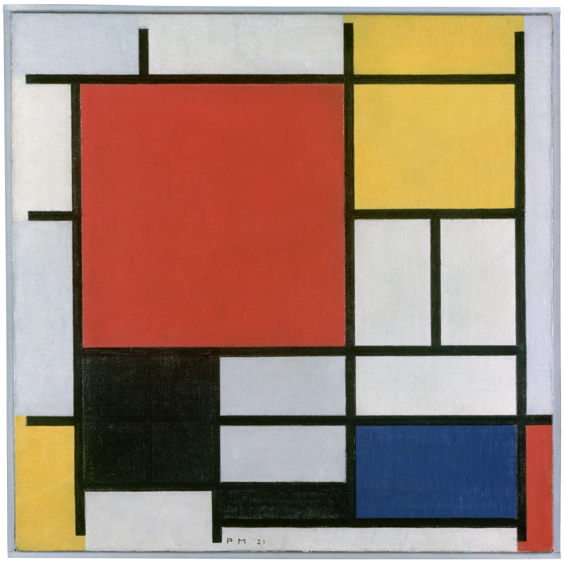


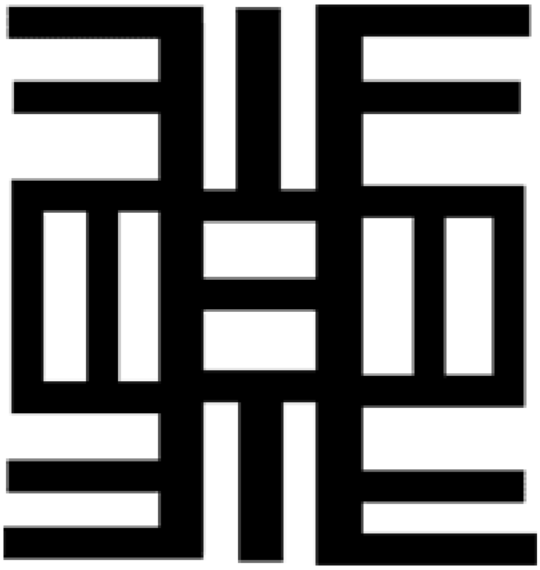
Composition en rouge, jaune, bleu et noir, 1921,
huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm, Gemeentemuseum.

Colorier à la manière de Mondrian

« Où se cachent les Mathématiques ? »
Journées Nationales de l'APMEP - 2022

M. Mohamed Nassiri

2022



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

1 Présentation de l'IREM de Lille et du Groupe Informatique

• L'IREM de Lille est un institut :
- de recherche sur l'enseignement des mathématiques et sur ses perspectives ;
- de formation des enseignants par des actions s'appuyant sur les recherches fondamentales et appliquées en didactique des mathématiques, en histoire et épistémologie des mathématiques, en sciences de l'éducation ;
- de production et de diffusion de supports éducatifs (articles, brochures, revues, documents pour les enseignants,...).

• Il y a plusieurs groupes de recherches :
- Groupe ArSIN (Activités Réalisées Collaborativement avec des Supports Informatiques)
- Groupe Astronomie
-Groupe EMTA (Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens)
- Groupe GHLAM (Géographie – Histoire – Lettres Anciennes – Mathématiques)
- Groupe Jeux
- Groupe Labo'
- Groupe Regard
- Groupe Primaire
- Groupe Rallye
- **Groupe Informatique**

Le site de l'IREM de Lille fait peau neuve en 2021-2022 : https://irem.univ-lille.fr/site_wp/

• Objectifs du Groupe Informatique de l'IREM de Lille :
- Informatique sans ordinateur
- Former des enseignants à l'informatique
- Informatique au féminin
- Didactique de l'informatique

2 Regard & Informatique ?

2.1 Qu'est-ce que l'informatique ?

Il est légitime de se poser la question suivante :

Quel lien pourrait-il y avoir entre « le regard » et « l'informatique » ?

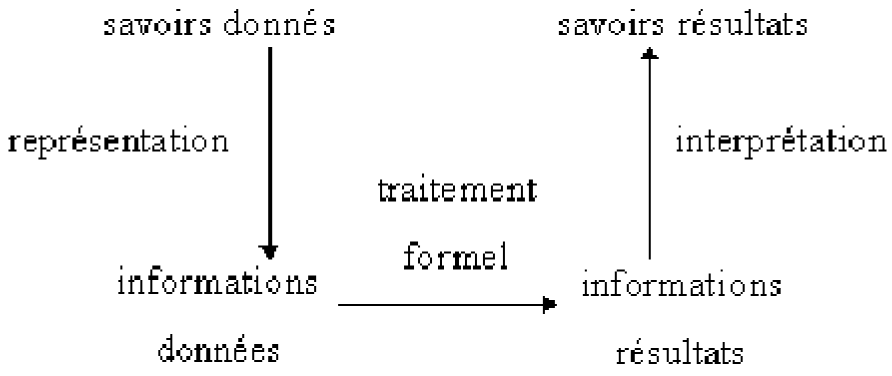
Avant de répondre à cette question, il est important de rappeler que le statut de l'informatique en tant que discipline est ambigu et mal compris : est-il à chercher du côté de la science ou du côté de la technique ? Quel est l'objet d'étude propre aux informaticiens ? Quelles sont leurs vraies compétences ?

Avant de nous engager sur ces points, commençons par éliminer les mauvaises réponses :
- l'informatique n'est pas la "science des ordinateurs" (ce que, pourtant, laisse croire sa traduction anglaise, "computer science") : non, les informaticiens ne savent pas nécessairement réparer un ordinateur en panne, diagnostiquer un problème électronique ou effectuer des branchements compliqués, ils ne sont pas toujours les meilleurs guides quand il s'agit d'acheter un nouveau modèle de scanner ou de modem ; oui l'informatique peut s'étudier avec un papier et un crayon, même en absence d'ordinateur...
- l'informatique n'est pas la "science des logiciels" : non, les informaticiens ne connaissent pas nécessairement toutes les nouvelles versions des programmes du commerce, ils ne savent pas toujours utiliser toutes leurs fonctions, ils ne passent pas (toujours) leurs journées à tester des jeux ou à chercher des bugs...

Le terme "informatique" lui-même a été proposé en 1962 par Philippe Dreyfus pour l'Académie Française. Ce mot est construit par contraction de "information" et "automatique" et sa définition officielle est "la science du traitement de l'information considérée comme le support formel des connaissances". Si on veut être encore plus précis, on peut définir l'informatique comme la science de tous les traitements effectifs applicables à des données discrètes.

Concrètement, cette discipline se décline suivant de nombreuses variantes, allant de la plus théorique (étudier la complexité d'un problème) à la plus ludique (programmer un jeu). Mais elle a une constante : la démarche d'un informaticien confronté à un problème donné se caractérise toujours par un effort de modélisation qui opère à deux niveaux :
- d'une part en trouvant un équivalent discret, numériques aux données réelles du problème, en cherchant pour elles un bon codage, une bonne représentation ;
- d'autre part en exprimant sous forme de règles formelles, d'algorithmes, les conditions de modifications de ces données permettant d'aboutir à un résultat.

Cette méthodologie est résumée dans le schéma de la figure suivante (dû à Jacques Arsac, un des pionniers de l'informatique en France).



2.2 La théorie des graphes

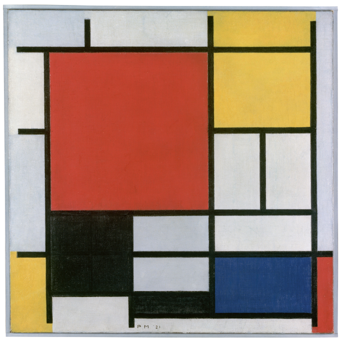
La théorie des graphes est un formidable pont entre les « Mathématiques pures », l'Informatique et les problèmes concrets de la vie courante.
Même si l'on se doute que certains domaines, comme les réseaux sociaux, les réseaux de transports, etc. sont facilement transcriptibles en graphe, pour certains, c'est plutôt inattendu, voir troublant.
L'optimisation de la réalisation d'un emploi du temps, le coloriage d'une carte avec conditions, etc. **Pour résoudre certains problèmes (très concrets parfois), il faut changer notre regard sur celui-ci.**

3 Colorier à la manière de Mondrian

3.1 Piet Mondrian

Pieter Cornelis Mondriaan, appelé Piet Mondrian à partir de 1912, né le 7 mars 1872 à Amersfoort aux Pays-Bas, et mort le 1er février 1944 à New York, est un peintre néerlandais reconnu comme l'un des pionniers de l'abstraction.

Mouvement : Art abstrait, néoplasticisme.
Influencé par : Cubisme, Société théosophique, anthroposophie, Bart van der Leck, Pablo Picasso.



Composition en rouge, jaune, bleu et noir, 1921,
huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm, Gemeentemuseum.

3.2 Le théorème des quatre couleurs

3.3 Activité pratique : Colorier à la manière de Mondrian

A l'aide des documents *« Tableau de Mondrian vierge (Débutant) »* et/ou *« Tableau de Mondrian vierge (Avancé) »*, colorier à la manière de Mondrian avec le minimun de couleurs possibles dans l'objectif d'avoir chaque case d'une couleur différente de sa voisine.

> *« De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum pour colorier n'importe quelle carte géographique, avec la contrainte que deux pays partageant une frontière commune doivent être coloriés de couleur différente ? Le théorème des quatre couleurs affirme que quatre couleurs suffisent. Ce théorème a été prouvé en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken : à l'époque c'était le premier théorème prouvé à l'ordinateur. Et maintenant, au 21e siècle, il continue à fasciner les mathématiciens. »*

Remarque : Existe-t-il une preuve qui ne nécessite pas le recours à l'ordinateur ?

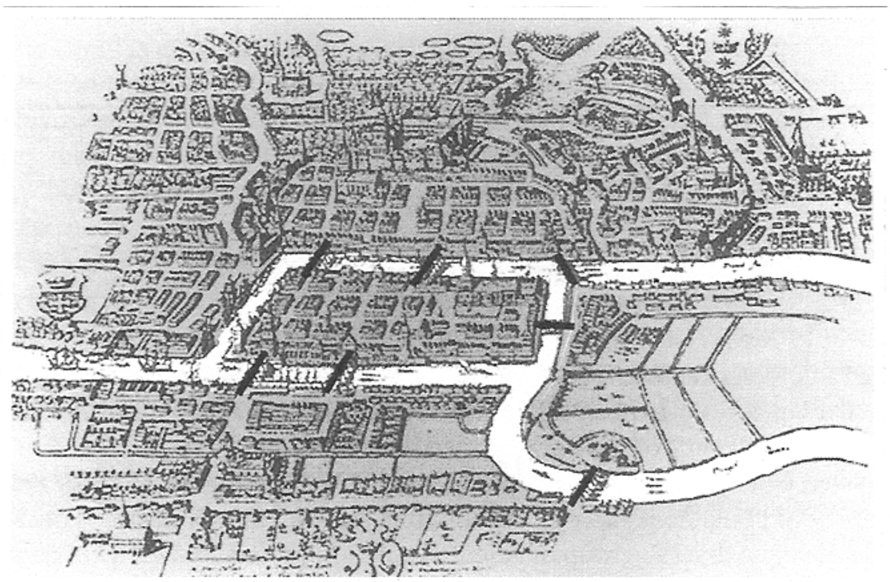
Un tel débat est lancé dans la communauté mathématique chaque fois qu'elle est confrontée à une preuve par l'ordinateur. Dans le cas du théorème des quatre couleurs, il existe d'autres preuves assistées par ordinateur et la communauté ne doute pas que le théorème est vraiment prouvé. Mais, beaucoup de mathématiciens continuent à croire qu'il doit être possible de donner une preuve « classique » du théorème des quatre couleurs, sans recours à l'ordinateur. Par contre, il faut une idée nouvelle. C'est ce qu'ont proposé Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka dans leur conférence au Congrès international des mathématiciens de 2018 : soit d'utiliser leurs nouveaux théorèmes de topologie algébrique pour montrer que le problème équivalent de coloriage des arêtes d'un graphe avec trois couleurs est possible. Nous verrons si leur approche sera fructueuse.
Une autre preuve par ordinateur très célèbre est celle par Thomas Hales de la conjecture de Kepler sur l'empilement des sphères, affirmant que l'empilement le plus dense est celui qu'on observe sur les étals d'oranges.

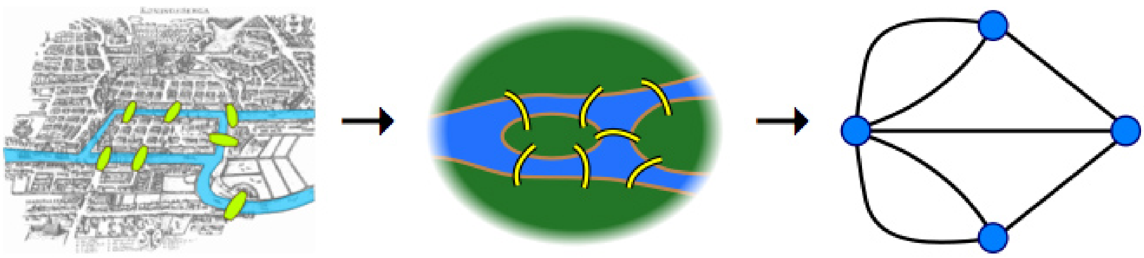
4 Changer son regard sur le problème : Problème des sept ponts de Königsberg

4.1 Le problème

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la topologie et de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler en 1735, ce problème mathématique se présente de la façon suivante :

> *« La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts. »*

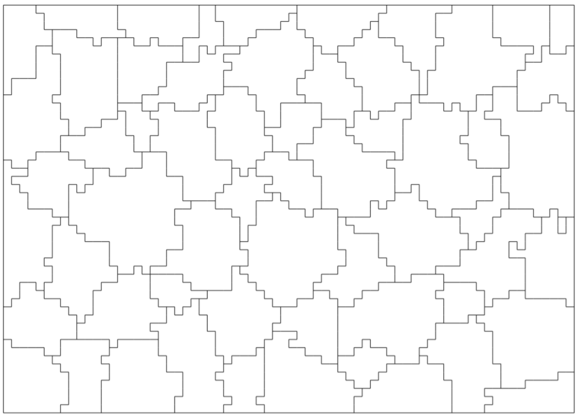




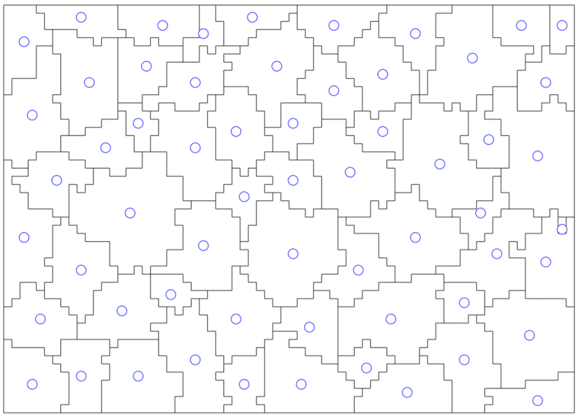
4.2 Solution du problème

Une telle promenade n'existe pas, et c'est Euler qui donna la solution de ce problème en caractérisant les graphes que l'on appelle aujourd'hui « eulériens » en référence à l'illustre mathématicien, à l'aide d'un théorème dont la démonstration rigoureuse ne fut en fait publiée qu'en 1873, par Carl Hierholzer.

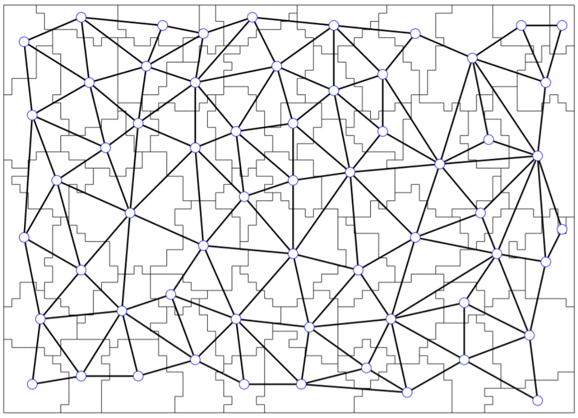
5 Introduction au coloriage de graphe



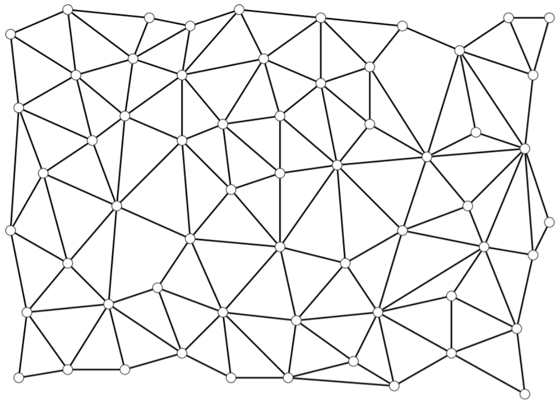
Etape 0



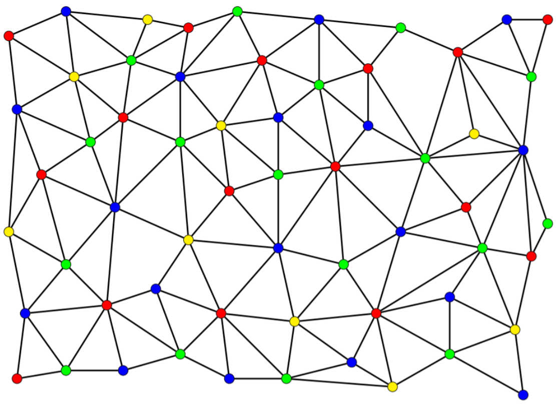
Etape 1



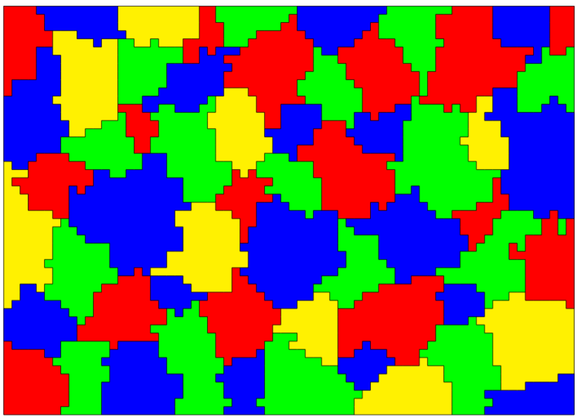
Etape 2



Etape 3

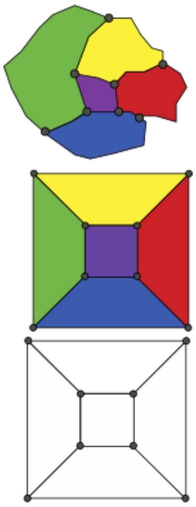


Etape 4



Etape 5

6 Méthode et éléments de preuves



On aura besoin ici d'une autre modélisation... Dans le cas du coloriage d'une carte, on la modélise par un **graphe planaire**. Les sommets sont les points où au moins trois frontières se rejoignent, les arêtes sont les morceaux de frontière entre les sommets. Comme le graphe est dans un plan, les arêtes séparent les faces. Les illustrations à gauche montrent comment modéliser une carte par un graphe. Colorier la carte revient à colorier les faces.

Dans le problème des quatre couleurs, il suffit de se limiter à des **graphes connexes**, c'est-à-dire en un seul morceau. En effet, si on a deux morceaux de carte qui ne se touchent pas, on choisit la couleur du fond et on colorie indépendamment les deux morceaux.

Pour toutes les cartes, il y a un fait important :

Lemme 1. *Il y existe toujours quelque part une région qui possède 5 frontières ou moins.*

Démonstration. Étant donné un graphe planaire connexe, soit S son nombre de sommets, A, son nombre d'arêtes et F, son nombre de faces (incluant la face infinie). Alors, on a la formule

$$S - A + F = 2 \qquad (\dagger)$$

On appelle **degré d'un sommet** le nombre d'arêtes issues de ce sommet. Sous l'hypothèse que le degré de chaque sommet vaut au moins 3 (ce qui est le cas dans le graphe d'une carte), une conséquence de la formule d'Euler, est que :

$$3S \leqslant 2A$$

En effet, chaque sommet est attaché à au moins trois arêtes et chaque arête est partagée par deux sommets.
D'où

$$S \leqslant \frac{2}{3}A$$

En remplaçant dans (†), cela donne

$$F - \frac{A}{3} \geqslant 2 \qquad (\dagger\dagger)$$

Si toutes les faces étaient limitées par au moins six arêtes on aurait,

$$6F \leqslant 2A$$

puisqu'une arête est partagée par deux faces. D'où

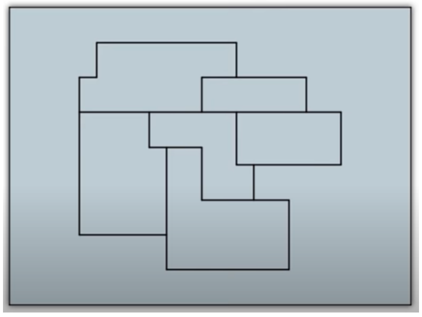
$$F - \frac{A}{3} \leqslant 0$$

Contradiction avec (††). Donc, il existe une face qui a au plus cinq arêtes. $\square$

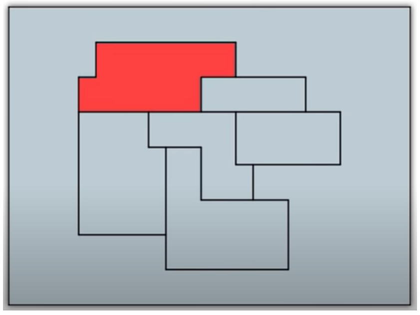
Remarque : Ce lemme est essentiel pour prouver que toute carte est colorable avec au plus 6 couleurs.

6.1 Théorème des 6 couleurs

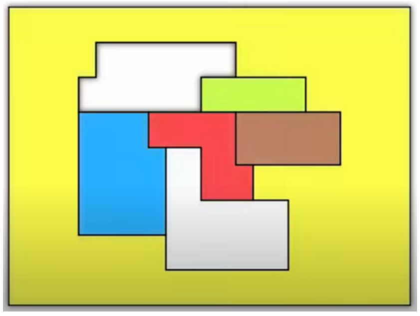
Prenons une carte composée de 7 régions.



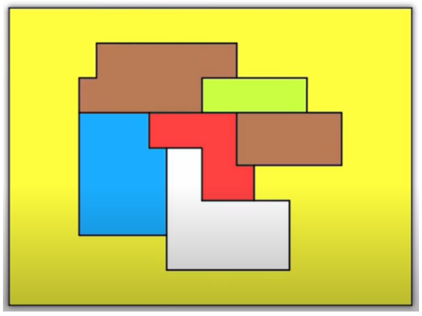
D'après ce que l'on vient de voir, il y existe au moins une région qui possède moins de 5 frontières. On en choisit une, et on la supprime.



Notre carte possède donc maintenant 6 régions, et je peux naturellement la colorier avec 6 couleurs.



Replaçons alors la région retirée. Puisque celle-ci n'avait pas plus de 5 frontière, il reste donc au moins une couleur de disponible.

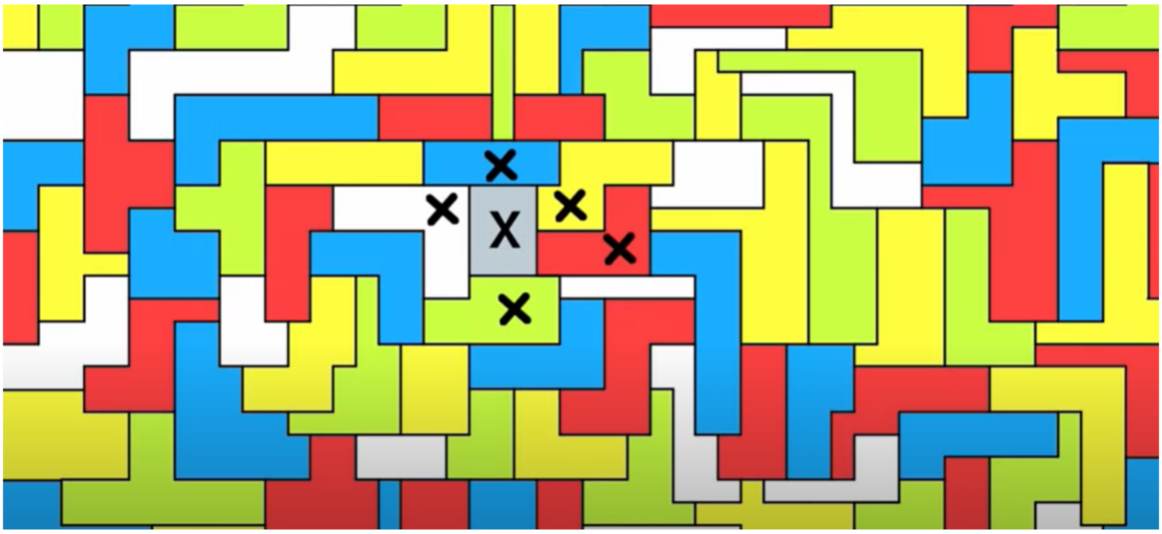


Ceci prouve donc que toute carte à 7 régions est 6-coloriable. L'argument fonctionne aussi pour les cartes à 8 régions. Il y existe un région à 5 frontière que l'on retire. On a alors une carte à 7 régions, que l'on vient de prouver comme étant 6-coloriable. On replace la région retirée, et le tour est joué. De proche en proche, on peut donc prouver qu'une carte à 9 régions, à 10 régions, et, finalement, à n'importe quelle nombre de régions, est 6-coloriable. On aura reconnu le principe d'une démonstration par récurrence.

6.2 Théorème des 5 couleurs

Pour cela, il n'y a pas vraiment le choix non plus, il faut à nouveau procéder par récurrence. Déjà, il est assez clair que toute carte possédant 5 régions ou moins peut être colorée avec 5 couleurs. Ça, c'est la première étape de la récurrence, l'initialisation.

Pour la suite, le principe est le même qu'au dessus à l'exception d'un cas un peu pénible... : si les 5 régions frontalières à la région que l'on retire temporairement (notée X ici) sont toutes de couleur différente ? Eh bien, il va falloir toucher à la coloration du reste de la carte.



On va devoir définir la notion de **composante de Kempe**...

Définition 2. *Une chaine de Kempe de couleurs a et b (deux couleurs) est l'ensemble des régions connectées qui possèdent l'une de ces couleurs.*
Il est possible de se rendre d'une région quelconque de la chaine à une autre en restant sur ces deux couleurs.

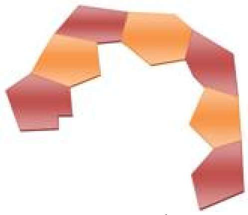
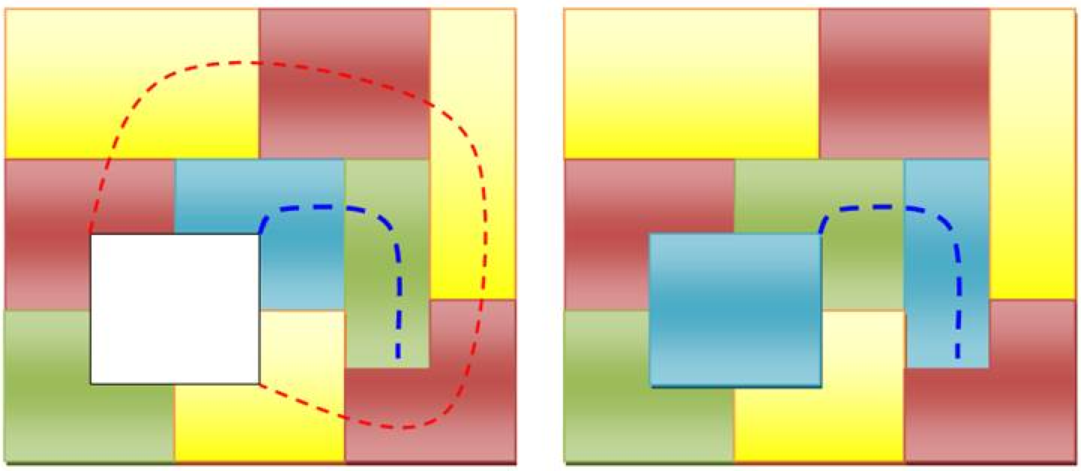


Illustration du procédé de Kempe (dans le cas du théorème des 4 couleurs !)
La carte est déjà colorée avec quatre couleurs. Reste une région à colorer qui, a priori, nécessite une cinquième couleur car déjà entourée des quatre couleurs.



Nous cherchons un chaine de Kempe rouge/jaune qui réalise un circuit partant de la zone blanche et revenant vers la zone blanche.
La chaine bleu/vert qui part de la zone blanche ne peut pas revenir vers la case blanche, car le circuit croiserait le précédent.

Par contre, rien ne nous interdit d'y inverser les couleurs. Cela ne change pas les compatibilités avec les autres régions rouges/jaunes.
Cette inversion est bénéfique car désormais la case blanche n'est entourée que de trois couleurs et elle peut prendre la quatrième, ici le bleu.

Grâce à ce procédé, on peut donc démontrer par récurrence que toute carte est 5-colorable !

6.3 Théorème des 4 couleurs

Les nombreux travaux effectués au cours du XXe siècle ont révélé que pour parvenir à une preuve irréfutable il fallait étudier des milliers de configurations. Il faudra donc attendre un siècle pour que Kenneth Appel et Wolfgang Haken, en 1976, établissent la première preuve du Théorème des quatre couleurs. Il aura fallu 1200 heures de calculs pour effectuer la première démonstration mathématique nécessitant l'usage d'un ordinateur. La question reste ouverte quant à l'existence d'une preuve sans machine...

Références

- Isabelle Tellier, « *Qu'est-ce que l'informatique ?* », Université Paris 3 - Sorbonne Nouvelle - Laboratoire LaTTiCe, 2008.
- Amy Langville et Carl Meyer, « *Google page rank and beyond* », Princeton Univ Pr, 2006.
- Marc Timme, Frank van Bussel, Denny Fliegner, and Sebastian Stolzenberg, « *Counting Complex Disordered States by Effiecient Pattern Matching : Chromatic Polynomials and Potts Partition Functions* », New Journal of Physics 11 (2009), 023001, February 4th, 2009
- Michaël Rao, « *Théorème des 4 couleurs : preuve et démonstration(s) par ordinateur*, CNRS - ENS Lyon Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, équipe MC2
- Christiane Rousseau, « *Le théorème des quatre couleurs*, Revue Accromath, Québec.
- Jérôme Cottanceau, *Deux (deux ?) minutes pour le théorème des 4 couleurs*, http ://eljjdx.canalblog.com/.