Fonctions numériques d’une variable réelle (Partie II)

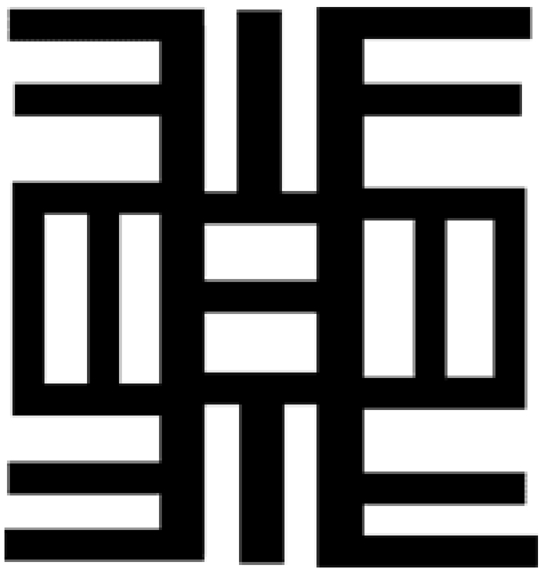
Notes de cours

Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

Dernière version, septembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Continuité, dérivabilité, convexité

Continuité, dérivabilité, convexité

1. Continuité

1.1 Fonctions continues

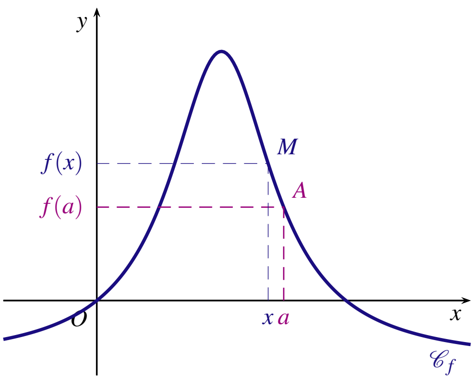
Definition 1.1 Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
• f est **continue en a** lorsque f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.
• f est **continue sur un intervalle I** lorsqu'elle est continue en a pour tout $a \in I$.

R

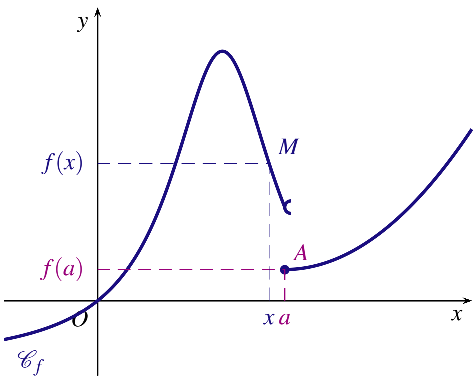
— Intuitivement, dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).
— Une fonction qui n'est pas continue est aussi dite **discontinue**.

■ **Exemple 1.1** La fonction carré $x \mapsto x^2$ est continue en tout point a de $\mathbb{R}$: pour tout réel a, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$. ■

■ **Exemple 1.2** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.
Pour tout réel x de l'intervalle I, on considère le point M de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.
Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



La fonction f n'est pas continue en a.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

■

Exercice 1.1 — Exercice corrigé.

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 3 \text{ si } x = 2 \\ x^2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ n'est pas continue en 2 .

Solution :
En effet, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = 4$ mais $f(2) = 3$.

Proposition 1.1 Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Démonstration. On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
Soient x et a deux réels appartenant à I. Pour tout $x \neq a$, on a

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

Or $\lim_{x\to a}(x - a) = 0$ et, puisque f est dérivable en a, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ Ainsi,

$$\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = f'(a) \times 0 = 0$$

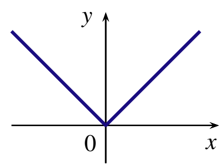
donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

et f est continue en a. ■

Proposition 1.2 **1.** Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carrée, etc.) sont continues sur leur intervalle de définition.
2. La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
3. Si f et g sont continues sur I et si g ne sannule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I
4. Si $f : I \to J$ et $g : J \to R$ sont des fonctions continues alors $g \circ f$ est continue sur I.

R La réciproque du théorème est fausse :
Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel !
Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est contine en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



1.2 Prolongement par continuité

Il arrive qu'une fonction soit définie partout sauf en un point, mais qu'on extrapole par passage à la limite la valeur plausible en ce point. On réalise alors un prolongement par continuité.

Definition 1.2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$, si f est une fonction définie sur $I \backslash \{x_0\}$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, alors la fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

s'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0. La fonction g est alors continue en x_0.

■ **Exemple 1.3** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}.$$

Démontrons que l'on peut prolonger f par continuité en -1 et précisons la valeur prise en -1 par ce prolongement.

Le numérateur et le dénominateur s'annule tous les deux en -1, et donc on a une forme indéterminée lorsqu'on calcule la limite de f en -1. Pour lever cette indétermination, on factorise le dénominateur en

$$x^3+1 = (x+1)\left(x^2-x+1\right)$$

(pour trouver cette forme, on peut procéder par identification en écrivant $x^3+1 = (x+1)\left(x^2+ax+b\right)$).
On en déduit alors que, pour tout $x \neq -1$, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to-1} f(x) = 1/3$ et on en déduit que l'on peut prolonger f par continuité en -1 en posant $f(-1) = \dfrac{1}{3}$. ■

2. Dérivabilité

2.1 Nombre dérivé en a d'une fonction

Definition 2.1

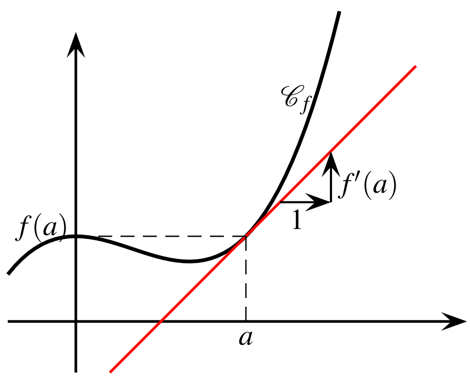
— On appelle **taux d'accroissement**, ou **taux de variation**, en a de la fonction f le nombre

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

— On appelle **nombre dérivé en a** la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0.
On note ce nombre, lorsqu'il existe, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

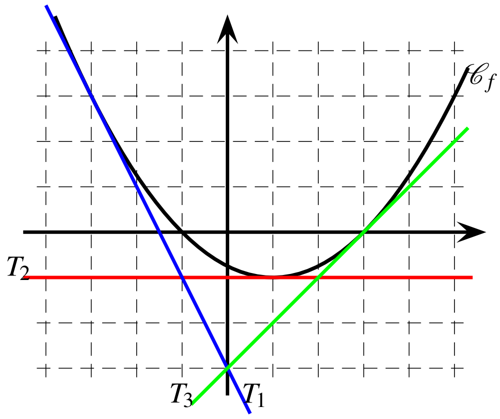
— Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.



■ **Exemple 2.1** $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Par conséquent, on a donc :

$$f'(-3) = -2$$
$$f'(1) = 0$$
$$f'(3) = 1$$



■

Definition 2.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
• On dit que f est **dérivable sur I** si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.
• On appelle **fonction dérivée** de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

Proposition 2.1 **Ce tableau est à connaître par coeur !**

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée	f est définie sur	f est dérivable sur
$f(x) = k$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées

Fonction	Dérivée
$ku,\ k\in\mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$u^n\ (n\in\mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$

Composées de fonctions

Fonction	Dérivée
u^2	2u'u
u^n	$u'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Exercice 2.1 — Exercice corrigé. Calculer les fonctions dérivées $f'(x)$ dans tous les cas suivants.
Écrire la fonction dérivée sous la forme la plus "simplifiée" possible : une seule fraction au plus (même dénominateur . . .), et le plus factorisé possible.

$f_1(x)=x^3-5x^7+\frac{3}{x}$ $\quad f_2(x)=\frac{1}{2}x^4-x\sqrt{3}+3\sqrt{x}$ $\quad f_3(x)=(x^2+3)x^5$

$f_4(x)=(3x-2)^2$ $\quad f_5(x)=x^2\sqrt{x}$ $\quad f_6(x)=(x+3)x^2\sqrt{x}$

$f_7(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)x$ $\quad f_8(x)=\left(x+\frac{2}{x^2}\right)x$ $\quad f_9(x)=\frac{3}{x+1}$

$f_{10}(x)=-2\frac{5}{x^2+3}$ $\quad f_{11}(x)=\frac{5x}{x^2+3}$ $\quad f_{12}(x)=\frac{x+2}{x+3}$

$f_{13}(x)=\frac{x^2+1}{x^3+1}$ $\quad f_{14}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}$ $\quad f_{15}(x)=\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

$f_{16}(x)=\frac{x^2+\frac{3}{x}}{x^2+\frac{x}{3}}$ $\quad f_{17}(x)=\frac{5\sqrt{x}}{1+\frac{2}{x}}$ $\quad f_{18}(x)=x\frac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{3}{x}}$

$f_{19}(x)=\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\quad f_{20}(x)=\frac{1}{3}x\frac{3+\frac{9}{x}}{x^2+2}$

$$f_1'(x) = \frac{3x^4 - 35x^8 - 3}{x^2} \qquad f_2'(x) = \frac{4x^3\sqrt{x} - 2\sqrt{3x} + 3}{2\sqrt{x}} \qquad f_3'(x) = x^4\left(7x^2 + 15\right)$$

$$f_4'(x) = 6(3x-2) \qquad f_5'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x} \qquad f_6'(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}(7x+15)$$

$$f_7'(x) = 2x \qquad f_8'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^2} \qquad f_9'(x) = \frac{-3}{(x+1)^2}$$

$$f_{10}'(x) = \frac{20x}{(x^2+3)^2} \qquad f_{11}'(x) = 5\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2} \qquad f_{12}'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$$

$$f_{13}'(x) = \frac{-x(x^3+3x-2)}{(x^3+1)^2} \qquad f_{14}'(x) = -3\frac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2} \qquad f_{15}'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f_{16}'(x) = 3\frac{x^3 - 27x - 6}{x(3x^2+x)^2} \qquad f_{17}'(x) = \frac{5\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2} \qquad f_{18}'(x) = \frac{1}{3}$$

$$f_{19}'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad f_{20}'(x) = \frac{-x^2 - 6x + 2}{(x^2+2)^2}$$

■

Proposition 2.2 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

R Lorsque l'on étudie les variations d'une fonction, on synthétise cette étude dans un **tableau de variations** comme dans l'exemple suivant.

■ **Exemple 2.2** Etudions les variations de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

- Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 3 \times x^2 - 3 \times 1 - 0 = 3x^2 - 3$$

- Détermination des "zéros" de la dérivée :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

■

2.2 Dérivée seconde

Definition 2.3
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa fonction dérivée.
Lorsque f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée.
f'' est appelée la **dérivée seconde** de f sur I.

R
- f'' se lit « *f seconde* ».
- On peut également calculer des dérivées dordre 3, 4, 5, ... , n avec $n \in \mathbb{N}$.
- On note $f^{(n)}$ la dérivée $n$ième. En particulier : $f^{(0)} = f$; $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$.

■ **Exemple 2.3** Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 13x + 9$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 12x^2 + 4x + 13$$

f' est un polynôme qui est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, on a

$$f''(x) = 24x + 4$$

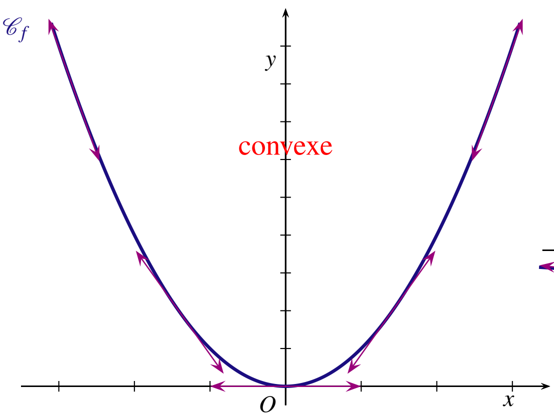
Ainsi, la dérivée seconde de la fonction f est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 24x + 4$. ■

3. Convexité

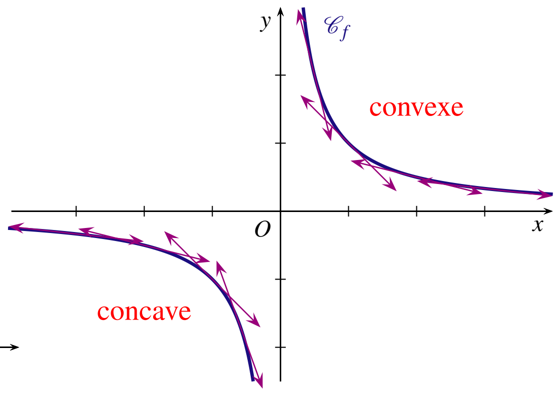
3.1 Fonctions convexes, fonctions concaves

Definition 3.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
• Dire que la fonction f est **convexe** sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
• Dire que la fonction f est **concave** sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

■ **Exemple 3.1**



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

■

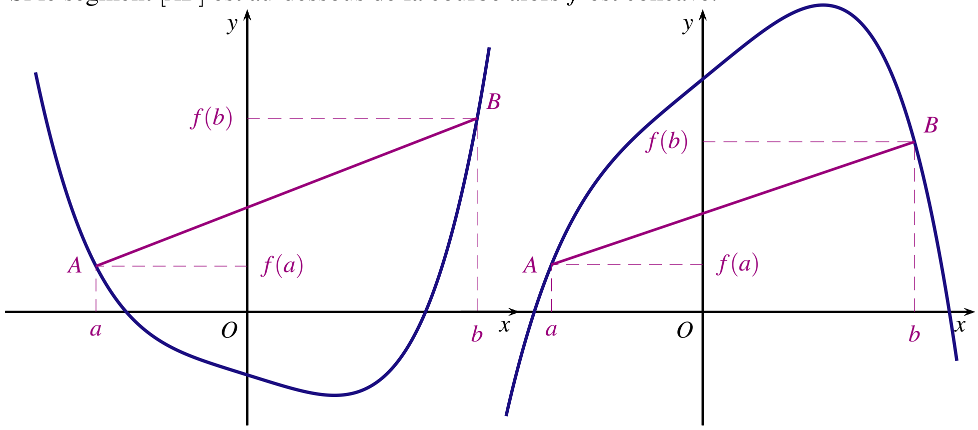
Proposition 3.1 **(admise)**
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
• f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
• f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

R

— Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en a est

$$y = f'(a)(xa) + f(a)$$

— Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$
• Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
• Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



f est convexe. $\qquad$ f est concave

Proposition 3.2 **(admise)**
On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est Ã dire la dérivée de la dérivée f'.
• Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
• Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

■ **Exemple 3.2** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

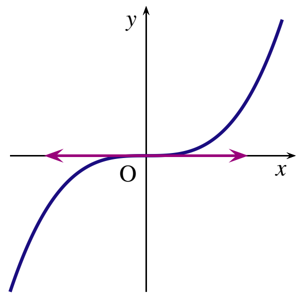
x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		↘		↗	
Convexité de f		concave		convexe	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$. ■

3.2 Point d'inflexion

Definition 3.2 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un **point d'inflexion**.

■ **Exemple 3.3** La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.
• Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
• Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.
■



Proposition 3.3 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La courbe représentative de la fonction f admet un point dinflexion au point dabscisse a si, et seulement si, f'' sannule en changeant de signe en a.

Démonstration. f'' sannule en changeant de signe en a si, et seulement si, f' change de sens de variation en a. Donc f change de convexité en a et la fonction f admet alors un point dinflexion en a. ■

■ **Exemple 3.4** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$$

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

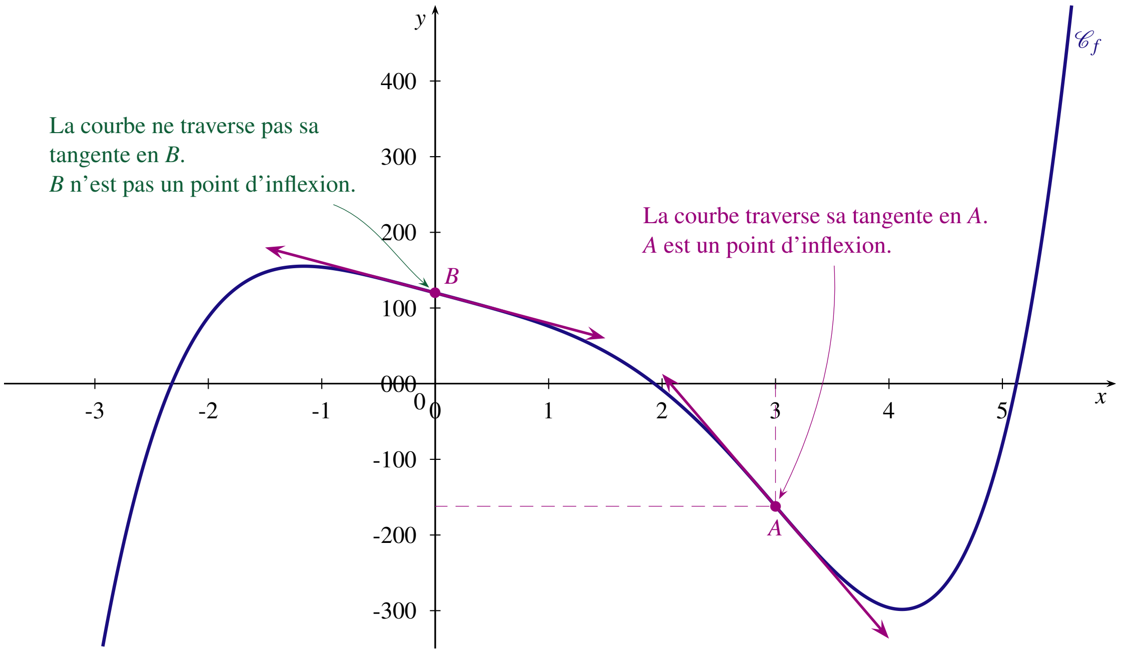
$$f''(x) = 20x^2(x-3)$$

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f'	↘				-175	↗	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.
En effet :

• $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B(0;120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$).
• f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3;-162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.



■