Suites

Notes de cours

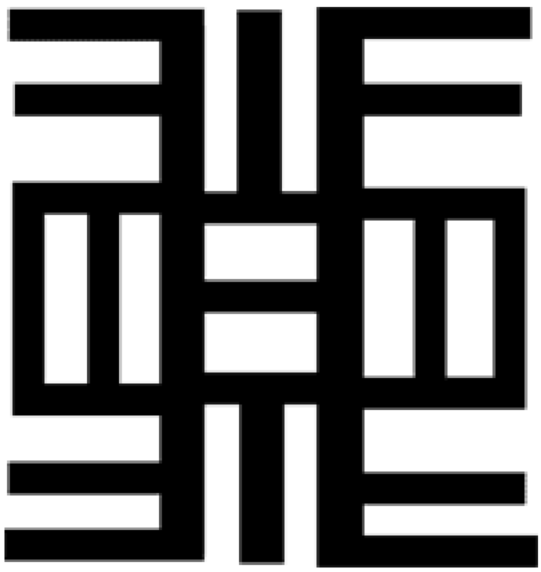
Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Dernière version, septembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Raisonnement par récurrence

II Suites numériques

III Suites particulières

Raisonnement par récurrence

1. Raisonnement par récurrence

Definition 1.1 Une **propriété mathématique** est une phrase, écrite ou non avec des symboles mathématiques, qui est soit vraie, soit fausse.

R Lorsqu'une propriété concerne un entier naturel n (ce qui sera souvent le cas dans ce chapitre), on peut la noter $\mathscr{P}(n)$.

■ **Exemple 1.1** Voici quelques exemples de propriétés mathématiques :
- $\mathscr{P}(n) : 1+2+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;
- $\mathscr{P}(n) : (1+\pi)^n \geq 1+n\pi$;
- $\mathscr{P}(n) : n^3 - n$ *est un multiple de* 3 ■

Proposition 1.1 — Axiome - Principe de récurrence.
$\mathscr{P}(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.
Si l'on démontre les deux étapes suivantes :

• Etape 1 (**initialisation**) : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier n_0 ;

• Etape 2 (**hérédité**) : pour tout entier $k \geq n_0$, « $\mathscr{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie » ;

Alors on peut conclure que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$.

On peut schématiser le principe de la récurrence comme suit :

Initialisation	**Hérédité**
$\mathscr{P}(n_0)$ **vraie**	Pour tout entier $k \geq n_0$, « $\mathscr{P}(k)$ est **vraie** » **implique** « $\mathscr{P}(k+1)$ est **vraie** »

Conclusion : $\mathscr{P}(n_0)$ **vraie** $\Rightarrow$ $\mathscr{P}(n_0+1)$ **vraie** $\Rightarrow$ $\mathscr{P}(n_0+2)$ **vraie** $\Rightarrow$ $\ldots$ $\Rightarrow$ $\mathscr{P}(n)$ **vraie**.

Heuristique. On compare très souvent le principe de la récurrence ou *principe des dominos*. Cependant, il faut bien comprendre toute l'analogie et la subtilité !

On considère une suite de dominos.

Si un domino tombe alors le suivant tombera.

Comme le premier tombe alors le second tombera, puis le troisième, ...etc..
Conclusion : si le premier domino tombe alors tous tomberont.

Tout repose en fait sur le *principe de propagation* : "si l'un tombe alors le suivant aussi". C'est une sorte de réaction en chaîne.

Le raisonnement par récurrence comporte deux phases :
1) Prouver que le premier domino tombe.
2) Etablir le principe : si le $n$ième domino tombe alors le suivant (le numéro $n+1$) tombera.

Si on démontre ces deux choses alors la réaction se déclenche. Donc la propriété est démontrée pour tous les dominos !
Sauf qu'ici, un domino numéro n qui tombe est une propriété ou une formule vraie au rang n. ■

R **Raisonnement par récurrence**
$\mathscr{P}(n)$ désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.
Voici comment l'on procède pour démontrer par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$:

• Etape 1 (**Enoncé de la propriété**) : On rédige clairement la propriété $\mathscr{P}(n)$ à démontrer.

• Etape 2 (**initialisation**) : On vérifie que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.

• Etape 3 (**Hypothèse de récurrence**) : On rédige clairement l'hypothèse de récurrence pour un certain entier k et la propriété au rang $k+1$.

• Etape 4 (**Hérédité**) : Il faut démontrer que, pour tout entier $k \geq n_0$, « $\mathscr{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie ».
On démontre que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie en utlisant l'hypothèse de récurrence.

• Etape 5 (**Conclusion**) : On conclut par le principe de récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

R

— L'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $\mathscr{P}(0)$ ou $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
— En terminale, l'initialisation se fait souvent pour $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$. On vérifie donc que $\mathscr{P}(0)$ ou $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

■ Exemple 1.2

Enoncé : Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

• Ecriture de la propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{P}(n) : 1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• Initialisation : Soit $n = 0$
D'une part, le terme de gauche (la somme) vaut 0.
D'autre part, le terme de droite, pour $n = 0$, vaut $\frac{0 \times (0+1)}{2} = 0$.
On a donc bien l'égalité, et ainsi, on a montré que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

• Hypothèse de récurrence : On suppose que $\mathscr{P}(k)$ pour un certain entier naturel k ; autrement dit $\mathscr{P}(k) : 1+2+...+n = \frac{k(k+1)}{2}$.
On veut démontrer que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie ; c'est-à-dire

$$\mathscr{P}(k) : 1+2+...+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

• Hérédité :

$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+k+1 = \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Ainsi « $\mathscr{P}(k)$ est vraie » implique « $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie ».

• Conclusion : Par le principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie $(i.e.)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

R **L'initialisation est indispensable !**
Considérons la propriété $\mathscr{P}(n)$: 6 divise 7^n+1.
Cette propriété est **héréditaire** à partir de $n=0$.
En effet, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie donc il existe k_n tel que $7^n+1=6k_n$, $k_n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$7^{n+1}+1 = 7\times 7^n+1 = 7(6k_n-1)+1 = 42k_n-6 = 6(7k_n-1) = 6k_{n+1}$$

avec $k_{n+1} = 7k_n-1 \in \mathbb{Z}$ donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie aussi.
$\mathscr{P}(n+1)$ est donc toujours vraie lorsque $\mathscr{P}(n)$ lest : $\mathscr{P}(n)$ est une propriété **héréditaire**.

Cependant, on ne peut pas conclure par une démonstration par récurrence, car nous navons pas montré l'initialisation. D'ailleurs $\mathscr{P}(0)$ est faux ! En effet, $7^0+1=1+1=2$ qui n'est pas divisible par 6...
On ne sait donc pas si la propriété est vraie pour d'autres valeurs entières de n autres que 0.

Spoiler alert ! En fait, la propriété est fausse pour toutes les valeurs entières de n...

Il faut donc bien comprendre que l'hérédité qui est un processus avant tout mécanique nécessite une amorce pour s'appliquer de proche en proche (effet dominos). Ici, nous avons montré que le processus mécanique marche mais non n'avons pas l'amorce...

R Surnommé le *Prince des mathématiciens*, Carl Friedrich Gauss (30 avril 1777, Brunswick - 23 février 1855, Göttingen) étudia tous les domaines des mathématiques et contribua à développer la plupart des branches des sciences. La légende raconte que Gauss aurait trouvé seul la méthode de sommation des entiers $1+2+\,+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

L'origine de ce mythe est l'éloge funèbre de Wolfgang Sartorius : « *Le jeune Gauss venait juste d'arriver dans cette classe quand Büttner donna en exercise la sommation d'une suite arithmétique. À peine avait-il donné l'énoncé que le jeune Gauss jeta son ardoise sur la table en disant « la voici ». Tandis que les autres élèves continuaient à compter, multiplier et ajouter, Büttner, avec une dignité affectée, allait et venait, jetant de temps en temps un regard ironique et plein de pitié vers le plus jeune de ses élèves. Le garçon restait sagement assis, son travail terminé, aussi pleinement conscient qu'il devait toujours l'être, une fois une tâche accomplie, que le problème avait été correctement résolu et qu'il ne pouvait y avoir d'autre réponse.* ». Voici sa méthode :

$$\begin{array}{rl} + \begin{cases} S & = 1+2+3+\ldots+98+99+100 \\ S & = 100+99+98+\ldots+3+2+1 \end{cases} \\ \hline 2S = \underbrace{101+101+101+\ldots+101+101+101}_{100 \text{ fois}} \end{array}$$

On a donc

$$2S = 100\times 101 \quad\Leftrightarrow\quad S = \frac{100\times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Cette histoire est peut-être exagérée, cependant Carl Friedrich Gauss a fait avancer de façon considérable les mathématiques. Il est aujourdhui considéré comme lun des plus grands génies de lhistoire.

2. Quelques exercices d'entraînement

2.1 Passage de la forme de récurrence à la forme explicite

Exercice 2.1
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. ■

Exercice 2.2
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$. ■

Exercice 2.3
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{-5}{2^n} + 6$. ■

Exercice 2.4
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = 2^n - 1$. ■

Exercice 2.5
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Conjecturer une formule donnant un en fonction de n et la démontrer. ■

Exercice 2.6

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 3 \times 2^n - 3^n$. ■

Exercice 2.7 Suite de Fibonacci I
Soit une suite (F_n) définie par :
- $\mathrm{F}_1 = 1$
- $\mathrm{F}_2 = 1$
- $\forall n \geq 3, \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n-2}$

1. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle : $x^2 = x + 1$.
On note Φ la solution positive et Ψ l'autre solution.
2. Démontrer par une récurrence double que pour tout entier naturel n : $\mathrm{F}_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - \Psi^n)$ ■

Exercice 2.8 Suite de Fibonacci II
La suite de Fibonacci (F_n) est définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_0 = 0 \\ \mathrm{F}_1 = 1 \\ \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1} \end{cases}$$

Prouver par récurrence les relations suivantes :
1. $\mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n+2} - 1$
2. $\mathrm{F}_0^2 + \mathrm{F}_1^2 + \cdots + \mathrm{F}_{n-1}{}^2 = \mathrm{F}_n \times \mathrm{F}_{n-1}$
3. $\mathrm{F}_n{}^2 - \mathrm{F}_{n-1} \times \mathrm{F}_{n+1} = (-1)^{n+1}$. ■

2.2 Récurrence et inégalités

Exercice 2.9
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leqslant 1$. ■

Exercice 2.10
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$. ■

Exercice 2.11 Inégalité de Bernoulli
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ ■

Exercice 2.12
Démontrer que $\forall n \geqslant 4$, on a $2^n \leqslant n!$. ■

Exercice 2.13
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $5^n \geqslant 4^n + 3^n$. ■

Exercice 2.14
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$. ■

Exercice 2.15
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ que $n^2 > 2n+1$. ■

Exercice 2.16
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$ ■

Exercice 2.17
On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} & ,\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante. ■

Exercice 2.18
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{2}{10}u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leqslant 10$. ■

Exercice 2.19
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{2}$. Montrer que, pour tout entier naturel $n, 3 \leqslant u_n \leqslant 5$ ■

Exercice 2.20
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif $n, u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n, \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. ■

2.3 Récurrence et sommes

Exercice 2.21
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2$$

■

Exercice 2.22
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1\frac{1}{n+1}$$

Exercice 2.23

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.24

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.25

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.26

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.27

Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

II

Suites numériques

3. Suites numériques

3.1 Modélisation par une suite numérique

Definition 3.1 Une **suite numérique** est une liste de nombres réels, ordonnée, et indéxée par les entiers naturels (ou numérotée).

■ **Exemple 3.1**

a. $1;2;3;4;5;\dots$
b. $2;4;6;8;10;\dots$
c. $3;7;11;15;19;\dots$
d. $2;4;8;16;32;\dots$
e. $2;3;5;9;17;\dots$
f. $0;1;8;27;64;125;\dots$
g. $1;1;2;3;5;8;13;21;\dots$

■

Definition 3.2
• Une suite u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
• Une suite u est donc un procédé qui à tout entier n associe le nombre $u(n)$.
• On note en général u_n le **terme d'indice n** au lieu de $u(n)$, et la suite est notée (u_n), ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de u.
• u_n est **un** nombre de la suite, et (u_n) désigne **l'ensemble de tous les nombres** de la suite.

■ **Exemple 3.2** Par exemple, avec la dernière suite de l'exercise précédent, on note u ou (u_n) la suite, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de la suite :

$$u = \{1;1;2;3;5;8;13;21;\dots\}$$

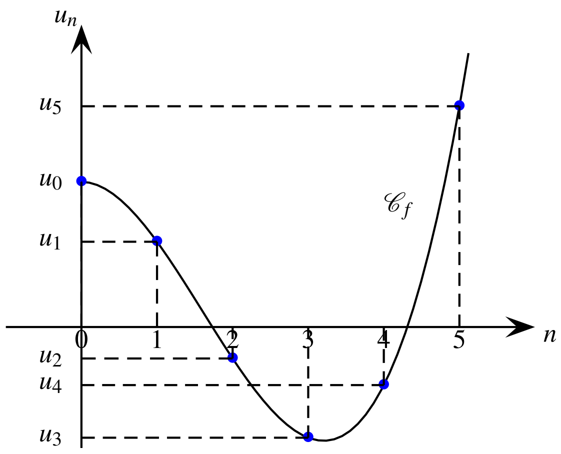
On a, par exemple, en commençant à compter à 0 :

$$u_0 = 1,\ \ u_1 = 1,\ \ \dots,\ \ u_6 = 8,\ \ \dots$$

■

R On peut définir une suite de deux façons : **explicitement** ou **par récurrence** (ou implicitement).
• **Explicitement :** à partir d'une fonction f : le terme général de la suite est alors $u_n = f(n)$.
On parle aussi d'**échantillonnage** : la suite (u_n) est constituée d'échantillons de la fonction f :

$$u_0 = f(0)\ ;\ u_1 = f(1)\ ;\ u_2 = f(2)\ ;\ \dots$$



• **Par récurrence**, ou implicitement : comme chaque terme de la suite est numéroté, chaque terme a un prédécesseur et un successeur; on peut donc définir une suite en indiquant son premier terme u_0 et une relation permettant de connaître un terme connaissant son (ou ses) prédecesseur.
Par exemple : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$. Alors, $u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$, $u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26, \ldots$

■ **Exemple 3.3** On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1000 \\ u_{n+1} = 1{,}04u_n \end{cases}$.

Alors,
$u_0 = 1000$,
$u_1 = 1{,}04 \times u_0 = 1{,}04 \times 1000 = 1040$,
$u_2 = 1{,}04 \times u_1 = 1{,}04 \times 1040 = 1081{,}6$,
$u_3 = 1{,}04 \times u_2 = \ \ldots$

$u_{50} = 1{,}04 \times u_{49} \ \ldots$ ■

Exercice 3.1 Calculer les quatre premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2 - 1}{v_n^2 + 2}$. ■

3.2 Sens de variation d'une suite

Definition 3.3
• Une suite (u_n) est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
• Une suite (u_n) est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
• Une suite (u_n) est **constante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.
• Une suite croissante ou décroissante est dite **monotone**.

■ **Exemple 3.4** • La suite des entiers naturels pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... est la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$. Elle est croissante puisque $r > 0$.
• La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$. Elle est croissante puisque $q > 1$.
• La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ... est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$. Elle n'est ni croissante, ni décroissante. ■

R On a trois méthodes pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n). On peut :

• **Méthode algébrique :** on compare directement, **pour tout entier** n, les termes consécutifs u_{n+1} et u_n :
- soit étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$,
- soit étudier le signe de $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ si pour tout entier n, $u_n > 0$.

• **Méthode fonctionnelle :** Si (u_n) est une suite définie **explicitement** par $u_n = f(n)$, où f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation :
- si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,
- si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.

• **Méthode de raisonnement par récurrence :** elle s'applique si (u_n) est une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, et consiste à démontrer que l'une des propriétés $P(n)$: $u_{n+1} \leq u_n$ ou $P(n)$: $u_{n+1} \geq u_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice 3.2 En adoptant la bonne stratégie, étudier le sens de variation des suites définies par les expressions :

a. $u_n = n^2 - n + 2$ **b.** $u_n = \frac{2^n}{3^n}$ **c.** $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ **d.** $u_n = -\frac{1}{3}n + 3$

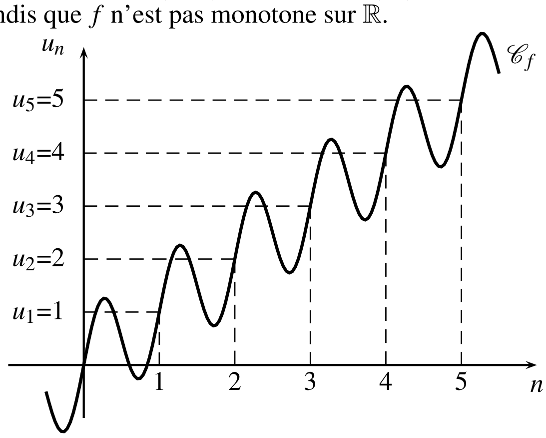
e. (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$ **f.** $u_n = (n-5)^2$

g. (u_n) définie par $u_0 = 80$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,75u_n + 30$ **h.** $u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

■

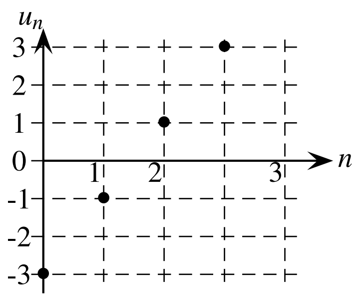
Proposition 3.1 Soit (u_n) la suite définie **explicitement** par $u_n = f(n)$, où f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, alors (u_n) et f ont le même sens de variation :
• si f est croissante, alors la suite (u_n) est croissante,
• si f est décroissante, alors la suite (u_n) est décroissante.

R La réciproque est fausse ! Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ avec la fonction $f(x) = x + \sin(2\pi x)$.
Alors, pour tout entier n, $u_n = n + \sin(2\pi n) = n$, et donc (u_n) est croissante (c'est la suite des entiers naturels), tandis que f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.



■ **Exemple 3.5**
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2n - 3$.
Cette suite est croissante puisque :

• **Méthode 1 :**

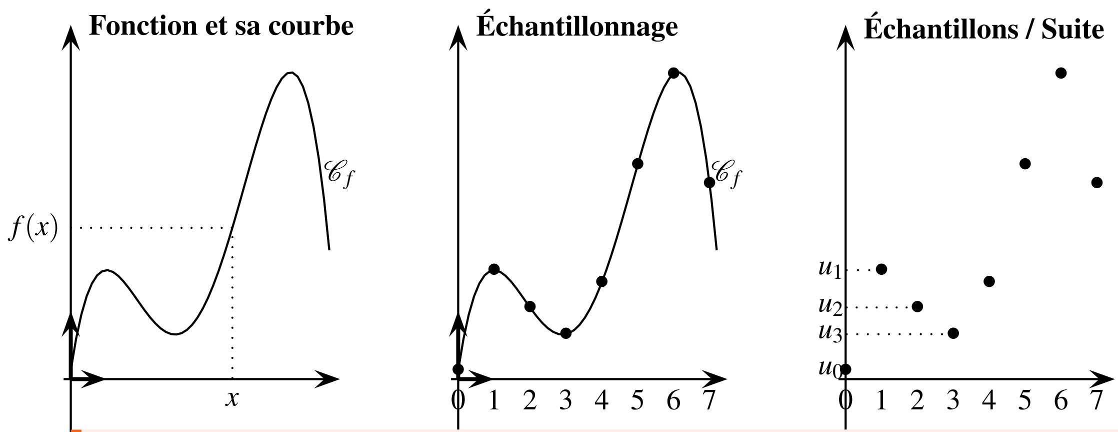


$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) - 3 - (2n-3) \\ &= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 \\ &= 2 \geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

• **Méthode 2 :**
La fonction affine $f(x) = 2x - 3$ est croissante (car son coefficient directeur, 2, est positif). Comme $u_n = f(n)$, alors la suite (u_n) est croissante.
■

R Quand on écrit $u_n = f(n)$, on ne considère que les images de f pour des valeurs entières, et non pas pour tous les nombres réels d'un intervalle : on dit alors qu'on **échantillonne**, ou qu'on **numérise**, la fonction f.



Exercice 3.3 Etudier (de deux manières différentes !) le sens de variation des suites définies par :

$a) u_n = \dfrac{3n-2}{n+1}$ $\quad b) u_n = -\dfrac{1}{3}n + 3$ $\quad c) u_n = (n-5)^2$ $\quad d) u_n = n - 1 + \dfrac{4}{n+1}$ ■

3.3 Suites majorées, minorées et bornées

Definition 3.4 On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
• **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
M est un appelé un **majorant** de (u_n).
• **minorant** s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$.
m est un appelé un **minorant** de (u_n).
• **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

R La plupart du temps, pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on utilise le raisonnement par récurrence, mais il arrive que certaines inégalités à déterminer soient triviales, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.6 • La suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$
(dont voici quelques termes : $1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; \ldots$) est minorée par 1. En revanche, elle n'est pas majorée.
• La suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 1$ (dont voici quelques termes : $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \ldots$) est majorée par 1 et minorée par 0. Elle est donc bornée. ■

Exercice 3.4 On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. ■

Exercice 3.5 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n \times (-1)^n$.
La suite (u_n) est-elle bornée ? majorée ? minorée ? ■

Exercice 3.6 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{4n+7}{2n-5}$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n - 2 = \frac{17}{2n-5}$
2. En déduire que la suite (u_n) est minorée et donner un minorant. ■

Exercice 3.7 Soit (u_n) une suite.
1. Montrer que si (u_n) est croissante alors elle est minorée.
2. Montrer que si (u_n) est décroissante alors elle est majorée. ■

Exercice 3.8 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 0,6 \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 1$. ■

4. Limites de suites

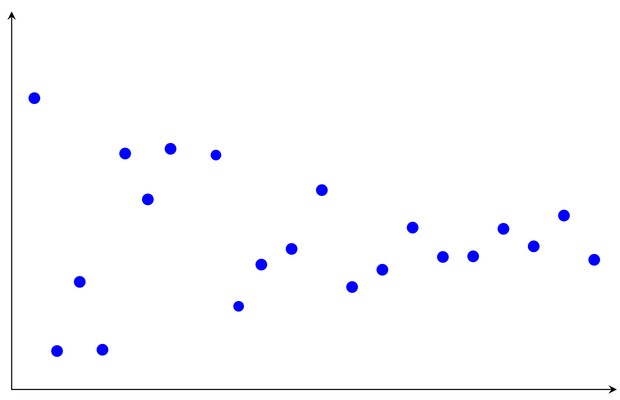
4.1 Limites finies

Definition 4.1
• Une suite (u_n) a pour **limite** le réel l lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$.
• On dit alors que (u_n) est **convergente** et converge vers l.

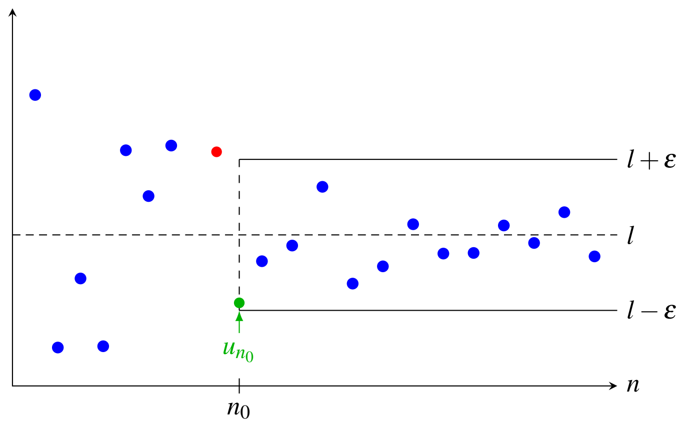
R Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas.

Proposition 4.1 **(admise)** La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

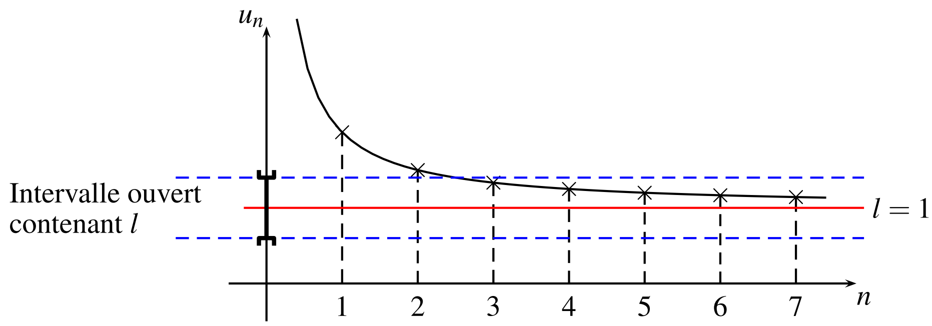
R On va tenter de donner un peu de visualisation à cette première et appétissante définition... Imaginons que l'on place sur un repère les termes de la suite (u_n) (en abscisse, on a le rang n et en ordonnée u_n). On aurait quelque chose de la sorte :



Pour une suite qui a une limite l, on peut trouver un rang n_0 tel que pour tout $\varepsilon > 0$, TOUS les termes après le rang n_0 sont contenus dans une bande de largeur 2ε.



■ **Exemple 4.1** • Soit la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$.



Soit par exemple l'intervalle ouvert $I =]0,99\ ;\ 1,01[$ contenant $l = 1$. Alors,

$$u_n \in I \iff 0,99 < u_n < 1,01 \iff 0,99 < \frac{1}{n} + 1 < 1,01 \iff -0,01 < \frac{1}{n} < 0,01$$
$$\iff n > \frac{1}{0,01} = 100$$

Ainsi, dès que $n > 100$, tous les termes u_n sont dans l'intervalle ouvert $I =]0,99\ ;\ 1,01[$.
On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

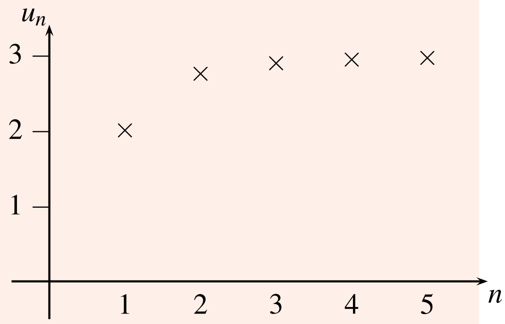
• La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ est une suite divergente : elle prend successivement la valeur 1 quand n est pair et la valeur -1 quand n est impair. Elle n'admet donc aucune limite. ■

Proposition 4.2 **(admise)**

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. • $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. • Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

R Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

Exercice 4.1 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 3 - \frac{1}{n^2}$.
On donne ci-dessous la représentation graphique des premiers termes de cette suite.
1. A l'aide de cette représentation graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n).
2.a. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout entier naturel $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.



4.2 Théorème de convergence monotone

Théorème 4.1 — Théorème de convergence monotone (admis).
• Toute suite croissante et majorée est convergente.
• Toute suite décroissante et minorée est convergente.

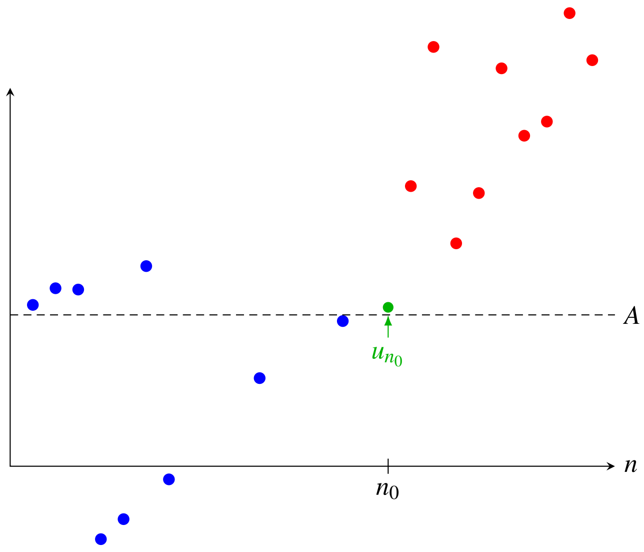
R Ce théorème permet juste d'affirmer qu'une suite converge mais ne permet pas de déterminer sa limite.

Exercice 4.2 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 4 \\ u_{n+1} & = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$.
1. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.
2. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

4.3 Limites infinies

Definition 4.2
• Une suite (u_n) a pour <u>**limite** $+\infty$</u> lorsque, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Une suite (u_n) a pour <u>**limite** $-\infty$</u> lorsque, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant A$.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

R • En réalité, il suffit de montrer cette assertion pour $A > 0$. (*Euh... Pourquoi en fait ?*)
• Encore une fois, tentons de donner un peu de visualisation à cette définition. Elle nous dit, pour la limite $+\infty$, que si nous choisissons n'importe quel réel A, il existe entier n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, TOUS les termes de la suite (u_n) sont au dessus de la droite d'équation $y = A$.



Proposition 4.3

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, pour tout entier $k \geqslant 1$.
2. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$.

Heuristique. **1.** Il s'agit d'une démonstration très intéressante sur la type de raisonnement pour montrer une limite d'une suite divergente. Nous ferons la démonstration dans le cas $n = 2$.
2. Nous admettrons ce résultat.
3. On rappelle que, par définition, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors, pour tout réel A, il existe un rang n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant A$. Par conséquent, pour ce même rang n_0, on a $-u_n \leqslant -A$. La suite, c'est *easy*... ■

Démonstration. **1.** Soit A un nombre réel et n un entier naturel. D'après la remarque précédente, on peut supposer $A \geqslant 0$.
Soit $A \geqslant 0$. On a

$$u_n \geqslant A \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \geqslant A \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \sqrt{A} \ \ (\text{car } n \geqslant 0)$$

Ainsi, en prenant comme valeur de n_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, on a bien $n^2 \geqslant A$ $((i.e.)\ u_n \geqslant A \quad \Leftrightarrow)$ pour tout $n \geqslant n_0$.

3. Démonstration laissée au lecteur. ■

▪ **Exemple 4.2** Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3$ et $v_n = 2^n$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \ \text{ car } q = 2 > 1$$

▪

Proposition 4.4

• Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
• Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Heuristique. Là encore, aucune réelle difficulté. Pour le premier par exemple, voici comment il faut le comprendre : on a une suite croissante et aucun « *plafond* » qui permet de contenir nos

termes ! Par conséquent, la valeur est aussi grande que l'on veut...
Nous ne démontrons que le premier point, le second étant identique au niveau du raisonnement... ■

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non majorée et soit A un nombre réel.
Comme u_n n'est pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant A$.
Or, comme (u_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0}$.
Par suite, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$.
Par conséquent, il existe bien un entier n_0, tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. ■

4.4 Limites et opérations

Soient (u_n) et (v_n) sont deux suites, et l et l' sont deux réels.
On note par la suite F.I. pour « *forme indéterminée*, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

Proposition 4.5 — Limite d'une somme de suites.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

R • Dans le cas où le calcul mène à une forme indéterminée, il peut être utile de transformer l'écriture de $u_n + v_n$.
• La limite de $(u_n + \alpha)$, où α est un réel, est la limite de $(u_n + v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à α.

■ **Exemple 4.3** Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 + 2n - \dfrac{1}{n^3}$.
On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n \to +\infty} 3 = 3 \\ \bullet \lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Par addition des limites} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{array}$$

■

Proposition 4.6 — Limite d'un produit de suites.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n =$	$l \times l'$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**F.I.**

R La limite de (ku_n), où k est un réel non nul, est la limite de $(u_n \times v_n)$ dans le cas où (v_n) est la suite constante de terme général égal à k.

■ **Exemple 4.4** Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 + n^2\right)$.

Par sommes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + n^2\right) = +\infty$, puis par limite du produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
■

Proposition 4.7 — Limite d'un quotient de suites.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' \neq 0$	0 (†)	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**F.I.**	**F.I.**

(†) Il est important de distinguer dans ce cas si (v_n) tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

R La limite de $\left(\dfrac{k}{v_n}\right)$, où k est un réel, est la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ dans le cas où (u_n) est la suite constante de terme général égal à k.

■ **Exemple 4.5** Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{n^2+3}$.

Par sommes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+3) = +\infty$, puis par limite du quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

R [Méthode en cas de forme indéterminée] On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)
Par exemple, soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 2n + 4$.
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$, donc on a une forme indéterminée pour la limite de la somme.
Néanmoins,

$$u_n = n^2\left(1 - \frac{2n}{n^2} + \frac{4}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{4}{n^2}\right) = 1$, d'où, par produit des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : n^2 est le terme dominant en $+\infty$ dans l'expression de u_n. C'est lui qui impose son comportement en $+\infty$, ce qui apparaît clairement quand on le factorise.

Exercice 4.3 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a. $u_n = n^3 + \dfrac{1}{n}$ **b.** $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ **c.** $u_n = \dfrac{3-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n^2}}$ **d.** $u_n = n^3 - n^2 + 3n - 1$

e. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{-n^2+6}$ **f.** $u_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ **g.** $u_n = n\sqrt{n} - n$ **h.** $u_n = (-2n+3)\dfrac{n+3}{-n^2+n+6}$

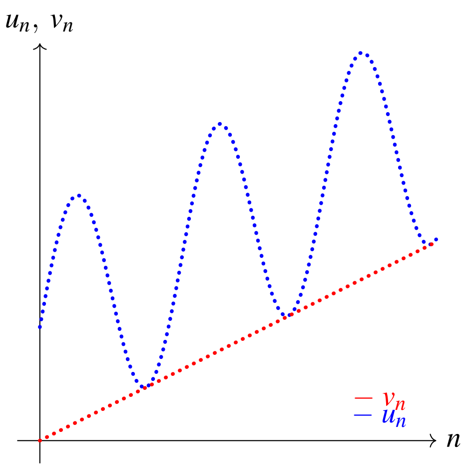
i. $u_n = \dfrac{n}{n+\sqrt{n}}$ **j.** $u_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ **k.** $u_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{(2n+1)^2}$ **l.** $u_n = \dfrac{2}{3n} - \dfrac{2n^2+3}{3n^2+n+1}$

■

4.5 Théorème de comparaison

Théorème 4.2 — Théorème de comparaison.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que, pour tout entier n, $u_n \geqslant v_n$ (à partir d'un certain rang n_0).
• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Heuristique. Malgré son apparence, ce théorème est assez simple. Il dit la chose suivante : si l'on a deux suites u_n et v_n telles que $u_n \geqslant v_n$, cela signifie que tous les termes de la suite v_n sont *en dessous* des termes de la suite u_n. Donc si v_n tend vers $+\infty$, elle impose à u_n de tendre vers $+\infty$!
Nous ne démontrons que le premier point, le second étant identique au niveau du raisonnement...



■

Démonstration. Par hypothèse, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$.
Par ailleurs, u_n tend vers $+\infty$. Par définition, pour tout réel A, il existe un rang n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant A$.
En choisissant $N = \max(n_0; n_1)$, les deux propriétés sont vérifiées : on a pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$ et $u_n \geqslant A$ (et donc $v_n \geqslant A$).
Ainsi, pour tout réel A, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $v_n \geqslant A$. ■

■ **Exemple 4.6** Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$. Déterminons la limite de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{\dfrac{1}{n+1}} \geqslant 0$. En ajoutant n à chaque membre de l'inégalité, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n + \sqrt{\frac{1}{n+1}} \geqslant n \quad \Leftrightarrow \quad u_n \geqslant n$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ■

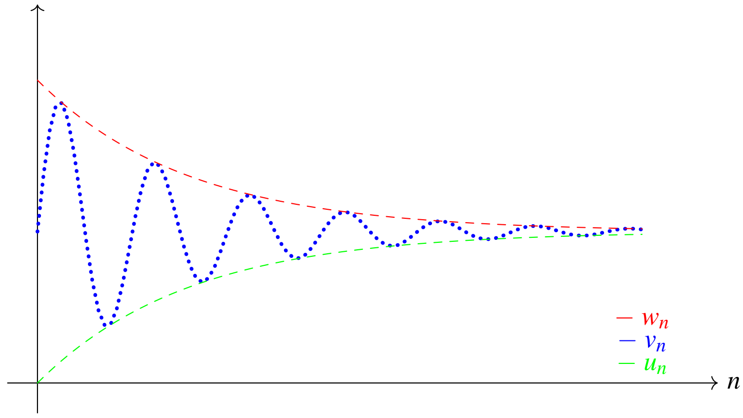
Exercice 4.4 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + (-1)^n$. Déterminer la limite de la suite (u_n). ■

4.6 Théorème des gendarmes

Théorème 4.3 — Théorème des gendarmes.
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que,pour tout entier n, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

R Encore (encore !) une fois, tentons de donner un peu de visualisation à ce théorème.
Si l'on a trois suites u_n, v_n et w_n telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, cela signifie que tous les termes de la suite u_n sont *coincés* entre les termes des suites u_n et w_n. Donc si u_n et w_n convergent vers une même limite l, elles imposent à u_n de converger vers l !



Le nom anglo-saxon de ce théorème est *Squeeze theorem* ou encore *Sandwich theorem*. Visuellement, on comprend bien cette appellation (*to squeeze* voulant dire *écraser* en français).

■ **Exemple 4.7** Déterminons la limite de la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n tel que $n > 1$ par :

$$w_n = \frac{1}{n+\cos(n)}$$

Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$, on a

$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad n-1 \leqslant n+\cos(n) \leqslant n+1$$

Or, la fonction inverse étant strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty]$, donc, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{1}{n-1} \geqslant \frac{1}{n+\cos(n)} \geqslant \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+\cos(n)} \leqslant \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$, d'où, par quotient (ou par passage à l'inverse) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. ■

Exercice 4.5 Etudier la convergence de la suite (z_n) définie pour tout entier naturel n par $z_n = 1 + \dfrac{2+(-1)^n}{n^2+1}$. ■

4.7 Application de la continuité aux limites

Proposition 4.8 **(admis)**
Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite déléments de I convergeant vers $a \in I$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$$

■ **Exemple 4.8** Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2$ et (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2 \ \text{ donc } \ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(2) = (2+1)^2 = 9$$
■

Théorème 4.4 — Théorème du point fixe.
Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in \mathrm{I}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathrm{I}$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration. On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans I.
Soit (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers un réel $\ell \in \mathrm{I}$. On sait que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$
Or, d'après la propriété précédente,
$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell) \quad \text{d'où} \quad \ell = f(\ell)$$
■

Exercice 4.6 — Exercice corrigé. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n+1}$. On admet que (u_n) converge et que, pour tout entier $n, u_n \in [0;3]$. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Solution :
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ sur $\mathrm{I} = [0;3]$.
f est continue sur I comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas sur I.
Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \left[\dfrac{3}{4};3\right]$ et $\left[\dfrac{3}{4};3\right] \subset \mathrm{I}$.
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3}{x+1} = x \Leftrightarrow 3 = x(x+1) \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$$
On trouve $\Delta = 13$ d'où
$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} \in \mathrm{I} \text{ et } x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \notin \mathrm{I}$$
Donc, d'après le théorème du point fixe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$. ■

III Suites particulières

5. Suites arithmétiques

5.1 Quelques rappels sur les suites arithmétiques

Definition 5.1 Une **suite arithmétique** est une suite dont chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée **raison** de la suite, au terme précédent.
Pour tout entier n,

$$u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$$

R On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \cdots$$

■ **Exemple 5.1** La suite de entiers naturels pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... est la suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 0$. ■

Proposition 5.1 Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$, (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, (u_n) est décroissante.

Proposition 5.2 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr$$

R Il se peut que l'on n'ait pas le premier terme u_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne u_n à partir d'un terme différent de u_0 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, alors, quels que soient les entiers n et p,

$$u_n = (n-p)r + u_p$$

5.2 Limite des suites arithmétiques

Proposition 5.3 **(admise)**
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
• Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
• Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

Démonstration. La forme explicite de (u_n), suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, est

$$u_n = u_0 + nr$$

• Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = +\infty$, donc, par somme de la constante u_0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 + nr) = +\infty$.
• Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nr = -\infty$, donc, par somme de la constante u_0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_0 + nr) = -\infty$.
• Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$. ■

Exercice 5.1 **1.** Déterminer la limite de la suite arithmétique de premier terme 3 et de raison -0.1.
2. Déterminer la limite de la suite arithmétique (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = -2 + n$.
3. Déterminer la limite de la suite arithmétique (u_n) sachant que $u_0 = -4$ et $u_6 = 32$. ■

6. Suites géométriques

6.1 Quelques rappels sur les suites géométriques

Definition 6.1 Une suite géométrique est une suite dont chaque terme est obtenu en multipliant par la même quantité q, appelée **raison** de la suite, le terme précédent.
Pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

R On peut visualiser les suites arithmétiques de la sorte :

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

■ **Exemple 6.1** • La suite de nombres 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... des puissances successives de 2 est la suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
• La suite (v_n) de terme général $v_n = (-1)^n$, pour laquelle $v_0 = 1$, $v_1 = -1$, $v_2 = 1$, $v_3 = -1$, ... est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = -1$. ■

Proposition 6.1 Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
- Si $q > 1$, (u_n) est croissante.
- Si $q < 1$, (u_n) est décroissante.

Proposition 6.2 Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors, pour tout entier n,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

.

R Encore une fois, il se peut que l'on n'ait pas le premier terme u_0 lorsque l'on étudie une suite. Il existe une variante à cette proposition qui nous donne u_n à partir d'un terme différent de u_0 :

Soit (u_n) une suite géométrique non nulle de raison $q \neq 0$, alors, pour tous entiers m et p,

$$\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$$

6.2 Limite des suites géométriques

Proposition 6.3 **(admise)**

• Limite de q^n dans le cas où $q \geqslant 0$:

- Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.

• Limite d'une suite géométrique dans le cas où $q \geqslant 0$:

Soit (u_n) une suité géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \geqslant 0$.

- Si $0 \leqslant q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
- Si $q > 1$, alors $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty & \text{lorsque } u_0 \text{ est positif} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty & \text{lorsque } u_0 \text{ est négatif} \end{cases}$.

■ **Exemple 6.2** Soit (u_n) la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = -3 \times 2^n$.
Alors, on a $u_0 = -3$ (ainsi u_0 est négatif) et $q = 2$ (et ainsi $q > 1$), donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

Proposition 6.4 Soit (u_n) une suité géométrique de premier terme u_0 et de raison q telle que $0 < q < 1$.

1. La somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) est

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

2. On a alors

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$$

Démonstration. **1.** On a $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et on rappelle que $u_n = u_0 \times q^n$. Donc

$$S_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$$

Par suite,

$$\begin{cases} S_n & = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n \\ qS_n & = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \cdots + u_0 q^n + u_0 q^{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} - \begin{cases} S_n & = u_0 + \cancel{u_0 q} + \cancel{u_0 q^2} + \cdots + \cancel{u_0 q^{n-1}} + \cancel{u_0 q^n} \\ qS_n & = \cancel{u_0 q} + \cancel{u_0 q^2} + \cancel{u_0 q^3} + \cdots + \cancel{u_0 q^n} + u_0 q^{n+1} \end{cases} \\ \hline \qquad S_n - qS_n = u_0 - u_0 q^{n+1} \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} S_n - qS_n = u_0 - u_0 q^{n+1} & \Leftrightarrow \ (1 - q)S_n = u_0(1 - q^{n+1}) \\ & \Leftrightarrow \ S_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} \end{aligned}$$

2. Comme $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$, donc, par somme, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 - q^{n+1}) = 1$.
Par produit (avec la constante u_0), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0(1 - q^{n+1}) = u_0$, et donc par quotient (avec la constante $1 - q$), on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{u_0}{1 - q}$$

■

R Pour $q=1$, $1+q+q^2+\cdots+q^n=1+1+1+\cdots+1=n+1$.

■ **Exemple 6.3** Notons S_n la sommes des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) définie par $u_0=-1$ et de raison $\frac{2}{5}$. Alors

$$S_n=\frac{-1\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{1-\frac{2}{5}}=\frac{-1\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)}{\frac{3}{5}}=-\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $0<\frac{2}{5}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}=0$, donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)=1$.

Comme $-\frac{5}{3}<0$, en appliquant la règle des signes, la propriété sur la limite d'un produit donne

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=-\frac{5}{3}$$

■

7. Exercices appliquées à l'économie, la démographie, etc.

Exercice 7.1

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3% par an avec intérêts simples (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3% du capital initial). On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans. ■

Exercice 7.2

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3% par an avec intérêts composés (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3% du capital de l'année précédente). On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé ? ■

Exercice 7.3

On dispose d'un échantillon d'os fossiles contenant initialement $M_0 = 10$ grammes de carbone 14. On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de $1,2\%$ par siècle et on note M_n la masse en grammes de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles.

1. Justifier que (M_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer M_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes. ■

Exercice 7.4

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante). On note U_0 la masse initiale de l'élé-

ment radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.
1. Justifier que la suite (U_n) est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium. On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
a. Exprimer U_n en fonction de n.
b. Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.
c. Au bout de combien d'années la masse de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 5 milligramme ? ■

Exercice 7.5

Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20% de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée. On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.
1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques. ■

Exercice 7.6

Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note $P_0 = 500000$ la population initiale, $P_1 = 700000$ la population au bout de un an et P_n la population au bout de n années. On a donc, pour tout $n, P_{n+2} - P_{n+1} = 0,5\left(P_{n+1} - P_n\right)$.
1. Calculer P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - 0,5P_n$
a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n.
b. Montrer que (V_n) est une suite constante. En déduire la valeur de V_n, pour tout n.
c. Montrer que $2\left(V_n - U_n\right) = P_n$ et exprimer P_n en fonction de n. d) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} P_n$. ■

8. Sommes des termes d'une suite arithmétique et géométrique

Proposition 8.1

• La somme des n premiers entiers naturels est :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Pour tout réel $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Proposition 8.2

• La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{q-1} + u_q = (q - p + 1)\frac{u_p + u_q}{2}$$

• La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique, de premier terme v_0 et de raison q est :

$$v_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

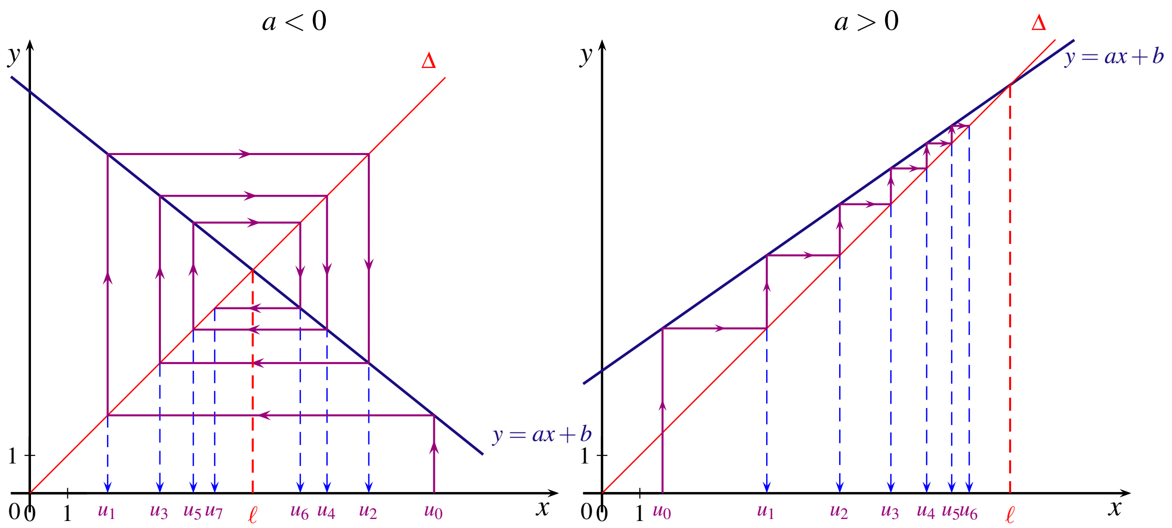
9. Suites arithmético-géométriques

9.1 Définition et représentation graphique

Definition 9.1 Une **suite arithmético-géométrique** (u_n) est une suite définie, pour tout entier n, par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont deux nombres réels.

R
- Si $a = 0$, la suite est constante égale à b.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, la suite est géométrique de raison a.

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

■ **Exemple 9.1** Le but de cet exemple va être d'expliquer comment on arrive à la figure ci-dessous, et donc d'obtenir graphiquement les termes d'une suite (placées sur un même axe).

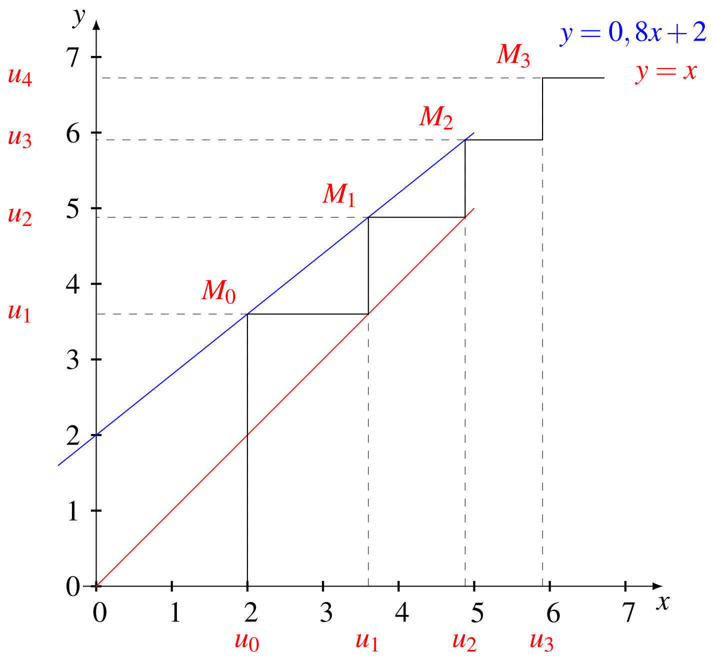
On considère la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.
On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0,8x + 2$ (où la fonction f est affine).

• **Etape 1 :** On trace, ici en blue, la courbe représentative de la fonction f : $y = 0,8x + 2$.
On trace, ici en rouge, la droite d'équation $y = x$.

• **Etape 2 :** On place u_0 sur l'axe des abscisses.
On construit $u_1 = f(u_0)$.
On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

• **Etape 3 :** On construit $u_2 = f(u_1)$.
On reporte u_2 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.

On peut construire ainsi les uns après les autres, tous les termes de la suite (u_n).



■

9.2 Une suite auxilaire

Proposition 9.1 Soit ℓ le réel tel que $\ell = a\ell + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier n, par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

Démonstration. Pour tout entier n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = au_n + b - (a\ell + b) = au_n - a\ell = a \times (u_n - \ell)$$

Ainsi, pour tout entier n, $v_{n+1} = a \times v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a. ■

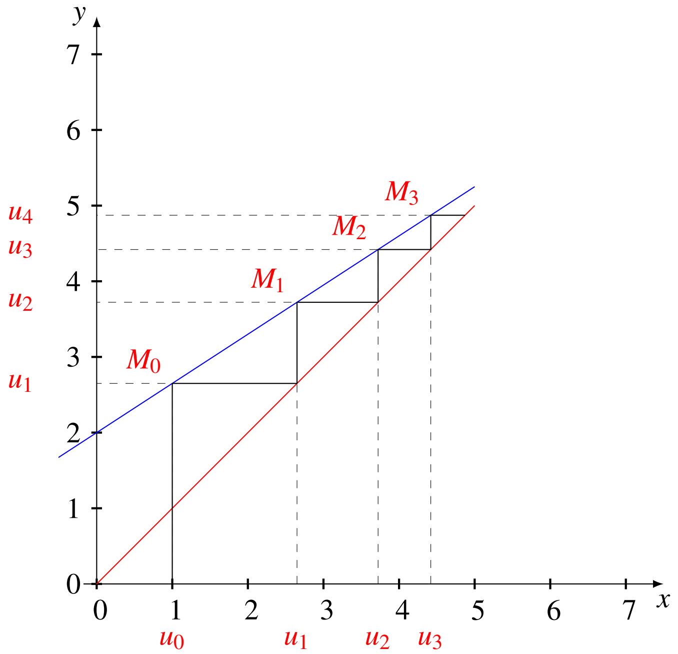
R (v_n) est une suite géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier n, $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.
Comme $v_n = u_n - \ell \Leftrightarrow u_n = v_n + \ell$, on en déduit que : Pour tout entier n, $u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell)$.

9.3 Limite des suites arithmético-géométriques

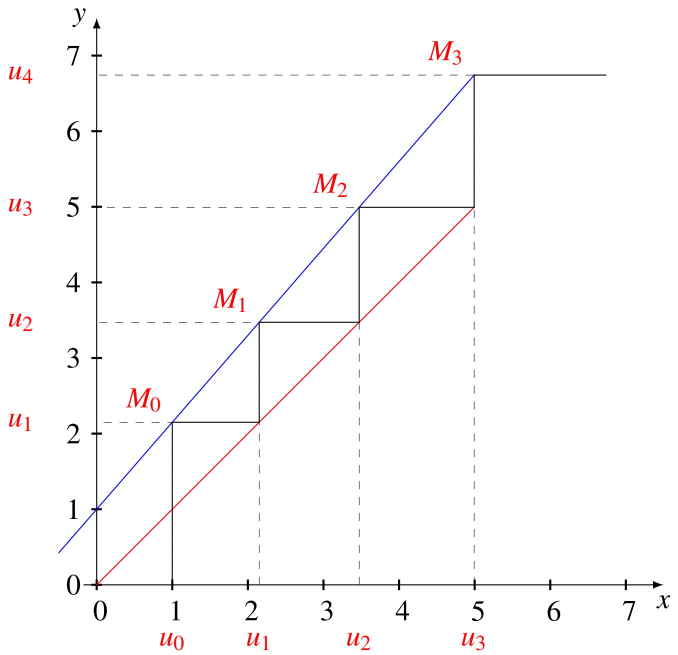
R Une suite arithmético-géométrique peut converger vers un nombre réel l ou tendre vers l'infini.

■ **Exemple 9.2**

● **Premier cas :** La suite tend vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites :



● **Deuxième cas :** La suite tend vers l'infini :



■

9.4 Un exercice ultra-classique

Lyna dépose 1000 €sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1,002 \times u_n + 250$.

2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier n,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} + 125000 = 1,002 \times u_n + 125250 = 1,002 \times (u_n + 125000) = 1,002 \times v_n$$
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $1,002$ et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.

3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
   (v_n) est une suite géométrique de raison $1,002$ et de premier terme $v_0 = 126000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126000 \times 1,002^n$.
   Donc pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1,002^n - 125000$.

4. *Ãtude de la suite (u_n).*
   a. *Variation*
      Pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1,002^n - 125000$. Par conséquent, pour tout entier n,
      $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1,002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1,002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1,002^{n+1} - 126000 \times 1,002^n \\ &= 126000 \times 1,002^n \times (1,002 - 1) \\ &= 252 \times 1,002^n \end{aligned}$$
      D'oÃź $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

   b. *Limite*
      Comme $1,002 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 126000 \times 1,002^n - 125000 = +\infty$.

   c. *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*
      On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15000$.
      L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15000.

```
U ← 1000
N ← 0
Tant que U ⩽ 15000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

      La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.
      Donc le capital disponible dépassera 15000 € au bout de 53 mois.

9.5 Exercices sur les suites arithmético-géométriques

Exercice 9.1
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 45$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.
1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$. ■

Exercice 9.2
On considère la suite (u_n) définie pour $u_0 = 27500$ et pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3900$
1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 23600 \times 1,04^n + 3900$ ■

Exercice 9.3
On considère la suite (u_n) définie par la relation : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 5$ pour tout entier naturel n.
1. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 10$ pour tout entier naturel n.
a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$.
b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.
2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n). ■

Exercice 9.4
Soit (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$)
On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n \frac{b}{1-a}$.
Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a. ■

Exercice 9.5
Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installés sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % dune année sur lautre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note un le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de lannée $2005 + n$.
1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 10$.
a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 31 \times 0,98^n + 10$. ■

Exercice 9.6

Un loueur de voitures dispose au 1er mars 2015 dun total de 10 000 voitures pour lEurope. Afin dentretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et dacheter 3 000 voitures neuves.
On modélise le nombre de voitures de lagence à laide dune suite :
Pour tout entier naturel n, on note un le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de lannée $2015+n$. On a donc : $u_0 = 10000$.
1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 12000$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser son premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).
c. Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.
d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout dun grand nombre dannées ? ■

Exercice 9.7

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. En raison dune offre de bienvenue, le nombre dabonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n lestimation du nombre dabonnés n mois après louverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.
1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - 25000$
a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,9$ et préciser son premier terme.
b. En déduire que, pour tout entier n : $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.
c. Peut-on prévoir, à laide de ce modèle, une stabilisation du nombre dabonnés sur le long terme ? Justifier. ■

Exercice 9.8

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes. En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service. Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle lévaluation peut être modélisée de la façon suivante : Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés. Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnemments à ce service.
Cette évolution peut sétudier à laide dune suite (u_n) où u_n est le nombre dabonnés pendant lannée $2015+n$.
On a ainsi, $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$.
On admet que les termes de la suite (u_n) admettent en fonction du rang n lexpression : $u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$.
La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas. Si cette évolution se poursuit au même rythme, lassociation devra-t-elle envisager un jour des travaux dagrandissement ? ■