Séries numériques

Notes de cours

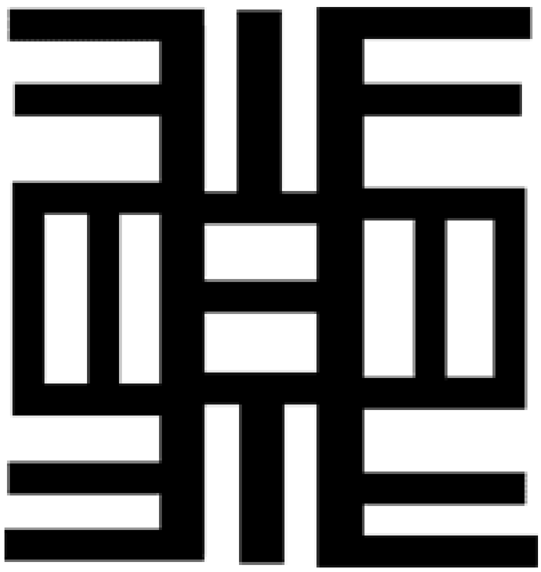
Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Dernière version, décembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu* [1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

III Applications

I Le symbole $\sum$

1. Premières défintions et propriétés

Definition 1.1 Soit (a_i) une suite de nombres réels ou complexes. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$, on définit la somme suivante par :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$$

R

- Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, la somme de tous les termes a_i, i décrivant I sera notée $\sum_{i \in \mathrm{I}} a_i$
- La variable k est une variable muette, c'est à dire qu'une fois la somme calculée, le résultat ne dépend plus de k. On peut donc lui donner le nom qu'on veut : i, j, k, etc. à exception des bornes de la somme, ici p et n : $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{j=p}^{n} a_j$
- Lorsque les termes de la somme ne dépendent pas de la variable, on somme des termes constants donc : $\sum_{k=0}^{n} 3 = \underbrace{3+3\cdots+3}_{n+1 \text{ termes}} = 3(n+1)$
- Si $\mathrm{I} = \{2;4;6\}$ alors $\sum_{i \in \mathrm{I}} a_i = a_2 + a_4 + a_6$.

■ **Exemple 1.1**

- $1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$
- $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$
- $1+2+2^2+\cdots+2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$
- $1+3+5+\cdots+(2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

■

R Attention ! Il ne faut pas confondre

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k + 1$$

Ici, les parenthèses font toute la différence !

Proposition 1.1 — Relation de Chasles et linéarité.

- Relation de Chasles :
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$
- L'opérateur somme est linéaire :
$$\sum_{k=p}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=p}^{n} a_k + \beta \sum_{k=p}^{n} b_k$$

■ **Exemple 1.2**
- $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{2} a_k + \sum_{k=3}^{n} a_k$
- $\sum_{k=0}^{n} \left(3^k + 4k\right) = \sum_{k=0}^{n} 3^k + 4 \sum_{k=0}^{n} k$

■

Proposition 1.2 — Changement d'indice. L'expression à l'aide du symbole $\sum$ n'est pas unique. On peut écrire une somme avec des indices différents. Les changements d'indices $k \to k+p$ (translation) $k \to p-k$ (symétrie) sont les plus fréquents :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=p-n}^{p-1} a_{p-k}$$

■ **Exemple 1.3** Pour calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

- On utilise la linéarité :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$
- On effectue un changement d'indice sur la deuxième somme : $k \to k+1$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$
- On sépare les termes différents :
$$S_n = \overbrace{1}^{k=1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{k=n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

■

R Philosophie à retenir : Si la somme ne commence pas $k=0$, on saura sadapter !

R Attention ! On ne doit pas confondre l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \text{avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

pas plus que l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{avec} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

Comme le montre l'exemple ci-dessous...

■ **Exemple 1.4**

Soit $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6, x_4 = 2$ et $x_5 = 7$ et $y_1 = 2, y_2 = 8, y_3 = 3$, $y_4 = 1$ et $y_5 = 6$.
On a d'une part,

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 + 2^2 + 7^2 = 123$$

et, d'autre part

$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = (3+5+6+2+7)^2 = 23^2 = 52 \neq 123$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5 &= (3\times 2) + (5\times 8) + \cdots + (7\times 6)\\ &= 6 + 40 + \cdots + 42 = 108\end{aligned}$$

et pour finir,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (3+5+\cdots+7)\times(2+8+\cdots+6) = 23\times 20 = 460 \neq 108$$

■

2. Sommes télescopiques

Théorème 2.1 — Sommes télescopiques. Soit une suite (a_n) une suite de nombres réels ou complexes, on a :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad p \leqslant n, \quad \sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$$

Preuve. On pose : $S_n = \sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k)$

- On utilise la linéarité : $S_n = \sum_{k=p}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{n} a_k$
- On effectue un changement d'indice sur la première somme : $k \to k+1$

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=p}^{n} a_k$$

- On sépare les termes différents : $S_n = a_{n+1} + \sum_{k=p+1}^{n} a_k - \sum_{k=p+1}^{n} a_k - a_p = a_{n+1} - a_p$

■

R

- Les sommes télescopiques sont une méthode très efficace pour calculer la somme des termes d'une suite (u_n). Il s'agit de trouver une suite (v_n) pour que $u_n = v_{n+1} - v_n$. Ce n'est bien sûr pas toujours possible malheureusement.
- $\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ et $\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1}$

■ **Exemple 2.1**

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$: on décompose $\frac{1}{k(k+1)}$ en $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- $R_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$: on décompose $k \times k!$ en $(k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1$$

■

3. Sommes à connaître

Proposition 3.1 — Somme d'une constante. Pour tous naturels p et n tels que $p \leqslant n$ et pour tout réel a (indépendant de l'indice de sommation k), on a :

$$\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1) \times a$$

Preuve. Preuve laissée pour le·a lecteur·trice. ■

Proposition 3.2 — Somme des entiers, des carrés, des cubes. Pour tout entier naturel n non nul, on a les relations suivantes :

- $S_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1+8+\cdots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

Preuve.

- $S_1(n)$, on utilise la somme $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right] = (n+1)^2 - 1$

  $$\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2+2k+1-k^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2S_1(n)+n$$

  On en déduit que :

  $$2S_1(n)+n = (n+1)^2 - 1 \Leftrightarrow S_1(n) = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $S_2(n)$, on utilise la somme $\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] = (n+1)^3 - 1$

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right] &= \sum_{k=1}^{n} \left(k^3+3k^2+3k+1-k^3\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2+3k+1\right) \\ &= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 3S_2(n)+3S_1(n)+n\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$3S_2(n)+3S_1(n)+n=(n+1)^3-1 \Leftrightarrow 3S_2(n)=\left[(n+1)^3-1-3S_1(n)-n\right] \Leftrightarrow$$
$$S_2=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)\right]=\frac{2(n+1)^3-3n(n+1)-2(n+1)}{6}$$
$$=\frac{(n+1)\left(2n^2+4n+2-3n-2\right)}{6}=\frac{(n+1)\left(2n^2+n\right)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- - $S_3(n)$, on utilise la somme $\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4-k^4\right]=(n+1)^4-1$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(k+1)^4-k^4\right]=\sum_{k=1}^{n}\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(4k^3+6k^2+4k+1\right)$$
$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1=4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n$$

On en déduit que :

$$4S_3(n)+6S_2(n)+4S_1(n)+n=(n+1)^4-1 \Leftrightarrow$$
$$4S_3(n)=(n+1)^4-1-6S_2(n)-4S_1(n)-n$$
$$=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$
$$=(n+1)\left[(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\right]$$
$$=(n+1)\left(n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1\right)$$
$$=(n+1)\left(n^3+n^2\right)=n^2(n+1)^2$$

■

Proposition 3.3 — Somme géométrique. Pour tous naturels p et n tels que $p \leqslant n$ et pour tout réel q tel que $x \neq 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k=q^p \times \frac{1-q^{n+1-p}}{1-q}$$

R

- Dans le cas où $q=1$, $\sum_{k=p}^{n} q^k=n-p+1$.
- On peut également retenir de manière plus mnémotechnique la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k=\text{ premier terme } \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Preuve. Posons $S_n=\sum_{k=p}^{n} x^k$.

- On utilise une somme télescopique :

$$S_n-xS_n=\sum_{k=p}^{n} x^k-\sum_{k=p}^{n} x^{k+1}=\sum_{k=p}^{n}\left(x^k-x^{k+1}\right)=x^p-x^{n+1}$$

- On factorise : $S_n(1-x)=x^p\left(1-x^{n+1-p}\right) \overset{x\neq 1}{\Longleftrightarrow} S_n=x_p \times \frac{1-x^{n+1-p}}{1-x}$

■

■ **Exemple 3.1** $S=\sum_{k=3}^{n} 2^k=2^3 \times \frac{1-2^{n-2}}{1-2}=2^3\left(2^{n-2}-1\right)=2^{n+1}-8$ ■

Proposition 3.4 — Formule du binôme de Newton. Pour tous nombres réels u et v et pour tout entier naturel n, on a :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

R Cette démonstration est assez "compliquée"... On va raisonner par récurrence et on va devoir manipuler plusieurs fois les indices...
Par ailleurs, il faudra utiliser la relation de Pascal (que l'on va "très rapidement" démontrer) :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Il faut juste se rappeler que pour n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n-1$, on a la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démonstration de la relation de Pascal. Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leqslant n-1$

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \times \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \times \frac{n-k}{n-k} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+(n-k))}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

■

Preuve. • Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{P}(n)$: « Pour tous nombres complexes u et v, on a :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k \text{ »}$$

. • Initialisation : Soit $n = 0$
D'une part, le terme de gauche (la somme) vaut $(u+v)^0 = 1$.
D'autre part, le terme de droite, pour $n = 0$, vaut $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} u^{0-k} v^k = \binom{0}{0} u^0 v^0 = 1$.
On a donc bien l'égalité, et ainsi, on a montré que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathscr{P}(n)$ pour un certain entier naturel n ; autrement dit $\mathscr{P}(n)$: « Pour tous nombres complexes u et v, on a : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$ ».
On veut démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie ; c'est-à-dire « Pour tous nombres complexes u et v, on a :

$$(u+v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{n+1-k} v^k \text{ »}$$

. • <u>Hérédité :</u>

$$
\begin{aligned}
(u+v)^{n+1} &= (u+v)^n \times (u+v) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k\right)\times(u+v) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + \binom{n}{0}u^{n+1-0}v^0 + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}u^{n-k}v^{k+1} + \binom{n}{n}u^{n-n}v^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + u^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}u^{n-k}v^{k+1} + v^{n+1} \\
&\underset{l=k+1}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + u^{n+1} + \sum_{l=1}^{n-1}\binom{n}{l-1}u^{n-(l-1)}v^l + v^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + u^{n+1} + \sum_{l=1}^{n-1}\binom{n}{l-1}u^{n-l+1}v^l + v^{n+1} \\
&= u^{n+1} + v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{n+1-k}v^k + \sum_{l=1}^{n-1}\binom{n}{l-1}u^{n-l+1}v^l \quad (\dagger) \\
&= u^{n+1} + v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)u^{n-k+1}v^k \\
&= \binom{n+1}{n+1}u^{n+1}v^0 + \binom{n+1}{0}u^0v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{n-k+1}v^k \\
&= \binom{n+1}{0}u^0v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{n-k+1}v^k + \binom{n+1}{n+1}u^{n+1}v^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{n-k+1}v^k
\end{aligned}
$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathscr{P}(n)$ est vraie » implique « $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie ».

• <u>Conclusion :</u> Par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie $(i.e.)$ pour tous nombres complexes u et v et pour tout entier naturel n, on a :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{n-k}v^k$$

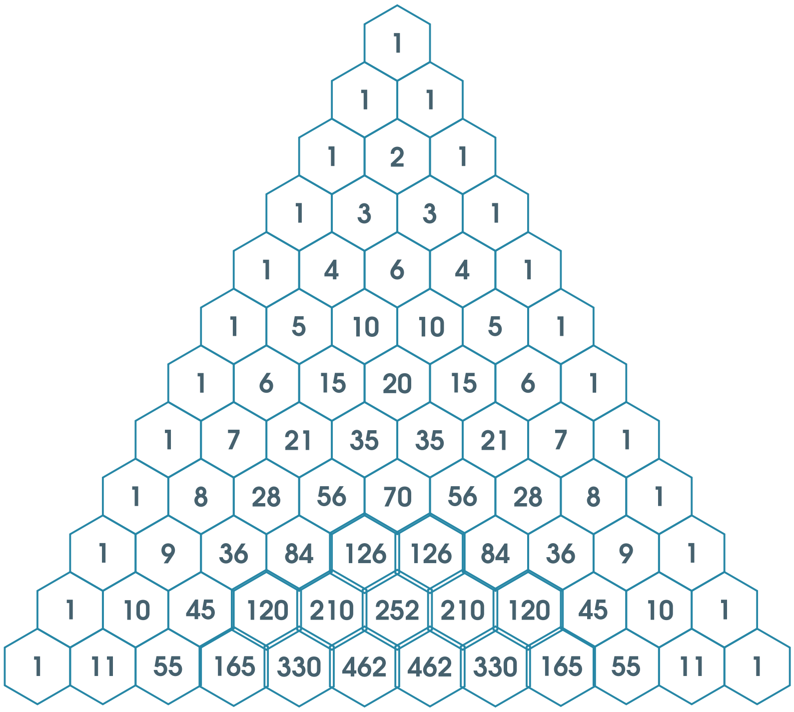
---

† On pourrait se demander où est passer la lettre l... En fait, il s'agit d'une *variable muette* : que l'on appelle l, k ou *Gertrude* n'a aucune importance... ■

R Il est possible de représenter les coefficients binomiaux à l'aide de la formule $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ sous la forme d'un **triangle de Pascal** illustré ci-dessous :

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\cdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Et en plus beau, ça donne ça :



Proposition 3.5 — Factorisation standard. Pour tout naturel n et pour tous réels ou complexes a et b, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Preuve. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^k$, on a alors :

- $aS_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}b^k \overset{k\to k+1}{=} a_n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}b^{k+1}$
- $bS_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}b^{k+1} + b^n$
- Par différence : $(a-b)S_n = a^n + \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}b^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-2} a^{n-k-1}b^{k+1} - b^n = a^n - b^n$

■

4. Sommes doubles

4.1 Sommes doubles à indices indépendants

Definition 4.1 — Somme double à indices indépendants. Soit (a_{ij}) une suite double de nombres réels et soit deux entiers naturels n et p, on a les égalités suivantes :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

Exercice 4.1 Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{2^j}$. ■

Corrigé.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{i}{2^j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} i\times\left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^j\times\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{n(n+1)}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{n}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

■

4.2 Sommes doubles à indices dépendants

Definition 4.2 — Somme double à indices dépendants. Soit (a_{ij}) une suite double de nombres réels et soit deux entiers naturels n et p, on note :

- $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ somme des termes d'un tableau $n\times p$.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ somme triangulaire d'un tableau n^2.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}$ somme triangulaire sans la diagonale.

R On peut schématiser ces sommes double par un tableau double entrée.

- Pour la somme $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij}$, on peut visualiser de la sorte :

$i \backslash j$	1	2	$\dots$	p	Total
1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1p}	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}$
2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2p}	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{np}	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{nj}$
Total	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1}$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i2}$	$\dots$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ip}$	$\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{p} a_{ij}$ $\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$

- Pour la somme $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}$, on peut visualiser de la sorte :

$i \backslash j$	1	2	$\dots$	n	Total
1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}$
2		a_{22}	$\dots$	a_{2n}	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n				a_{np}	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}$
Total	$\sum\limits_{i=1}^{1} a_{i1}$	$\sum\limits_{i=1}^{2} a_{i2}$	$\dots$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{in}$	$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} a_{ij}$ $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=j}^{n} a_{ij}$

- Pour la somme $\sum\limits_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{ij}$, on retire la diagonale...

Exercice 4.2 Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^3}{j(j+1)}$.

Corrigé.

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i^3}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{i^3}{j(j+1)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\left(\sum_{i=1}^{j} i^3\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(j+1)}\times\frac{j^2(j+1)^2}{4}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{4} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} + \frac{n(n+1)}{8}.$$

■

Proposition 4.1 — Développement d'un produit de deux sommes.
Soient $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_p$ nombres réels ou complexes, on a alors :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{j=1}^{p} b_j \times \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_i b_j$
- $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i b_j$ (carré d'une somme)

Preuve.

- La première formule est directement lié à la définition de la somme double.
- Pour le carré d'une somme, on fait intervenir la symétrie du tableau double entrée en séparant la somme en trois parties (le triangle supérieur est identique au triangle inférieur) :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \overbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}}^{\text{triangle supérieur}} + \overbrace{\sum_{1\leqslant i=j\leqslant n} a_{ij}}^{\text{diagonale}} + \overbrace{\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}}^{\text{triangle inférieur}}\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\end{aligned}$$

■

■ **Exemple 4.1** $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ ■

5. Quelques exercices corrigés

Exercice 5.1 Calculer $\sum_{k=2}\left(k^2-3\times 2^k\right)$. ■

Corrigé.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(k^2-3\times 2^k\right) &= \sum_{k=2}^{n}k^2-3\sum_{k=2}^{n}2^k=\sum_{k=1}^{n}k^2-1^2-3\sum_{k=2}^{n}2^k\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-1-3\times 2^2\times\frac{1-2^{n-2+1}}{1-2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+11-3\times 2^{n+1}.\end{aligned}$$

■

Exercice 5.2 Calculer $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$. ■

Corrigé.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

■

Exercice 5.3 Calculer $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$. ■

Corrigé. En posant $i=k-1$ et $j=k+1$ à la deuxième égalité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\sum_{j=3}^{n+1}\frac{1}{j}\\ &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{i=3}^{n-1}\frac{1}{i}\right)-\left(\sum_{j=3}^{n-1}\frac{1}{j}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

■

Exercice 5.4 Développer $(x-2)^4$. ■

Corrigé.

$$
\begin{aligned}
(x-2)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k (-2)^{4-k} \\
&= \binom{4}{0} x^0(-2)^{4-0} + \binom{4}{1} x^1(-2)^{4-1} + \binom{4}{2} x^2(-2)^{4-2} + \binom{4}{3} x^3(-2)^{4-3} + \binom{4}{4} x^4(-2)^{4-4} \\
&= (-2)^4 + 4\times x\times(-2)^3 + 6\times x^2\times(-2)^2 + 4\times x^3\times(-2) + x^4 \\
&= 16 - 32x + 24x^2 - 8x + x^4
\end{aligned}
$$

■

Exercice 5.5 Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k}$. ■

Corrigé.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\frac{n!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k+1}}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} 2^l\binom{n+1}{l} \qquad \text{(en posant } l=k+1\text{)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l} 2^l 1^{n+1-l} - 1\right) = \frac{1}{n+1}\left(3^{n+1}-1\right)
\end{aligned}
$$

■

II

Séries numériques

6. Premières défintions et propriétés

Definition 6.1 — Série de terme général - Somme partielle - Convergence.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On appelle **série de terme général u_n** la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par :
$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
On la note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}, S_n$ est appelée la **somme partielle** d'ordre n de la série.
- On dit que la série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite finie $S\in\mathbb{R}$ appelée **somme de la série** et on note :
$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$
- Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

R

- Attention ! Il ne faut pas mélanger les notations :
  × $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$: la somme partielle d'ordre n (c'est une somme finie qui existe donc toujours).
  × $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum u_n$: la série de terme général u_n, c'est-à-dire la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles (c'est le nom de la suite sans aucun sens sommatoire).
  × $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles (qui existe seulement si la série converge).
- Il est possible que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Dans ce cas, on change la borne inférieure des sommes partielles que l'on rencontre :
$$\forall n\geq n_0,\ \ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$
- La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : étant donné $n_0\in\mathbb{N}$,
$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n \text{ converge.}$$

Proposition 6.1 — Condition nécessaire de convergence.
Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. Le point clé est que l'on retrouve le terme général à partir des sommes partielles par la formule

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers la somme S de la série. Il en est de même de la suite $(S_{n-1})_{n\geq 1}$. Par linéarité de la limite, la suite (u_n) tend vers $S - S = 0$. ■

R Par contraposition, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle diverge grossièrement.

■ Exemple 6.1

- La série $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.
- La série $\sum\limits_{n\geq 1} (1 + \frac{1}{n})$ diverge grossièrement.
- La série $\sum\limits_{n\geq 0} n^2$ diverge grossièrement.

■

R Attention ! La réciproque est fausse : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ n'implique pas que $\sum u_n$ converge. Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (On verra que c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$).

7. Opérations sur les séries

Proposition 7.1 — Opérations sur les séries convergentes.

- Pour tout $\lambda \neq 0, \sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \lambda u_n$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

R Attention ! Il est possible que la série $\sum (u_n + v_n)$ converge alors que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. **On ne peut donc pas scinder la somme d'une série convergente en deux sommes sans avoir vérifié au préalable que ces deux séries convergent.**

Par exemple, on a vu que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est convergente et on verra que les séries $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n+1}$ sont divergentes (séries de Riemann de paramètre $\alpha = 1$). On ne peut donc pas écrire :

$$\xcancel{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}}$$

8. Séries usuelles

8.1 Série harmonique

Definition 8.1 — Série harmonique. On appelle **série harmonique** la série de terme général $\frac{1}{n}$. Sa somme partielle au rang n est donc $\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n}$

Proposition 8.1 — (admise). La série harmonique diverge. Sa limite, lorsque n tend vers linfini est $+\infty$.

8.2 Séries géométriques

8.2.1 Série géométrique

Definition 8.2 — Série géométrique. On appelle **série géométrique** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

■ **Exemple 8.1** • $\sum_{k=0}^{n} 3 \times (-5)^k$, • $\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{3^k}$ ■

Proposition 8.2

$$\sum q^n \text{ converge } \Leftrightarrow |q| < 1$$

Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Preuve. On rappelle : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
On en déduit que la série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
De plus, si $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \lim_{n\to+\infty} \left(1 - q^{n+1}\right).$$

Or, comme $|q| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$. On conclut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

■

Exercice 8.1 Calculer la limite de $\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k}\right)$.

Corrigé. Soit $n \geqslant 2$. On commence par factoriser par 2 .

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k}$$

puis on souhaite que l'indice commence à 0 pour appliquer la formule précédente. On effectue donc le changement d'indice $j = k-2$.

$$2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{3^k} = 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^{j+2}} = 2\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^2}\frac{1}{3^j} = \frac{2}{9}\sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^j}$$

enfin, on applique la formule.

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3^k} = \frac{2}{9} \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{3^j} = \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

■

8.2.2 Séries géométriques dérivée d'ordre 1 et 2

Definition 8.3 — Séries géométriques dérivée d'ordre 1 et 2.

- On appelle **série géométrique dérivée d'ordre 1** toute série dont le terme général est de la forme nq^{n-1}, avec $q \in \mathbb{R}$.
- On appelle **série géométrique dérivée d'ordre 2** toute série dont le terme général est de la forme $n(n-1)q^{n-2}$, avec $q \in \mathbb{R}$.

Proposition 8.3

- $\sum nq^{n-1}$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$.
  Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.
- $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge $\Leftrightarrow |q| < 1$.
  Si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Preuve.

- Soit $n \geqslant 1$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$. On sait :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On sait aussi que f_n est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$ en tant que polynôme, et :
– d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1},$$

– d'autre part, soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, :

$$f_n'(x) = \frac{(1-x)(n+1)x^n + \left(1-x^{n+1}\right)}{(1-x)^2} = \frac{1+(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, soit $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} = f_n'(q) = \frac{1+(n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2}$$

Or, on sait par croissances comparées :

$$\lim_{n\to+\infty} nq^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q \in]-1,1[$$

On en déduit que :

– la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^{n-1}$ converge si et seulement si $q \in]-1,1[$,

– dans ce cas (le cas $q \in]-1,1[$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} kq^{k-1} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+(n+1)q^n - nq^{n+1}}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1+0-0}{1-q^2} = \frac{1}{1-q^2}
\end{aligned}$$

- De manière analogue, en dérivant une nouvelle fois la fonction f_n, on obtient

  – la série $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $q \in]-1,1[$,

  – $\forall q \in]-1;1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$.

■

Exercice 8.2 Soit $|q| < 1$. Établir la convergence de la série $\sum n^2 q^n$ et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k$.

Corrigé. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que pour tout $k \geqslant 0, k^2 = k + k(k-1)$, donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 q^k &= \sum_{k=0}^{n} (k+k(k-1))q^k \\
&= q\sum_{k=0}^{n} kq^{k-1} + q^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)q^{k-2}
\end{aligned}$$

Or, $|q| < 1$, donc les séries géométriques dérivées $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ de raison q convergent et on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k &= \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{2q^2}{(1-q)^3} \\
&= \frac{q(1-q)+2q^2}{(1-q)^3} \\
&= \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}
\end{aligned}$$

■

8.3 Série exponentielle

Definition 8.4 — Série exponentielle. On appelle <u>**série exponentielle**</u> toute série dont le terme général est de la forme $\frac{x^n}{n!}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 8.4 — (admise). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série exponentielle, de terme général $\frac{x^n}{n!}$, est convergente et

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

■ **Exemple 8.2** En particulier

- $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$
- $e = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots$

■

8.4 Séries de Riemann

Definition 8.5 — Série de Riemann. On appelle <u>**série géométrique**</u> toute série dont le terme général est de la forme $\frac{1}{n^\alpha}$, où α désigne un réel strictement positif.

■ **Exemple 8.3**

- La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (et de somme $\frac{\pi^2}{6}$).

■

Proposition 8.5 — (admise). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

8.5 Récapitulatif

SÉRIES USUELLES		CAS DE CONVERGENCE	SOMME DE LA SÉRIE
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES	$\sum\limits_{n\geq p} q^n$	$\lvert q\rvert < 1$	$\sum\limits_{n=p}^{+\infty} q^n = \frac{q^p}{1-q}$
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES DÉRIVÉES D'ORDRE 1	$\sum\limits_{n\geq 1} nq^{n-1}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$
SÉRIES GÉOMÉTRIQUES DÉRIVÉES D'ORDRE 2	$\sum\limits_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$	$\lvert q\rvert < 1$	$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$
SÉRIES EXPONENTIELLES	$\sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
SÉRIES DE RIEMANN	$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$	

III

Applications

9. Quelques rappels sur les variables aléatoires

Dans cette partie, on considérera une expérience aléatoire dont on notera Ω l'univers des possibles. On notera P une probabilité sur Ω.

Definition 9.1 — Variable aléatoire.
Une variable aléatoire réelle X définie sur lunivers Ω est une fonction définie sur à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On a donc :

$$X\ :\ \begin{cases} \Omega & \to \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto X(\omega) \end{cases}$$

R Pour la suite, on considèrera une variable aléatoire X définie sur $\Omega = \{\omega_i;\ i \in I\}$ et on note $\{x_j;\ j \in J\}$ l'ensemble des valeurs prises pas X (avec I et J sont finis ou dénombrables).

Definition 9.2 — Espérance - Variance.

- L'**espérance** d'une variable aléatoire X, prenant les valeurs dans l'ensemble $\{x_j;\ j \in J\}$ est définie par
$$E(X) = \sum_{j\in J} x_j P(X = x_j)$$
- La **variance** d'une variable aléatoire X, prenant les valeurs dans l'ensemble $\{x_j;\ j \in J\}$ est définie par
$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{j\in J} (x_j - E(X))^2 P(X = x_j)$$

R Par positivité de lespérance, une variance est donc toujours positive. On peut ainsi définir lécart-type dune variable X admettant une variance par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Théorème 9.1 — Théorème de König-Huygens. Soit X une variable alétoire discrète telle que $E(X)$ et $E(X^2)$ existent, alors :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - (E(X))^2$$

R La démonstration est relativement simple et algébrique. Trois points sont à rappeler :

- le développement du binôme de Newton ;
- la linéarité de l'espérance en fonction de la variable aléatoire ;
- l'espérance d'une constante vaut cette constante.

Preuve. Par définition, on a

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

On développe le carré, puis on utilise la linéarité de l'espérance :

$$V(X) = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) = E(X^2) - 2E(X)\cdot E(X) + \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

■

Pour une petite mise en bouche concernant la manipulation de l'espérance et de la variance, regardons la très sympathique loi de Bernoulli.

Definition 9.3 — Loi de Bernoulli. On réalise une épreuve de Bernoulli dont le succès S a pour probabilité p.
Une variable aléatoire X est une **variable aléatoire de Bernoulli** lorsquelle est à valeurs dans $\{0;1\}$ où la valeur 1 est attribuée au succès.
On dit alors que X **suit la loi de Bernoulli de paramètre** p.
Autrement dit, on a $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$.
On peut résumer la loi de Bernoulli par le tableau suivant.

x_i	1	0
$P(X=x_i)$	p	$1-p$

Proposition 9.1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) == p(1-p)$$

Preuve.

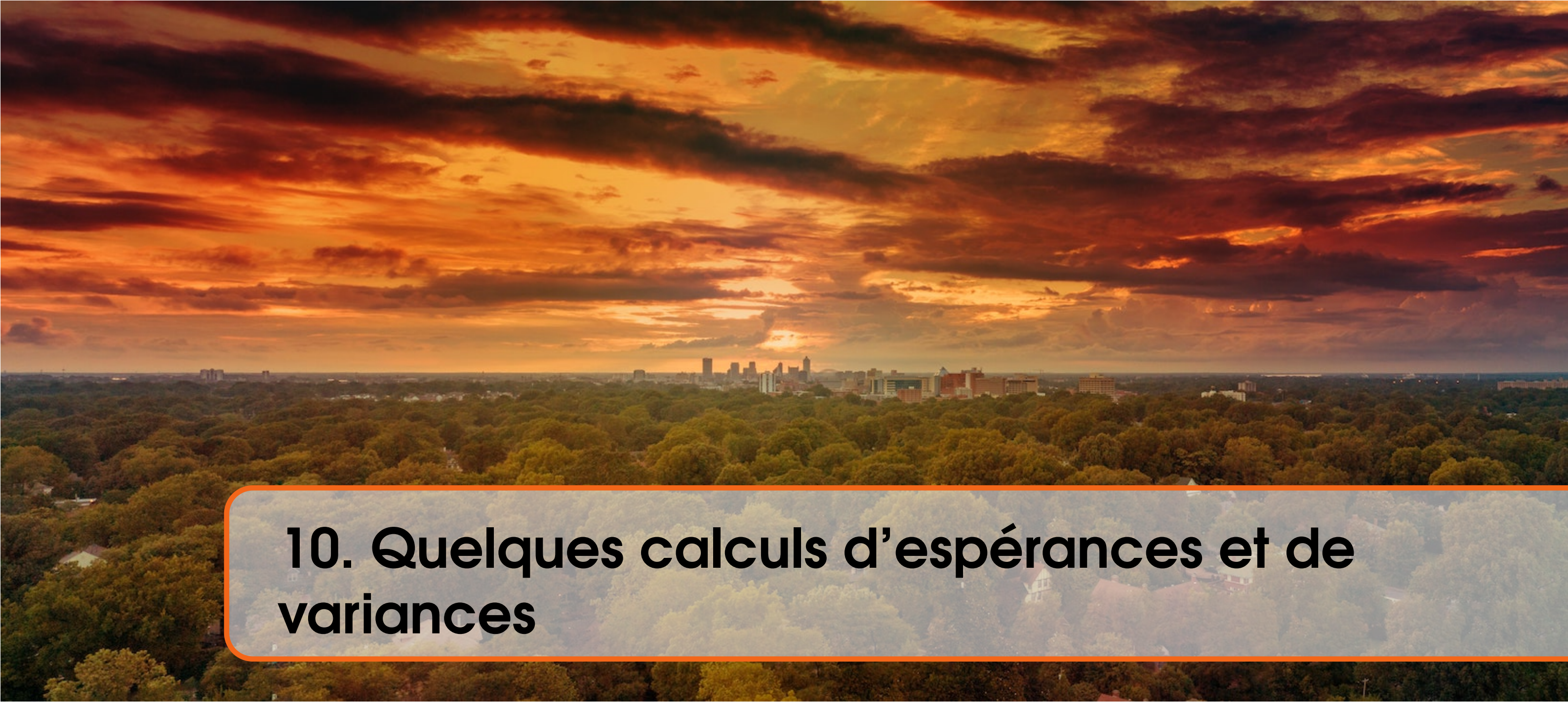
- L'espérance $E(X)$ de X vaut :

$$E(X) = P(X=1)\times 1 + P(X=0)\times 0 = p\times 1 + (1-p)\times 0 = p$$

- La variance $V(X)$ de X vaut :

$$\begin{aligned} V(X) &= P(X=1)\times(1-E(X))^2 + P(X=0)\times(0-E(X))^2 \\ &= p\times(1-p)^2 + (1-p)\times(0-p)^2 \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p)(1-p+p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

■



10. Quelques calculs d'espérances et de variances

10.1 Loi uniforme discrète

Proposition 10.1 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{1;2;\ldots;n\}$. Alors

$$E(X)=\frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

Preuve. Pour tout entier $k\in\{1;2;\ldots;n\}$, on a $P(X=k)=\dfrac{1}{n}$.

- Pour le calcul de l'espérance, on a :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP([X=k])=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

- Pour calculer la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens $\mathbb{V}(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2$:

$$E\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n} k^2P([X=k])=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)&=E\left(X^2\right)-E(X)^2\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\&=\frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12}\\&=\frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

■

Exercice 10.1 Soient a et b deux entiers tels que $a\leqslant b$.
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{a;\ldots;b\}$.
Montrer que

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{(b-a)(b-a+2)}{12}$$

■

10.2 Loi binomiale

Proposition 10.2 Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p. Alors

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 10.2 Pour cette preuve, nous aurons besoin de la formule suivante :

$$\forall n > k > 1, \; k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Il ne reste plus qu'à la démontrer... ■

Preuve.

- Calculons $E(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)} \\
&= np\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{(n-1)-j} \\
&= np
\end{aligned}$$

- Calculons $E\left(X^2\right)$:

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= \sum_{k=1}^{n} k^2P([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\times k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} nk\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)\binom{n-1}{j} p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)} \\
&= np\left(\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{(n-1)-j} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{(n-1)-j}\right) \\
&= np((n-1)p+1) \\
&= np(np+1-p) \\
&= n^2p^2 + np(1-p)
\end{aligned}$$

D'après la formue de Koenig-Huyghens, on en déduit que

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = n^2p^2 + np(1-p) - (np)^2 = np(1-p)$$

■

10.3 Loi de Poisson

Proposition 10.3 Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Preuve.

- Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

- Pour la variance, on a

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On écrit que $k^2 = k(k-1) + k$ et donc

$$E(X^2) = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

On en déduit que

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \lambda$$

■

10.4 Loi géométrique

Proposition 10.4 Soit $p \in]0,1[$. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p. Alors

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Preuve.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} kP([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}$$

Or la série géométrique dérivée $\sum_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ de raison $(1-p) \in]-1,1[$ est convergente.

De plus :

$$E(X) = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

- On rappelle : $\forall k \in \mathbb{N}, k^2 = k(k-1) + k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k^2 P([X=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1} \qquad \big(\text{car } k^2 = k(k-1)+k\big) \\
&= p(1-p) \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p) \sum_{k=2}^{n} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} \qquad \big(\text{car } 1(1-1)(1-p)^{1-2} = 0\big)
\end{aligned}$$

Or la série géométrique dérivée d'ordre 1 $\sum_{k \geqslant 1} k(1-p)^{k-1}$ et la série géométrique dérivée d'ordre 2 $\sum_{k \geqslant 2} k(k-1)(1-p)^{k-2}$, toutes deux de raison $(1-p) \in]-1,1[$ sont convergentes. De plus :

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right) &= p(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + p\frac{1}{(1-(1-p))^2} \\
&= 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huyghens, on en déduit :

$$\mathbb{V}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

■

