peut écrire en dérivant successivement par rapport an travail, puis au capital :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \alpha(\alpha-1)\frac{Y}{L^2} \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)\cdot\frac{Y}{K^2}$$

R Ces dérivées du deuxième ordre expriment les taux d'accroissement respectifs de la productivité marginale du travail et de la productivité marginale du capital. L'expression $k(k-1)$ est négative puisque $k < 1$, donc la productivité marginale d'un facteur décroît avec l'augmentation de ce facteur à un taux qui décroitt lui-même fortement en valeur absolue. Ceci n'est rien d'autre que la formulation mathémathique de la loi des rendements décroissants.

Preuve.

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left[\frac{\partial Y}{\partial L}\right]$$

puisque :

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = k\frac{P}{L} = \alpha\cdot c\cdot L^{\alpha-1}\cdot K^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = \alpha(\alpha-1)c\cdot L^{\alpha-2}\cdot K^{1-\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)c\cdot L^k\cdot K^{1-\alpha}}{L^2} + \alpha(\alpha-1)\frac{Y}{L^2}$$

de même :

$$\frac{\partial^2 y}{2k^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left[\frac{\partial Y}{\partial K}\right]$$

puisque :

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = (1-\alpha)\frac{Y}{K} = (1-\alpha)c\cdot L^{\alpha}\cdot K^{-\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = (1-\alpha)c\cdot L^{\alpha}\cdot(-\alpha)\cdot k^{-\alpha-1} = \frac{-\alpha(1-\alpha)cL^{\alpha}\cdot K^{1-\alpha}}{K^2} = \alpha(\alpha-1)\frac{Y}{K^2}$$

■