Fonctions numériques d'une variable réelle (Partie III)

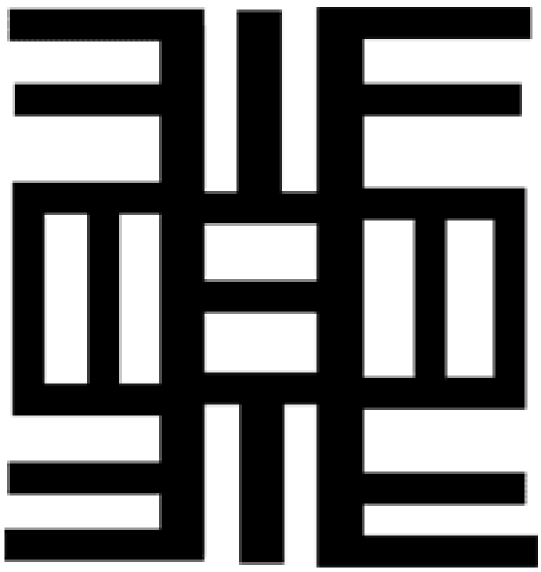
Notes de cours

Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

Dernière version, septembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

I Formules de Taylor

II Primitive & Calcul intégral

Formules de Taylor

1. Formules de Taylor

1.1 Formules de Taylor

Étant donné la facilité de manipulation qu'apportent les polynomes, on peut chercher à approcher une fonction par un polynôme et à trouver une majoration de la différence entre la fonction et le polynôme.

Théorème 1.1 — Formules de Taylor. $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I,E)$, avec $(a,b) \in I^2$

Taylor-Young $$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \quad + \quad o\left((x-a)^n\right)$$

Taylor-Laplace $$f(x) = \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}^{T_n(x)} \quad + \quad \overbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}^{\text{Reste intégral } R_n(x)}$$

$$= (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^k}{k!} f^{(k+1)}\left((1-u)a+ux\right)du$$

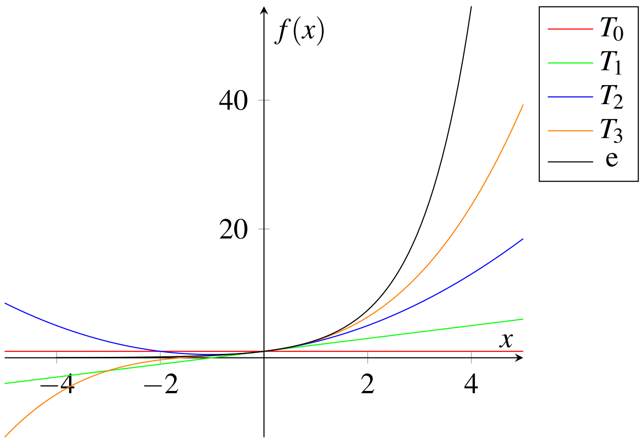
Taylor-Lagrange $$N\left(f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} N_\infty^{[a,b]}\left(f^{(n+1)}\right)$$

R La plus utile dans le cadre des développements limités pour l'étude locale d'une fonction reste tout de même la formule de Taylor-Young.

■ **Exemple 1.1** Appliquons la formule de Taylor-Young à la fonction exponentielle, pour $a = 0$, à l'ordre n. Les dérivées sont évidemment vite calculées puisqu'elles sont toutes identiques, et valent 1 en 0. On en déduit que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

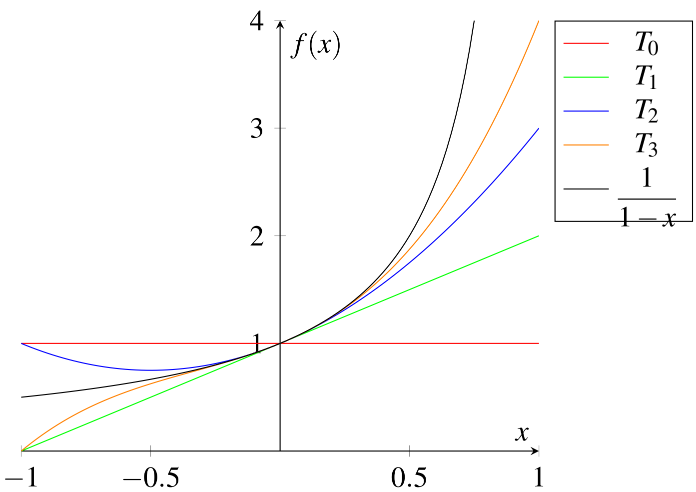
. Graphiquement, les polynômes $T_0(X) = 1, T_1(X) = 1 + X, T_2(X) = 1 + X + \frac{1}{2}X^2$ etc, sont les polynômes dont les courbes sont les plus proches possibles de la courbe de l'exeponentielle en 0 pour chaque degré. En pratique, ces courbes vont ńcollerż à celle de l'exponentielle de plus en plus longtemps au voisinage de 0. On peut prouver la convergence de $T_n(x)$ vers e^x quelle que soit la valeur de x, mais ce n'est pas notre but cette année (et ça ne découle en tout cas pas du tout de la formule de taylor-Young). Une petite illustration avec les premiers polynômes de Taylor et la courbe de l'exponentielle :



■ **Exemple 1.2** Effectuons les mêmes calculs sur la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. On calcule $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $g''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$, et on prouve par récurrence que $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. En particulier, $g^{(n)}(0) = n\,!$, et la formule de Taylor-Young donne alors

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

. Ce n'est pas une grande surprise, on sait depuis qu'on a appris à étudier des suites géométriques que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O\left(x^{n+1}\right)$. Ici, bien évidemment, la suite $T_n(x)$ ne peut pas converger vers $\dfrac{1}{1-x}$ pour toute valeur de x puisqu'on aura déjà de gros problèmes quand $x = 1$. En fait, la formule de la somme géométrique permet de prouver facilement que la convergence n'a lieu que si $x \in]-1, 1[$. Une illustration graphique :



■

2. Développements limités

Definition 2.1 On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité** d'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme P de degré n, à coefficients réels, et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, f(x) = P(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Autrement dit, on a $f(x) = P(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$. On dit alors que P est la **partie régulière** d'ordre n du développement limité, et $f - P$ le **reste** d'ordre n.

Théorème 2.1 Toutes les fonctions usuelles suivantes admettent des *DL* à tout ordre en 0 , donnés par les formules suivantes :

— $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$

— $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

— $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

— $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

— $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$
$= 1 + \frac{\alpha}{2}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{6}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$ (α désignant ici un réel quelconque).

R Toutes ces formules découlent immédiatement de la formule de Taylor-Young.

R Rappelons un résultat très important : on peut intégrer un développement limité, mais on ne peut pas dériver un développement limité en général : il se peut que f admette un développement limité dordre n, et que f' nait pas de développement limité dordre $n-1$.

II Primitive & Calcul intégral

3. Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Definition 3.1 Soit F une fonction définie sur I. On dit que F est **une primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et que
$$F' = f$$

R

— $y' = f$ signifie que, pour tout $x \in I$, $y'(x) = f(x)$.
— Si une fonction admet une primitive sur un intervalle, celleci n'est pas unique.
— On ne peut pas toujours expliciter les primitives d'une fonction continue sur un intervalle : c'est par exemple le cas de $x \mapsto e^{-x^2}$.

■ **Exemple 3.1** $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 + 1$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2x$ d'inconnue y.
Ces deux fonctions sont donc des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 2x$. ■

Théorème 3.1 **(admis)**
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Proposition 3.1 Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

Démonstration. — Soit F une primitive de la fonction f sur I et G une fonction définie pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.
Alors, $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I.

— Soient G et F deux primitives de f sur I montrons qu'il existe un réel k tel que pour tout réel x de I, $G(x) = F(x) + k$
On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$ alors,
$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$
H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I.

Ainsi, pour tout réel x de I, $H(x) = k$ où k est un réel. Soit $G(x) - F(x) = k$ donc $G(x) = F(x) + k$.

■

Proposition 3.2 Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

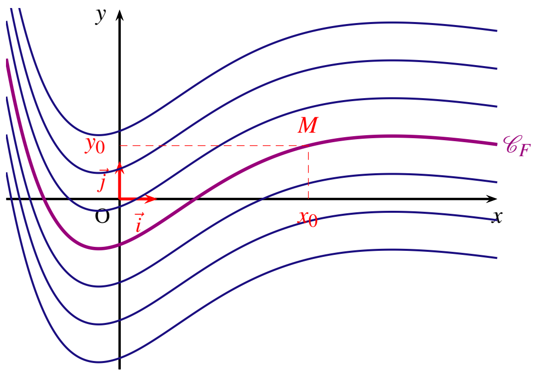
Démonstration. Si G est une primitive de f sur I, alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel.
La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.
Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$. ■

R La condition $F(x_0) = y_0$ est parfois appelée condition initiale, en référence à certaines situations rencontrées en physique.

R

Si on connaît la courbe $\mathscr{C}$ représentative d'une primitive de f sur I, alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathscr{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathscr{C}_F$ de la famille passant par ce point.



3.1 Primitives et fonctions de référence

À l'aide des dérivées des fonctions de référence, on obtient le tableau suivant des primitives.

f est définie sur I par ...	une primitive F est donnée par	validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \exp x$	$F(x) = \exp x$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $]-\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$

3.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Proposition 3.3

1. Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
2. Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

Démonstration. Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ et αF sont dérivables sur I.

1. $(F+G)' = F' + G' = f + g$ donc $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
2. $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I.

■

R Contrairement à la dérivation, il n'existe aucune formule permettant de calculer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions.

■ **Exemple 3.2** Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\dfrac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3\ln x$.

Donc la fonction $f = u+v$ admet comme primitive la fonction $F = U+V$ définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3\ln x$. ■

R Voici deux exemples qui illustrent la démarche que vous devez avoir quand vous chercher des primitives.

— Cherchons une primitive de $g(x) = 6x^2$.
On sait qu'on obtient la partie "x^2" en dérivant x^3.
Plus précisément, la dérivée de x^3 est $3x^2$.
Pour obtenir $g(x)$ il reste donc à multiplier par 2.
Ainsi la fonction G définie par,

$$G(x) = 2 \times x^3$$

est une primitive de g, car on a bien en dérivant,

$$G'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2 = g(x)$$

— Cherchons une primitive de $h(x) = \dfrac{2}{x^2}$.
Comme la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ on voit qu'il suffit cette fois de multiplier par -2 ;
soit $H(x) = -2 \times \dfrac{1}{x}$, alors

$$H'(x) = -2 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{2}{x^2} = h(x)$$

et donc $H(x) = -\dfrac{2}{x}$ est une primitive de $h(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

3.3 Primitives et composition de fonctions

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.
Soient v une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Fonction f	Une primitive F est donnée par...
$f = u'u$	$F = \frac{1}{2}u^2$
$f = u'u^n \quad n$ entier, $n > 0$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u' \exp u$	$F = \exp u$
$f = \frac{u'}{u} \quad u$ est strictement positive sur I	$F = \ln u$
$f = \frac{u'}{u^2} \quad u$ ne s'annule pas sur I	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{u^n} \quad$ (n entier, $n \geqslant 2$) $u \neq 0$ sur I	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = (v' \circ u) \times u'$	$F = v \circ u$

■ **Exemple 3.3** Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.
Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.
On a :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2} \quad \text{soit} \quad f = -\frac{1}{2} \times u'e^u$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$$

où c est un réel à déterminer. Or

$$F(1) = 0 \iff -\frac{1}{2} + c = 0 \iff c = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$. ■

Exercice 3.1 Calculer et interpréter graphiquement $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x$. ■

3.4 exercises sur la détermination de primitives

Exercice 3.2

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x$ et $F(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

1. Vérifier que F est une primitive de f.

2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x_0 = -1$ ■

Exercice 3.3

oit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x) = \frac{3x^2+4x}{x+1}$ et $G(x) = \frac{3x^2-x-5}{x+1}$

F et G sont-elles primitives d'une même fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ ■

Exercice 3.4

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$ **2.** $x \mapsto 2x - \frac{1}{3}$ **3.** $x \mapsto \frac{x^2}{3} - x$ **4.** $x \mapsto 3x^2 + \frac{2x}{3} - 7$

■

Exercice 3.5

Déterminer sur $]0:+\infty[$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ vérifiant $F(1) = -1$. ■

Exercice 3.6

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = e^x$ vérifiant $F(0) = e$. ■

Exercice 3.7

Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

■

Exercice 3.8

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \frac{1}{(x+2)^2}$ sur $]-\infty;-2[$ **2.** $x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$ sur $]-3;+\infty[$

■

Exercice 3.9

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \frac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ **2.** $x \mapsto \frac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1;+\infty[$

■

Exercice 3.10

Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$ **2.** $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+3)^2}$ **3.** $x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ **4.** $x \mapsto \frac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$

■

Exercice 3.11

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \frac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.

3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{1}{x^2} + 1$ et $F(1) = 2$.

4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + \frac{2}{x^2}$ et $F(1) = -\frac{1}{4}$.

5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2}$ et $F(1) = 1$. ■

Exercice 3.12

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^3}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3$.

3. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$. ■

Exercice 3.13

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

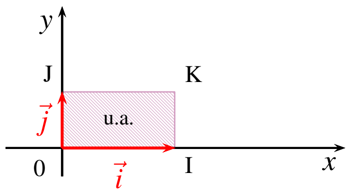
1. f est définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$ et $F\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(2t)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. ■

4. Intégrale d'une fonction de signe constant

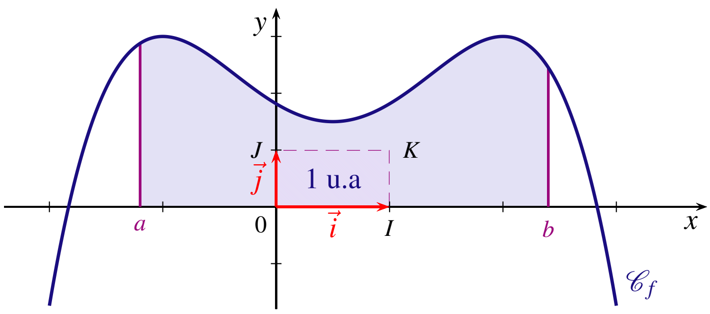
4.1 Définitions

Definition 4.1 Soit $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'**unité d'aire**, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $\mathrm{I}(0;1)$, $\mathrm{J}(0;1)$ et $\mathrm{K}(1;1)$.



Definition 4.2 Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'**intégrale de f** entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$

Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



R

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ se lit « *intégrale de a à b de* $f(x)\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ et f est l'**intégrande**.

— La variable x est dite « *muette* », elle n'intervient pas dans le résultat ; on peut donc la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$.

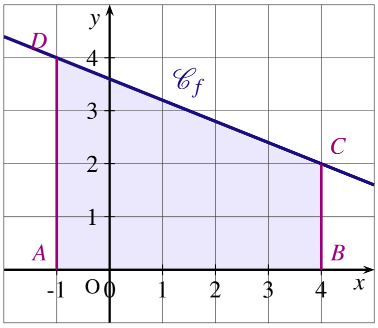
— $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

■ **Exemple 4.1**

Calculons $\int_{-1}^{4}(-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$.

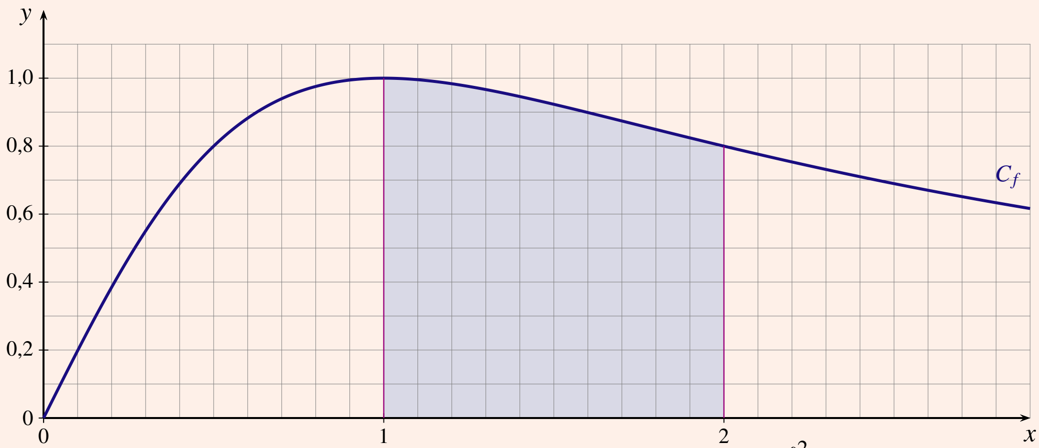
L'intégrale $\int_{-1}^{4}(-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.



$$\int_{-1}^{4}(-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x = \frac{(AD+BC)\times AB}{2} = \frac{(4+2)\times 5}{2} = 15$$

■

Exercice 4.1 La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0;+\infty[$.

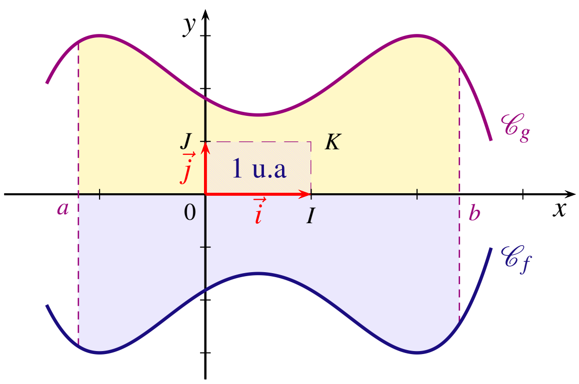


Déterminer graphiquement une valeur approchée au dixième près de $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Definition 4.3 Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$



- Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
- Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}_g$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

4.2 Lien entre intégrale et primitive

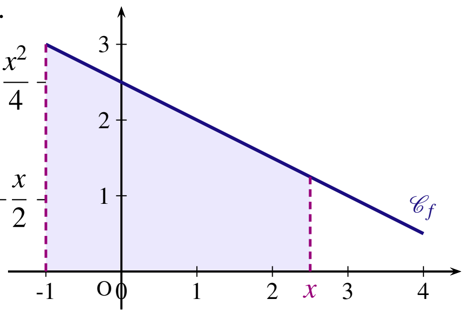
Definition 4.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 4.1 (admis)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F_a définie sur $[a;b]$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a.

R D'après la remarque précédente, on a bien $F_a(a)=\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

Exemple 4.2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.
Si x est un réel de l'intervalle $[-1;4]$, la fonction F définie par
$F(x)=\int_{-1}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.



On a donc $F(x)=\frac{(3+(-0,5x+2,5))\times(x+1)}{2}=-\frac{x^2}{4}$ $\frac{5x}{2}+\frac{11}{4}$
La fonction F est dérivable sur $[-1;4]$ et $F'(x)=-\frac{x}{2}$ $\frac{5}{2}=f(x)$.

$$\int_{-1}^{4}(-0,4x+3,6)\,\mathrm{d}x=\frac{(AD+BC)\times AB}{2}=\frac{(4+2)\times 5}{2}=15$$

Proposition 4.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal 0 $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

Démonstration. Considérons F_a et F deux primitives de f. Il existe donc un réel k tel que $F_a=F+k$.
On écrit alors : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F_a(b)=F(b)+k$. Or

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow F_a(a)=0\Leftrightarrow F(a)+k=0\Leftrightarrow k=-F(a)$$

donc $F(b)+k=F(b)-F(a)$

On en déduit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$ ■

R

— Cette propriété reste valable pour une fonction continue dont le signe n'est pas constant.

— La différence $F(b)-F(a)$ **se note** $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale. En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ d'où

$$G(b)-G(a)=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$$

5. Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Dans cette partie, a et b sont deux réels quelconques. I est un intervalle contenant a et b.

5.1 Primitives et intégrale

Théorème 5.1 **(admis)**
Toute fonction f continue sur I admet des primitives sur I.

Definition 5.1 Lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I, on définit l'**intégrale de f sur l'intervalle $[a;b]$** par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.

R Attention, dans ce cas, on ne peut plus interpréter géométriquement l'intégrale comme l'aire d'un domaine !

■ **Exemple 5.1** La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$, est continue sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$. Donc

$$\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_2^5 = \frac{15}{2}$$

■

Exercice 5.1 Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

$A = \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $B = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1\right)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $C = \int_{-2}^{1} 2\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$

$D = \int_0^{\ln 2} 2\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x + 1)\,\mathrm{d}x$ $\quad$ $E = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

■

5.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 5.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$$

■

Proposition 5.2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de *mathbbR*, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

■

Proposition 5.3 **Linéarité de l'intégrale**
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration.

— Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F+G$ est une primitive sur I de la fonction $f+g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x &= (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) = (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

— Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\int_a^b kf(t)\,\mathrm{d}t = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha\,(F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

■ **Exemple 5.2** Soit f une fonction telle que $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$, calculer $\int_1^3 \left(\frac{3}{2}f(x) - x\right)\mathrm{d}x$. ■

Proposition 5.4 **Relation de Chasles**
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

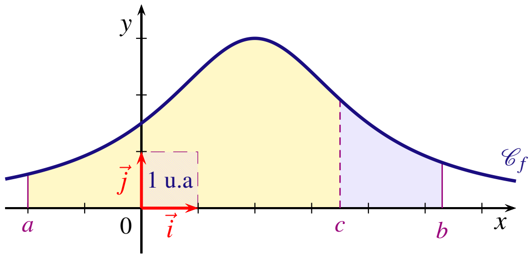
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = (F(c)-F(a)) + (F(b)-F(c)) = F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

R Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



Exercice 5.2 On considère la fonction f sur l'intervalle $[-2;4]$ définie par :

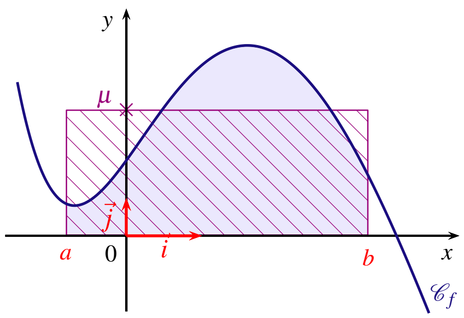
$$f(x) = x \quad \text{si } x \in [-2;1]$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \in [1;4]$$

Montrer que la fonction f est continue sur $[-2;4]$ puis calculer $\int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$. ■

Definition 5.2 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle **valeur moyenne de f** sur $[a;b]$ le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

R Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$.



Exercice 5.3 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :
1. $f(x) = (2-x)(x-1)$ sur $I = [-1;0]$ **2.** $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1;1]$. ■

5.3 Inégalités et intégrales

Proposition 5.5 Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Pour tout réel x de l'intervalle I, $F'(x) = f(x)$.
Or $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$ donc F est croissante sur $[a;b]$. Par conséquent, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$.
On en déduit que $F(b) - F(a) \geqslant 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. ■

R **Attention la réciproque est fausse !** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\int_{-2}^{3} \left(-x^2 + 3x + 1\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{3} = \left(-9 + \frac{27}{2} + 3\right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2\right) = \frac{5}{6}$$

Ainsi $\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.

R On démontre de manière analogue la propriété suivante :

> « *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.*
> *Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.* »

Exercice 5.4 Déterminer sans calculatrice le signe de $\int_{-2}^{0} (e^x + e^{-x})\,\mathrm{d}x$. ■

Corollaire 5.1 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Démonstration. Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f - g \leqslant 0$ alors

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0 \iff \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

■

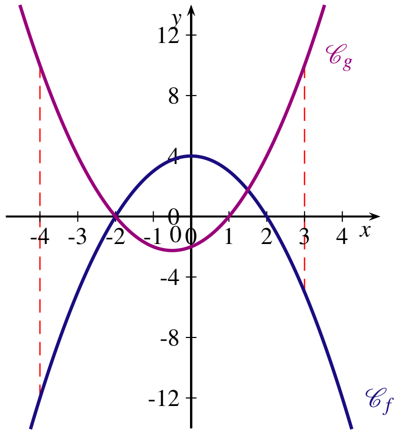
R **Attention la réciproque est fausse :** Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\int_{-4}^{3} \left(4 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3} = \left(12 - \frac{27}{3}\right) - \left(-16 + \frac{64}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

et

$$\int_{-4}^{3} \left(x^2 + x - 2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-4}^{3} = \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6\right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8\right) = \frac{77}{6}$$

Ainsi, $\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



Proposition 5.6 Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

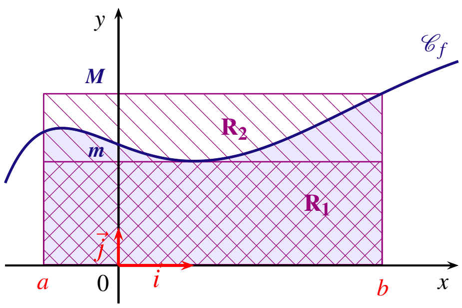
Démonstration. Les fonctions définies sur $[a;b]$ par $x \longmapsto m$ et $x \longmapsto M$ sont constantes donc continues.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$ ($a < b$), $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\int_a^b m\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\ \mathrm{d}x \iff m\int_a^b \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b \mathrm{d}x$$

$$\iff m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

■

R Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



Exercice 5.5 Démontrer que $\dfrac{8}{9} \leqslant \displaystyle\int_0^8 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 8$. ■

5.4 exercises sur les primitives et intégrales

Exercice 5.6

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx$ **b.** $\int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx$ **c.** $\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)\,dx$

d. $\int_{0}^{10} e^{-5x}dx$ **e.** $\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)\,dx$ **f.** $\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)\,dx$

g. $\int_{0}^{1} e^{2x}dx$ **h.** $\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$ **i.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x)-3\sin(5x))dx$

j. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx$ **k.** $\int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}dx$ **l.** $\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}dx$

Exercice 5.7

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-3}^{3} (x^5+2x^3-2x)\,dx$ **b.** $\int_{-2}^{4} 2xe^{x^2}dx$ **c.** $\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\cos\left(x^2\right)dx$

d. $\int_{-3}^{3} \cos(x)dx$ **e.** $\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx$ **f.** $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$

Exercice 5.8

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$

3. Calculer alors $\int_{1}^{3} f(x)dx$

Exercice 5.9

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & , \text{ si } x < -1 \\ 2x^3-x+1 & , \text{ si } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Calculer $\int_{-4}^{1} f(t)dt$

Exercice 5.10

On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I = \int_{0}^{1} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Expliquer pourquoi $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.

2. En remarquant que $x = x+1-1$, démontrer que pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
$f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels à déterminer.
3. En déduire que $I = 1 - \ln(2)$.

Exercice 5.11

En remarquant que pour tout réel t, $t^3 = t^3 + t - t$, calculer la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5.12

Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{3u^2+2u-1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 5.13

Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

Exercice 5.14

Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{e^{-x}}\right)\mathrm{d}x \qquad J = \int_1^2 2xe^{x^2+x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5.15

Soit f et g deux fonctions continues sur $[1;2]$ telles que : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ et $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 (5f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x)\right)\mathrm{d}x$

Exercice 5.16

Réduire chacune des expressions suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{x^2} - 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{-2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x - \int_3^1 \mathrm{d}u + \int_3^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

6. Intégration par parties

6.1 Intégration par parties

Proposition 6.1 Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et a et b deux réels de I.
On suppose de plus que les dérivées u' et v' sont continues sur I. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.
De plus, les fonctions u, v, u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue, et

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on obtient :

$$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

■

R

— Il est parfois utile de remarquer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \times f(x)\,\mathrm{d}x$ pour effectuer une intégration par parties en utilisant $u'(x) = 1$.
— Le choix des fonctions u' et v est important pour permettre de continuer les calculs. Il ne faut pas oublier que certaines fonctions sont plus faciles à intégrer que d'autres (exponentielle, fonctions polynômes).

■ **Exemple 6.1** Calculons $\displaystyle\int_{-1}^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

On définit les fonctions u et v sur $[-1;0]$ par $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.
Ainsi, pour tout $x \in [-1;0]$, on peut poser $u(x) = \mathrm{e}^x$ et on a $v'(x) = 1$ et u et v sont dérivables sur $[-1;0]$. u' et v' sont continues sur $[-1;0]$.
En utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\int_{-1}^0 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - [\mathrm{e}^x]_{-1}^0 = 2\mathrm{e}^{-1} - 1$$

■

Exercice 6.1 Calculer les intégrales suivantes :

• $I=\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ • $J=\int_0^{3} xe^{x}\,\mathrm{d}x$ • $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ • $L=\int_0^{\pi} (2-2x)\sin(x))\,\mathrm{d}x$

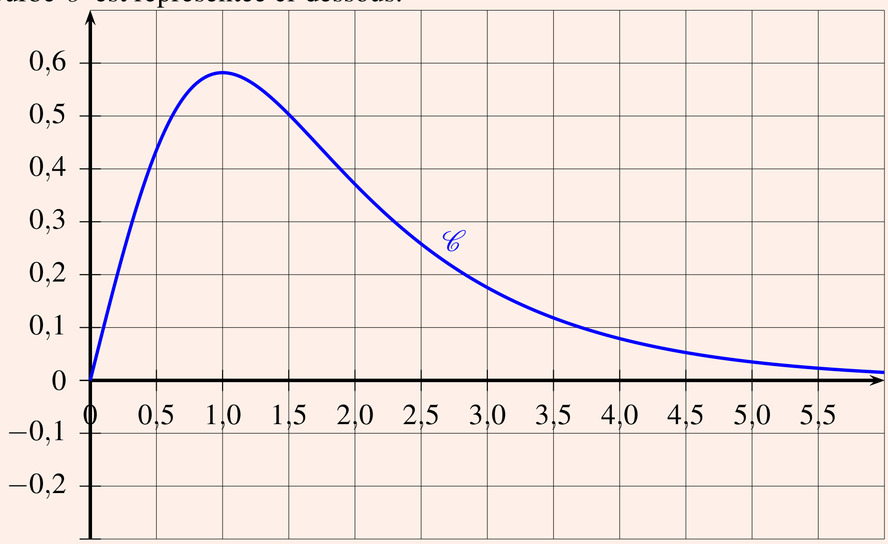
■

Exercice 6.2 **exercise corrigé**

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que :

$$f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x-x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous.



Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

$I_n=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1}-I_n=\int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{n} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$
On admet dans le texte que la fonction f est positive sur $[0;+\infty]$ donc sur $[n;n+1]$; on peut en déduire que $\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x>0$ et donc que $I_{n+1}-I_n>0$ pour tout n.
La suite (I_n) est donc croissante.

2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^x-x\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant\int_0^n 2x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Sur $[0 ; +\infty[$, on sait que $\mathrm{e}^x-x\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{2}$; de plus, pour tout x, $\mathrm{e}^x-x>0$, donc $\frac{1}{\mathrm{e}^x-x}\leqslant\frac{2}{\mathrm{e}^x}$.

On multiplie cette inégalité par $x \geqslant 0$ donc :

$$\frac{x}{e^x - x} \leqslant \frac{2x}{e^x}$$

D'après la positivité de l'intégration :

$$\int_0^n \frac{x}{e^x - x}\,dx \leqslant \int_0^n \frac{2x}{e^x}\,dx$$

ce qui équivaut à

$$I_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\,dx$$

b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x-1)e^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
La fonction H est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$H'(x) = -1 \times e^{-x} + (-x-1)(-1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x}$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.
On déduit de la question précédente que la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{-x}$.Donc

$$\int_0^n 2xe^{-x}\,dx = \left[2(-x-1)e^{-x}\right]_0^n = 2(-n-1)e^{-n} - \left[2(-1)e^0\right] = 2 - 2(n+1)e^{-n}$$

Pour tout x, $e^x > 0$ donc

$$2(n+1)e^{-n} > 0 \;\; \textit{donc} \;\; 2 - 2(n+1)e^{-n} \leqslant 2$$

Par suite,

$$\left.\begin{array}{l} I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx \\ \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx \leqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow I_n \leqslant 2$$

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.
La suite (I_n) est croissante et majorée par 2 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (I_n) est convergente. ■

6.2 exercises sur l'intégration par parties

Exercice 6.3
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$. ■

Exercice 6.4
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^4 x\ln(x)dx$. ■

Exercice 6.5
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 4xe^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 xe^{4+5x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_0^1 -xe^x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
■

Exercice 6.6
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3}\,\mathrm{d}x$
■

Exercice 6.7
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-1}^3 3x^2e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_0^2 4(2x+1)^3e^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$
■

Exercice 6.8
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$. ■

Exercice 6.9
En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\int_0^1 x^2e^xdx$ ■

Exercice 6.10
Calculer les intégrales données à l'aide d'une double intégration par partie :

1. $\int_{-1}^3 \frac{3}{2}x^5e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_{-1}^0 x^5e^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int_{-1}^3 x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int_0^1 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x$
■

Exercice 6.11
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2. ■

Exercice 6.12

On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos(x)dx$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x \sin(x)dx$

2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.

3. En déduire la valeur de I. ■

7. Changement de variable

Théorème 7.1 Soit f une fonction continue sur le segment $[\varphi(a), \varphi(b)]$, où φ effectue une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,b]$ vers$[\varphi(a), \varphi(b)]$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Démonstration. C'est cette fois-ci une conséquence directe de la formule de dérivation d'une composée : $\varphi' \times f \circ \varphi$ a pour primitive $F \circ \varphi$ (où F est une primitive quelconque de f), donc $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du =$

$$[F \circ \varphi(u)]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

■

R En pratique on n'utilise pas vraiment la formule telle quelle. Si on dispose d'une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ avec une fonction compliquée et qu'on souhaite remplacer une partie de la fonction par une nouvelle variable allégée, on ńposeż $t = \varphi(x)$, et on effectue alors les modification suivantes dans notre intégrale :
- on remplace les bornes a et b par $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
- on remplace dans l'intégrale $f(x)$ par $f \circ \varphi(t)$ (autrement dit, on remplace tous les x par des t).
- on modifie le dx en $\varphi'(t)dt$ (on écrira simplement $dx = \varphi'(t)dt$ même si c'est un abus de notation).

Ces modification reviennent bien à appliquer la formule donnée dans le théorème.

Exercice 7.1 — Exercice corrigé. En effectuant le changement de variables demandé, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ en posant $x = \sqrt{t}$;
2. $\int_1^e \frac{dt}{2t\ln(t)+t}$ en posant $x = \ln t$.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une fonction de classe C^1 définie sur $[1,4]$ et à valeurs dans $[1,2]$. Posons $x = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1, x = 1$ et lorsque $t = 4, x = 2$. Lorsqu'on dérive l'égalité $x = \sqrt{t}$, alors on obtient $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$. On a donc
$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = 2(1-\sqrt{t})\frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2(1-x)dx$$
On en déduit que
$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t} dt = \int_1^2 2(1-x)dx \left[2x-x^2\right]_1^2 = -1$$
Remarquons qu'on aurait pu aussi calculer cette intégrale en écrivant
$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} - 1.$$
2. La fonction $t \mapsto \ln t$ est de classe C^1 sur $[1,e]$. Posons $x = \ln t$ de sorte que pour $t = 1$, on a $x = 0$ et pour $t = e$, on a $x = 1$. En dérivant, on trouve $dx = \frac{dt}{t}$. On a donc
$$\frac{dt}{2t\ln(t)+t} = \frac{dt}{t} \times \frac{1}{2\ln(t)+1} = \frac{dx}{2x+1}.$$
On en conclut que
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{2t\ln(t)+t} dt &= \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^{\sqrt{1}} \\ &= \frac{\ln(3)}{2}.\end{aligned}$$

■

8. Suite définie par une intégrale

Exercice 8.1

L'exercise a pour objet d'étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel par les relations

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx, I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx, \ldots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \ldots$$

1. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.
En déduire les valeurs de I_2 et I_3.
3. Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0;1]$.
En déduire, sans essayer de calculer I_n, que la suite (I_n) est croissante.
5.a. Montrer que, pour tout nombre $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{1+e^x} \leqslant \dfrac{1}{2}$
b. En déduire un encadrement de (I_n) ; à cet effet, on calculera $\displaystyle\int_0^1 e^{nx} dx$
c. Quelle est la limite de la suite (I_n)?

Exercice 8.2

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$
1. Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2. Est-elle convergente ?

Exercice 8.3

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
1. Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$
2. La suite (I_n) est-elle convergente ?
3. On pose pour tout entier naturel non nul : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 8.4
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx$ On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.
1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{e}{2}$.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ? ■

Exercice 8.5
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^\pi x^2 \cos(nx)\,dx$.
A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n. ■

Exercice 8.6
Soit (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.
1.a. Calculer I_0 et I_1.
b. Exprimer I_2 en fonction de I_1, puis en déduire I_2.
c. Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2.a. Démontrer que, pour tout entier n, $I_n \geq 0$.
b. Étudier le sens de variation de la suite I.
c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3.a. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leqslant \frac{1}{ne}$.
c. En déduire la limite de la suite (I_n). ■

Exercice 8.7
Soit la suite (u_n) de nombres réels définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente. ■