Fonctions numériques d'une variable réelle (Partie I)

Notes de cours

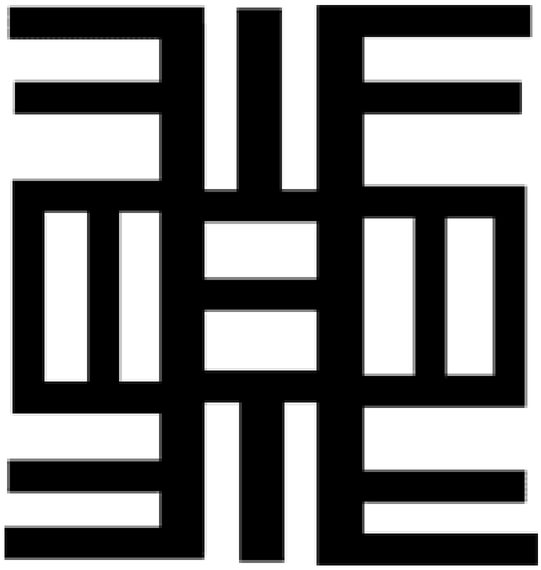
Mohamed Nassiri

Avertissement

Il s'agit de notes de cours pour la Préparation à l'Agrégation externe de Sciences Economiques et Sociales de Sciences Po Lille (Institut d'Études politiques de Lille).
Le présent document n'a pas la prétention d'être un cours absolument complet.

WWW.COQUILLAGESETPOINCARE.FR

Dernière version, septembre 2022.



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

II Limites de fonctions

Fonctions usuelles

1. Quelques propriétés des fonctions

1.1 Les opérations algébriques

Definition 1.1 Si f et g sont deux fonctions définies sur le même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on a alors les résultats suivant :

1. Somme : la fonction somme $f+g$ est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x).$$
2. Produit : la fonction produit fg est définie pour tout réel x de l'intervalle I par :
$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$
3. Quotient : lorsque la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle I, la fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie pour tout réel x de I par :
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

R Il est important de rappeler que l'on ne peut pas diviser par 0 et donc il faudra absolument que le domaine de définition de g comprenne entre autre le fait que $g(x)$ ne s'annule pas pour x dans ce domaine.

1.2 La restriction

Definition 1.2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit I_0 un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans I. On appelle **restriction** de f à I_0 que l'on note $f|_{I_0}$, la fonction définie sur I_0 par : pour tout $x \in I_0$, $f|_{I_0}(x) = f(x)$

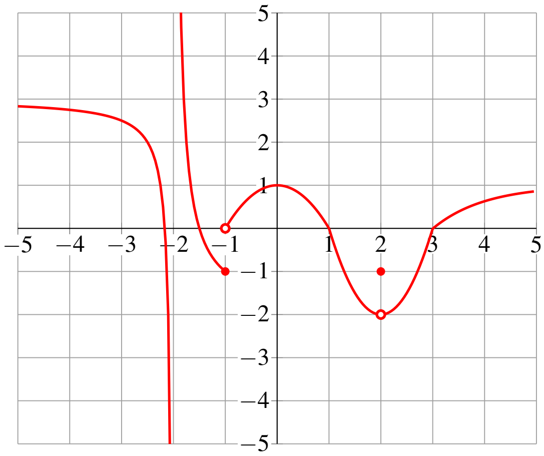
R Cette définition signifie juste que les fonctions f et $f|_{I_0}$ prennent les mêmes valeurs en chaque point de l'intervalle I_0.

1.3 Fonctions définies par morceaux

L'image de la fonction que l'on avait jusqu'à maintenant est celle d'une courbe assez régulière que l'on peut dessiner à main levée sans trop de problème. Il se peut en fait qu'une fonction soit définie par des petits morceaux que l'on peut rapiécer Ces morceaux de fonctions peuvent se toucher ou non suivant ce que l'on étudie.
Si l'on considère par exemple un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient plusieurs sous intervalles I_1, I_2, ..., I_n (où n est un entier naturel). On suppose que ces intervalles ne se chevauchent pas, sinon nous aurions des problèmes, nous ne serions pas en présence de fonctions dans un cadre général. Ces intervalles peuvent se toucher en découpant ainsi l'intervalle I en n sous intervalles ou non. Supposons qu'en chacun de ces sous-intervalles la fonction f possède une expression différente. Autrement dit, en reprenant la notation de la restriction de la section précédente nous aurions :

$$f_{|I_1} = f_1, \quad f_{|I_2} = f_2, \quad ..., f_{|I_n} = f_n$$

. La fonction ainsi définie serait une fonction par morceaux (voir exemple sur la figure ci-dessous)



1.4 Fonctions majorées, minorées, bornées

Definition 1.3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Etant donné un réel M, la fonction f est dite **majorée** (par M) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \leqslant M$$

— Etant donné un réel m, la fonction f est dite **minorée** (par m) sur I si pour tout réel de I :

$$f(x) \geqslant m$$

— La fonction f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.

R La majoration ou la minoration de f peuvent ne pas exister. Elles peuvent également ne pas être unique. Il suffit de trouver un majorant ou un minorant qui marche. Si ce majorant (ou minorant) est le plus petit des majorants (ou plus grand des minorants), ça peut être soit la borne supérieure (ou inférieure), soit le maximum (ou le minimum) de la fonction. Tout dépend en fait de l'appartenance ou non de ce majorant ou minorant dans l'intervalle d'arrivée.

Quelques fois, ce n'est pas un nombre qui majore (ou minore) une fonction. Il se peut que ce soit une autre fonction. Nous avons alors les définitions suivantes.

Definition 1.4 Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$.
— On dit que **f majore g** si pour tout x de I :

$$f(x) \geqslant g(x)$$

On écrit alors $f \geqslant g$.
— On dit que **f minore g** si pour tout x de I :

$$f(x) \leqslant g(x)$$

On écrit alors $f \leqslant g$.

1.5 Monotonie

Definition 1.5 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
— La fonction f est dite **croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a : si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$
— La fonction f est dite **décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a : si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$
— La fonction f est dite **strictement croissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$
— La fonction f est dite **strictement décroissante** sur I si pour tous x_1 et x_2 de l'intervalle I on a : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$
— La fonction f est dite **monotone** sur I si elle y est croissante ou décroissante.
— La fonction f est dite **strictement monotone** sur I si elle y est strictement croissante ou strictement décroissante.

1.6 Parité

Definition 1.6 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
f est une fonction **paire** si et seulement si $f(-x) = f(x)$.
f est une fonction **impaire** si et seulement si $f(-x) = -f(x)$.

1.7 La composition

Definition 1.7 Soit f et g deux fonctions.
On appelle **fonction composée** de g par f la fonction, notée $f \circ g$,

$$x \mapsto f(g(x))$$

■ **Exemple 1.1** On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^4$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Alors $f(g(x)) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ ■

R [Attention !] $f(g(x))$ n'est pas toujours égal à $g(f(x))$. Dans l'exemple précédent, on a

$$f(g(x)) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4 \quad \text{alors que} \quad g(f(x)) = 2 - \frac{1}{x^4}$$

2. Fonctions usuelles

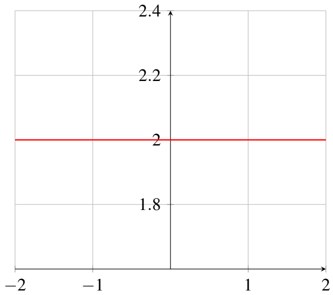
2.1 Fonction constante

Definition 2.1

• Soit a un réel. La **fonction constante** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel a $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto a\end{cases}$$

• Sa courbe représentative est une **droite horizontale**.



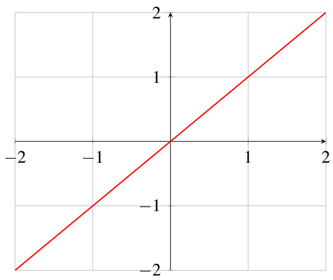
2.2 Fonction identité

Definition 2.2

•La **fonction identité** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel x $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x\end{cases}$$

• Sa courbe représentative est une **droite**.

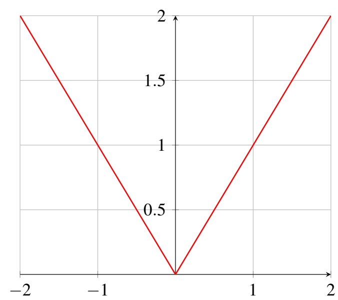


2.3 Fonction valeur absolue

Definition 2.3

•La **fonction valeur absolue** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel $|x|$ $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}\end{cases}$$



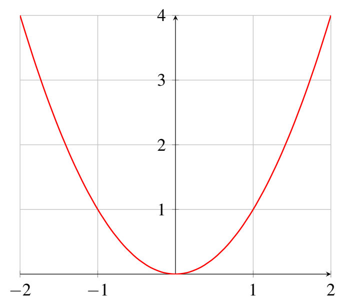
2.4 Fonction carrée

Definition 2.4

• La **fonction carré** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel x^2 $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto x^2\end{cases}$$

• Sa courbe représentative est une **parabole**.



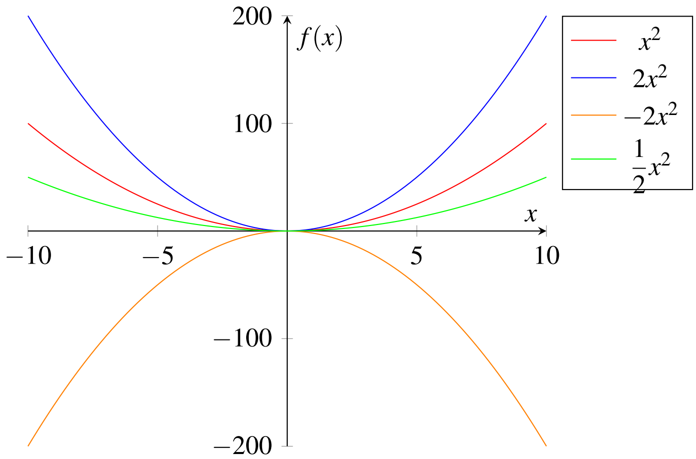
R Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition 2.1

1. Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$.
2. La fonction carré est paire.
3. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

R A partir de la fonction carré, on peut créer un *faisceau de courbes* tout simplement en multipliant x^2 par un nombre réels.



Remarquons qu'en multipliant la fonction carré par un nombre négatif, les variations de la nouvelle fonction sont "inversées" par rapport à la fonction carré.

2.5 Fonction puissances entières $n \in \mathbb{N}$

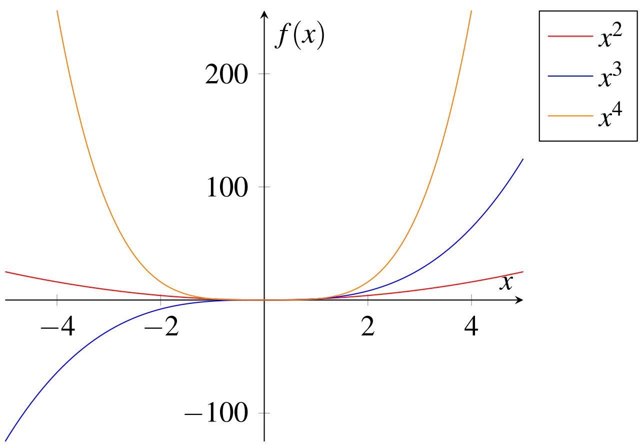
Definition 2.5
La **fonction puissance entière** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel x^n, pour $n \in \mathbb{Z}$ (*i.e.*) :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

R

- Si $n = 0$ on retrouve la fonction constante définie plus haut.
- Si $n = 1$ on retrouve la fonction identité définie plus haut.
- Si n est pair, la fonction f est paire.
- Si f est impaire, la fonction f est impaire.
- Si n est un entier négatif, il faut bien faire attention au domaine de définition qui devient $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$ (c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 0).
- Si $n = -1$ on retrouve la fonction inverse classique (que l'on verra plus loin) :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^{-1} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$



2.6 Fonction polynôme

Definition 2.6 La **fonction polynôme** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ $(i.e)$

$$P:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\end{cases}$$

avec n un entier naturel et soient a_0, a_1, ... , a_n des nombres réels avec $a_n \neq 0$

R

- On note souvent les polynômes par les lettres P, Q, etc.
- n est appelé le **degré de P**
- On peut également écrire $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_kx^k$.

.
On appelle (ou plus simplement **polynôme de degré** n), la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par

2.7 Fonction racine carrée

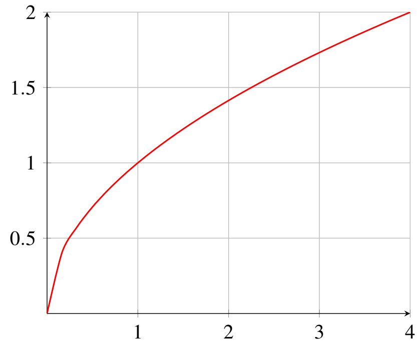
Definition 2.7

• Pour tout réel positif x, la **racine carrée** de x est le nombre positif, noté $\sqrt{x}$, tel que :

$$(\sqrt{x})^2=x$$

• La **fonction racine carrée** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel $\sqrt{x}$ $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \sqrt{x}\end{cases}$$



R On dit que la fonction racine carrée est la **fonction réciproque** de la fonction carré. Les fonctions réciproques vérifient le schéma suivant (que l'on illustré avec les fonction carré et racine carrée) :

$$x \xrightarrow{\text{fonction racine carrée}} \sqrt{x} \xrightarrow{\text{fonction carré}} (\sqrt{x})^2=x$$

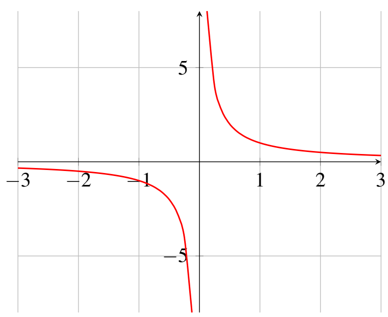
2.8 Fonction inverse

Definition 2.8

• La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui, à tout réel x différent de 0, associe son inverse $\frac{1}{x}$ $(i.e)$

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^* & \to \mathbb{R}^*\\ x & \mapsto \dfrac{1}{x}\end{cases}$$

• Sa courbe représentative est une **hyperbole**.



R Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Proposition 2.2

1. La fonction inverse est impaire.
2. La fonction inverse ne s'annule pas sur son ensemble de définition.
3. La fonction inverse est strictement décroissante sur $[-\infty;0[$ et est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -\infty$

2.9 Fonction rationnelle

Definition 2.9 Une **fonction rationnelle** est une fonction définie par le quotient de fonctions polynômes $(i.e)$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

avec P et Q deux polynômes.

R
- Toute fonction polynomiale non nulle Q est acceptable mais la possibilité que pour un a donné, $Q(a) = 0$ implique que contrairement aux fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles n'ont pas un domaine de définition toujours égal à $\mathbb{R}$.
- Les racines du polynôme Q sont appelées **pôles de la fonction rationnelle**.
-

■ **Exemple 2.1** Soit f la fonction définie par

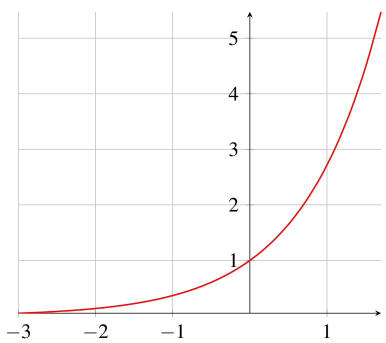
$$f(x) = \frac{x^3 + 7x - 4}{x^2 - 1}$$

Cette fonction est définie pour tout nombre réel x mais elle ne l'est pas pour tous les nombres complexes. Le dénominateur s'annule quand $x = 1$ et quand $x = -1$. ■

2.10 Fonction exponentielle de base *e*

Definition 2.10
La **fonction exponentielle de base** e est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$.
On la note $x \mapsto \exp(x) = e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	$0 \nearrow$	$+\infty$



Proposition 2.3 — Règles de calcul. Ce sont les règles usuelles de calcul sur les puissances :

$$e^0 = 1\ ,\ e^1 = e \simeq 2,718$$
$$e^{a+b} = e^a e^b\ ,\ e^{-a} = \frac{1}{e^a}\ ,\ e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}\ ,\ (e^a)^b = e^{ab}$$

2.11 Fonction logarithme népérien

Definition 2.11
Pour tout nombre a strictement positif, on appelle **logarithme népérien** de a l'unique solution réelle de l'équation $e^x = a$.
Autrement dit, on a, pour $a > 0$,

$$e^x = a \iff x = \ln(a)$$

Proposition 2.4

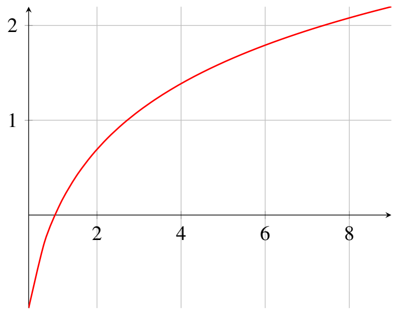
1. Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

2. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.

Definition 2.12
On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction f définie, pour tout $x \in]0;+\infty[$, par

$$f(x) = \ln(x)$$

x	0	$+\infty$
ln	0 ↗	$+\infty$



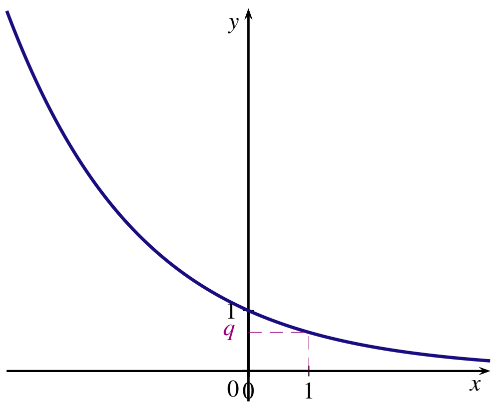
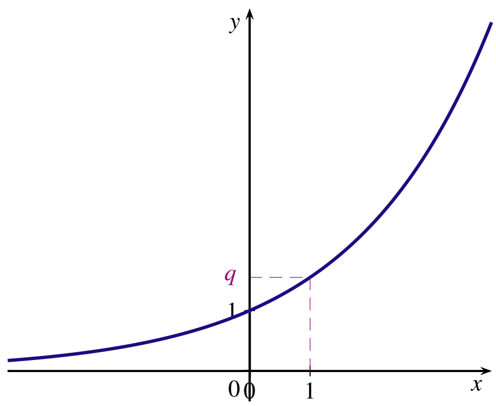
Exercice 2.1 — Exerice corrigé. Résoudre dans $\mathbb{R}$ léquation $e^{3x+5} = 2$.
Solution :

$$e^{3x+5} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5 = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}(\ln(2)5)$$

2.12 Fonction exponentielle de base *q*, avec *q*>0

Definition 2.13 Soit q un réel strictement positif. La **fonction exponentielle de base q** est la fonction qui, à tout réel x, associe le réel q^x ($i.e$)

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto q^x \end{cases}$$

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
	

Proposition 2.5 — Quelques conséquences.

— Pour tous réels x et y, $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ et $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$.
— Pour tout réel x, $q^x > 0$.
— Pour tout réel x, $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$, et en particulier $q^{0,5} = \sqrt{q}$.
— Pour tout réel x et tout entier relatif m, $(q^x)^m = q^{mx}$.
— Pour tout entier naturel $n > 0$, $q^{\frac{1}{n}}$ est « la racine n-ième » de q $(i.e.)$ Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

■ **Exemple 2.2 — Exemple pratique.** Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans.
Soit t % le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{t}{100}\right)^{15} = 0,7 \quad &\iff \quad 1+\frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} \\
&\iff \quad \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} - 1 \\
\text{Soit} \quad &\quad \frac{t}{100} \approx -0,0235
\end{aligned}$$

Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % . ■

R Il sera utile quelques fois de connaître les logarithme de base 10 (en général pour des applications en physique, chimie ou biologie), et donc plus généralement les logarithmes de base q où q est un réel strictement positif.

Definition 2.14 Soient q un réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on définit son **logarithme de base q** noté $\log_q(x)$ par

$$\log_q(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(q)}$$

R Le logarithme népérien ln est le logarithme de base e, c'est celui que l'on utilisera le plus souvent, et c'est celui qui est le plus simple, que l'on croise le plus naturellement (même si historiquement ce n'est pas celui-là qui a été utilisé en premier par John Napier (ou Neper) en 1614 qui à donné son nom à cette fonction). C'est pour cela qu'on l'appelle aussi logarithme naturel (celui-ci est dû à Nicolaus Mercator (en 1668)).

II Limites de fonctions

3. Limite d'une fonction en $+\infty$ et $-\infty$

3.1 Limites infinies

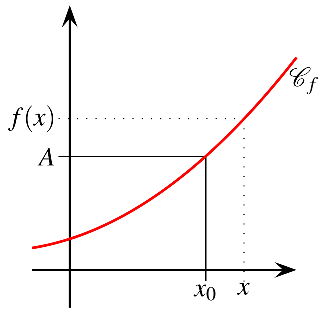
Definition 3.1 — On dit que la fonction f **admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** si, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

— On dit que la fonction f **admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$** si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A]$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisament grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

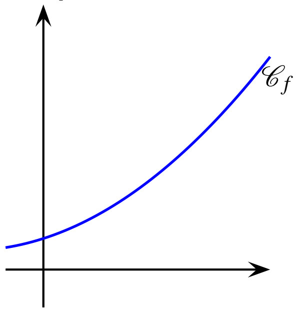
R On a bien évidemment des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

R

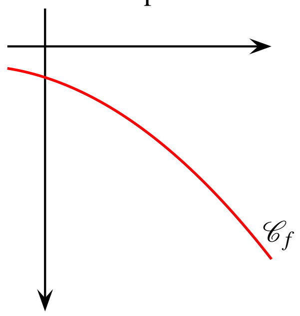
On peut rapprocher cette définition avec celle des suites. Tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, pour tout réel A, il existe un réel x_0 tel que pour tout $x > x_0$ alors $f(x) > A$: les nombres $f(x)$ peuvent plus grands que n'importe quel nombre A, dès qu'on choisit x assez grand.



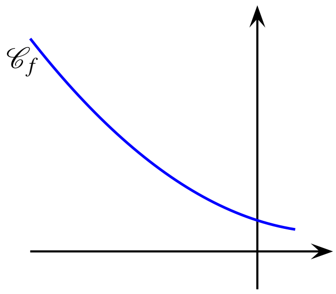
■ **Exemple 3.1** Pour les limites infinies, on a donc quatre cas sont possibles :



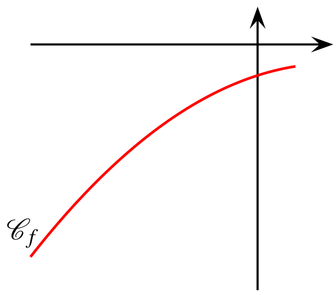
Pour x suffisament grand positivement, $f(x)$ est assez grand positivement. On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Pour x suffisament grand positivement, $f(x)$ est assez grand négativement. On érit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.



Pour x suffisament grand négativement, $f(x)$ est assez grand positivement. On écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



• Pour x suffisament grand négativement, $f(x)$ est assez grand négativement.

• Soit $f(x) = x^2$ la fonction carré.
Pour tout $A > 0$, dès que $x > \sqrt{A}$, $f(x) = x^2 > A$, donc, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On érit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. ■

Proposition 3.1 Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.

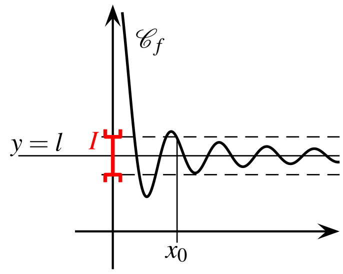
Démonstration. Démonstration pour le·a lecteur·trice. ■

3.2 Limite finie et asymptote horizontale

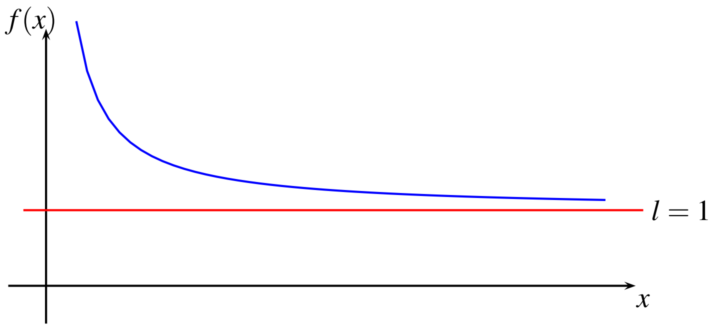
Definition 3.2 On dit que la fonction f **admet pour limite un réel** l **lorsque** x **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

R On a bien évidemment une définition équivalente pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Comme précédemment, on peut rapprocher cette définition avec celle des suites. Tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
Autrement dit, pour tout intervalle I contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour si $x > x_0$ alors $f(x) \in I$.



■ **Exemple 3.2** Soit la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$.



$f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 1 que l'on veut dès que x est assez grand..
On peut donc conjecturer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

■

Proposition 3.2 **(admise)**

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

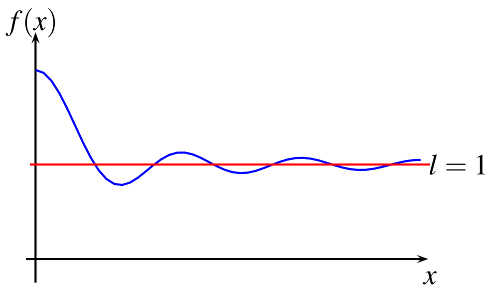
On a même, pour tout réel k,

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to -\infty} k\mathrm{e}^x = 0$
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$

Definition 3.3 La droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $+\infty$ ou $-\infty$ si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$.

■ **Exemple 3.3** Soit la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$.

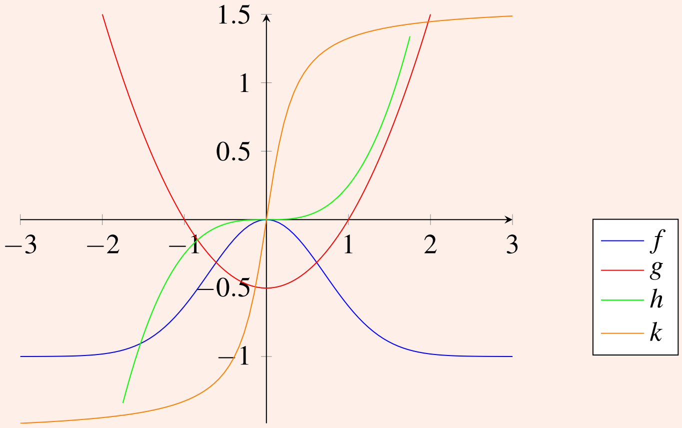
$f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 1 que l'on veut dès que x est assez grand. On peut donc conjecturer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
Par conséquent, la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.



■

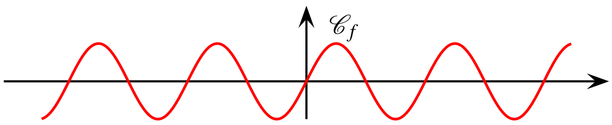
R L'étymologie grecque du mot « *asymptote* » construit à l'aide du préfixe privatif « *a* » et de « *symptôsis* » (rencontre) laisse imaginer que deux courbes asymptotes ne se rencontrent pas. Cette impression est renforcée par certains usages littéraires du terme : « La science est l'asymptote de la vérité. Elle approche sans cesse et ne touche jamais » (Victor Hugo. William Shakespeare - L'art et la science).

Exercice 3.1 Dans le repère ci-dessous, on a tracé les courbes représentatives des fonctions f, g, h et k.



1. Conjecturer graphiquement les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des quatre fonctions.
2. Déterminer les fonctions qui ont une asymptote horizontale en précisant leur équation et s'il s'agit d'une asymptote en $-\infty$ ou $+\infty$.

R Il existe des fonctions qui n'ont pas de limite en l'infini...



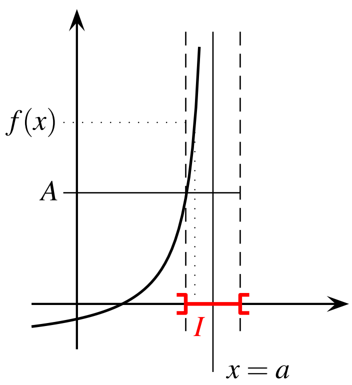
4. Limite d'une fonction en un réel *a*

4.1 Limite infinie et représentation graphique

Definition 4.1
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

- On dit que la fonction **f admet pour limite un réel $+\infty$ lorsque x tend vers a** si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

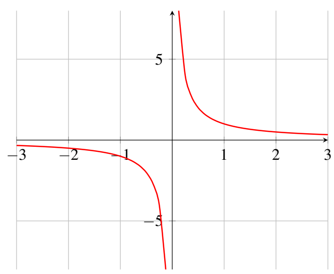
- On dit que la fonction **f admet pour limite un réel $-\infty$ lorsque x tend vers a** si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$ contient $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.



R

Une fonction peut avoir une **limite à droite** et **limite à gauche** qui sont différentes.
Par exemple avec la fonction inverse, on a :

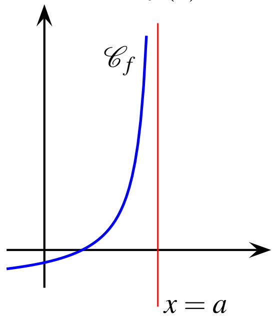
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$$



Definition 4.2
La droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

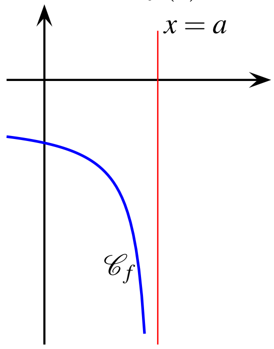
■ **Exemple 4.1** Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, deux cas de limites infinies peuvent donc se présenter :

• Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand :



$f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes pour x suffisamment proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
On dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

• Les nombres $f(x)$ deviennent infiniment grand négativement :



$f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue pour x suffisamment proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
On dit que la droite d'équation $x=a$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$.

■

Proposition 4.1 Soit a un nombre réel.

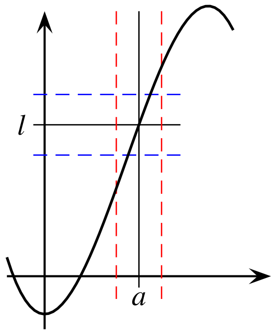
•$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} \dfrac{1}{x-a}=-\infty$ •$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} \dfrac{1}{x-a}=+\infty$ •$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$ •$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$

Démonstration. Démonstration pour le·a lecteur·trice. ■

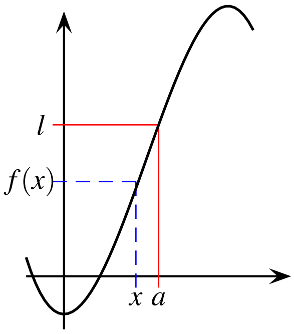
4.2 Limite finie

Definition 4.3
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel.

On dit que la fonction <u>f **admet pour limite** l **lorsque** x **tend vers** a</u> si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x suffisament proche de a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.



■ **Exemple 4.2**



$f(x)$ se rapproche aussi proche de l que l'on veut pourvu que x soit suffisament proche de a
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

■

Proposition 4.2 **(admis)**
Soit a un réel.
- Si $a \geqslant 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$.
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$.

Exercice 4.1 On a réprésenté les variations de la fonction f dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-5		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ∥ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ∥ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	3

1. Existe-t-il des tangentes horizontales ?
2.a. Déterminer les asymptotes horizontales en précisant leur équation et s'il s'agit d'une asymptote en $-\infty$ ou $+\infty$.
b. Déterminer les asymptotes verticales en précisant leur équation.
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. ■

4.3 Opérations sur les limites

Soient f et g sont deux fonctions, et l et l' sont deux réels.
On note par la suite F.I. pour « *forme indéterminée*, c'est-à-dire un cas où on ne peut pas conclure directement.
Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.3 (admise)

$\lim f =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

R

— Dans le cas où le calcul mène à une forme indéterminée, il peut être utile de transformer l'écriture de $f+g$.
— La limite de $(f+\alpha)$, où α est un réel, est la limite de $(f+g)$ dans le cas où g est la fonction constante égale à α.

■ **Exemple 4.3** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3+2x-\dfrac{1}{x^3}$. On a :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3 \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \bullet \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0 \end{array}\right\} \text{Par addition des limites } \lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$$

■

Proposition 4.4 (admise)

$\lim f =$	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim g =$	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim f \times g =$	$l \times l'$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**F.I.**

R La limite de $k \times g$, où k est un réel non nul, est la limite de $(f \times g)$ dans le cas où f est la fonction constante égale à k.

■ **Exemple 4.4** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+x^2\right)$.

Par sommes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right) = 2$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right) = +\infty$, puis par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. ■

Proposition 4.5 **(admise)**

$\lim f =$	l	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \neq 0$ ou $+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim g =$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' \neq 0$	0 (†)	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \dfrac{f}{g} =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$ (règle des signes du produit)	**F.I.**	**F.I.**

(†) Il est important de distinguer dans ce cas si $g(x)$ tend vers 0 par valeurs positives ou négatives.

R

- La limite de $\left(\dfrac{k}{g}\right)$, où k est un réel, est la limite de $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ dans le cas où f est la fonction constante égale à k.
- On peut écrire 0^+ pour indiquer que les valeurs sont aussi proches de 0 que l'on veut en restant positives (idem avec 0^-).

■ **Exemple 4.5** Soit f la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{x^2+3}$.

Par sommes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right) = 1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+3) = +\infty$, puis par limite du quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$. ■

Exercice 4.2 Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f aux valeurs demandées :

a. $f(x) = 2x+1+\dfrac{1}{x^2}$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$ **b.** $f(x) = (4-x^2)(3x-2)$ en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$

c. $f(x) = 4x-1+\dfrac{1}{x-3}$ en 3, en $+\infty$ et en $-\infty$ **d.** $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4 ■

Exercice 4.3 Soit la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \in D$, $f(x) = x+1+\dfrac{2}{x-1}$
2. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $f(x)-(x+1)$.
3. Quelle propriété peut-on en déduire quant à $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta : y = x+1$?
4. Représenter ce résultat sur un graphique. ■

4.4 Formes indéterminées

R **Méthode en cas de forme indéterminée**
On essaie dans ce cas de lever l'indétermination en transformant l'expression (factorisation, développement, ...)
Par exemple, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-2x+4$.
On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$, donc on a une forme indéterminée pour la limite de la somme.
Néanmoins,

$$f(x) = x^2\left(1-\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right) = x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 1$, d'où, par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

R Dans l'exemple précédent, x^2 est le *terme dominant* en $+\infty$ dans l'expression de $f(x)$. C'est lui qui impose son comportement en $+\infty$, ce qui apparaît clairement quand on le factorise. On peut généraliser ce résultat.

Proposition 4.6 En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Démonstration. Soit P une fonction polynôme définie pour tout x réel par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

où $a_n \neq 0$ et $n \geqslant 1$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$P(x) = x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right)$$

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0$ Donc,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n}\right) = a_n$$

Donc, par produit, P a la même limite en $+\infty$ que $x \mapsto a_n x^n$.

On procède de même pour la limite en $-\infty$. ■

Proposition 4.7 (admis)
Soient P une fonction polynôme dont $a_p x^p$ est le monôme de plus haut degré, et Q une fonction polynôme dont le monôme de plus haut degré est $a_q x^q$, où p et q sont des entiers naturels. Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_p}{a_q}\times x^{p-q}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_p}{a_q}\times x^{p-q}\right)$$

■ **Exemple 4.6** **1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x^3 = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4-2x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3. Cas d'une fonction non rationnelle : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$ ■

4.5 Limite d'une composée de fonctions

Definition 4.4 Soit f et g deux fonctions.
On appelle **fonction composée** de g par f la fonction, notée $f \circ g$,

$$x \mapsto f(g(x))$$

■ **Exemple 4.7** On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^4$ et $g(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Alors $f(g(x)) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$. ■

R $f(g(x))$ n'est pas toujours égal à $g(f(x))$. Dans l'exemple précédent, on a

$$f(g(x)) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$$
$$g(f(x)) = 2 - \frac{1}{x^4}$$

Proposition 4.8 **(admise)**
Soient a, b et c trois réels (éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$).
Si

$$\lim_{x\to a} g(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} f(x) = c$$

alors

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$$

.

■ **Exemple 4.8** Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{-3x^2+2}$.
Comme $\lim_{x\to-\infty} (-3x^2+2) = +\infty$ et $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Ainsi, par composition des limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. ■

Exercice 4.4 Déterminer les limites suivantes :
1. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{5 - \frac{4}{x^2}}$ **2.** $\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ **3.** $\lim_{\substack{x\to0 \\ x>0}} \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ **4.** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+9-\frac{16}{x^2+4}}$ ■

4.6 Exercices de calcul de limites

Exercice 4.5
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.
1. $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
2. $f : x \mapsto x^3 - x^2$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}$ en $a = +\infty$ et en $a = -\infty$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}$ en $a = 0^+$ puis en $a = +\infty$.
5. $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ et $a = 1^+$ puis en $a = 1^-$
6. $f : x \mapsto (1-2x)e^x$ en $a = +\infty$
7. $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x) - 1}$ en $a = 0^+$ puis en $a = 0^-$
8. $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$

9. $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$

10. $f : x \mapsto \dfrac{(x+5)^2 - 25}{x}$ en $a = 0$

11. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 25}$ en $a = +\infty$, en $a = -\infty$, en $a = 5^+$, en $a = 5^-$, en $a = (-5)^+$ et en $a = (-5)^-$.

Exercice 4.6

Soit f et g deux fonctions. Justifier par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 0$

Exercice 4.7

Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a. $f(x) = x^3 - 2x$ **b.** $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2}$ **d.** $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{2x^2 + 4}$

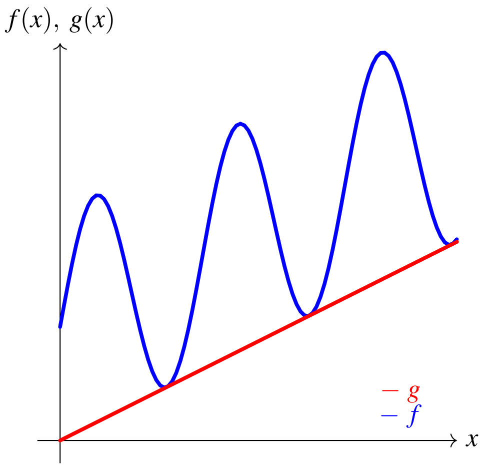
5. Limites et comparaison

5.1 Limite infinie

Proposition 5.1 Théorème de comparaison
Soit f et g deux fonctions telles que pour tout x d'un intervalle I, $f(x) \geqslant g(x)$, et $a \in I$ (éventuellement $a = \pm\infty$).

- Si $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$,
- Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$.

R Malgré son apparence, ce théorème, comme pour les suites, est assez simple. Il dit la chose suivante : si l'on a deux fonctions f et g telles que $f(x) \geqslant g(x)$, cela signifie que toutes les valeurs de la fonction g sont *en dessous* des valeurs de la fonction f. Donc si g tend vers $+\infty$, elle impose à f de tendre vers $+\infty$!
Nous ne démontrons que le premier point pour $a = +\infty$, le second étant identique au niveau du raisonnement...



Démonstration. On suppose que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
Soit M un réel. Comme $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ par définition, il existe $m \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x > m$, alors $g(x) > M$. Or, on a $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in I$.
Donc, pour tout $x \in I$, si $x > m$, alors $f(x) \geqslant g(x) > M$ et donc $f(x) > M$.
Ainsi, pour tout réel M, il existe $m \in I$ tel que, pour tout $x \in I$, si $x > m$, alors $f(x) > M$ D'où $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On procède de même pour démontrer le deuxième point. ■

■ **Exemple 5.1** Soit f la suite définie pour tout $x \geqslant -1$ par $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$. Déterminons la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour tout $x > -1$, $\sqrt{\dfrac{1}{x+1}} \geqslant 0$. En ajoutant x à chaque membre de l'inégalité, on a, pour tout $x \geqslant -1$,

$$x + \sqrt{\frac{1}{x+1}} \geqslant x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geqslant x$$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ■

Exercice 5.1 Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + \cos(x)$. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$. ■

5.2 Limite finie

Théorème 5.1 — Théorème des gendarmes pour les fonctions (admis). Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que, pour tout x de I, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
Si de plus $a \in I$ (éventuellement $a = \pm\infty$) et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = l$, alors, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

■ **Exemple 5.2**

Soit une fonction f telle que, pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

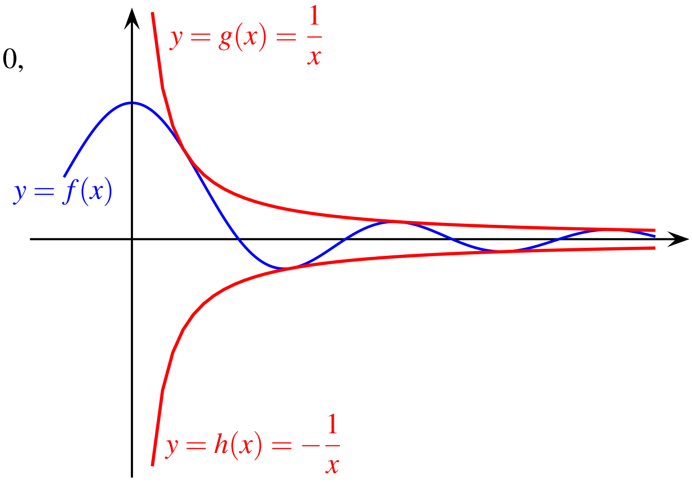
. Alors, comme

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

on a

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

■



5.3 Croissances comparées

Proposition 5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration. Nous allons faire la démonstration pour $n = 1$.

• Pour calculer la limite, nous allons minorer $\dfrac{e^x}{x}$ (pour $x > 0$) par une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Plus précisément, montrons que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{e^x}{x}$$

Le ń $\frac{1}{2}$ ż est décoratif, pour simplifier les calculs (voir plus bas). Simplifions cette inégalité.

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x} \Longleftrightarrow x^2 \leqslant 2\mathrm{e}^x \Longleftrightarrow 0 \leqslant 2\mathrm{e}^x - x^2 \qquad (x \text{ est positif ici !})$$

Pour tout $x \geqslant 0$, posons

$$\phi(x) = 2\mathrm{e}^x - x^2$$

, et étudions son signe. La fonction ϕ est dérivable (deux fois) sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\phi'(x) = 2\mathrm{e}^x - 2x \qquad \text{et} \qquad \phi''(x) = 2\mathrm{e}^x - 2 = 2(\mathrm{e}^x - 1)$$

$\phi''(x) > 0$ (*Tiens ! Pourquoi d'ailleurs ?* pour tout $x > 0$ (d'où l'intérêt du ń $\frac{1}{2}$ ż).
Donc ϕ' est strictement croissante et $\phi'(x) > \phi'(0) = 2 > 0$ pour tout $x > 0$.
Ainsi ϕ est elle aussi strictement croissante et $\phi(x) > \phi(0) = 2 > 0$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} = xe^x \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x}$. Or, pour tout $x > 0$,

$$-x\mathrm{e}^{-x} = -\frac{x}{\mathrm{e}^x} = -\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. ■

5.4 Exercices sur les croissances comparées

Exercice 5.2

Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + x}$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$ **d.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3xe^x + 4e^x + 3x}{e^{2x} + e^x + 1}$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$ **f.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{3x}}{28x}$

g. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - 3x^2 + 5x - 1\right)$ **h.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - 3x^2 + 5x - 1\right)$

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$ **j.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$

k. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$ **l.** $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x} - x\right)$ **n.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x} - x\right)$

■

Exercice 5.3

On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x) = e^x + x - 1$

1. Factoriser l'expression de $\ell(x)$ par e^x.

2. Déterminer les limites de ℓ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 5.4

Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

a. $f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ **b.** $g : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x+1}{x}$ **c.** $h : x \mapsto \mathrm{e}^x + 2$

Exercice 5.5

1.a. Démontrer que, pour tout réel $x > 0, e^{3x+2} > e^x$.

b. En déduire alors la limite de e^{3x+2} en $+\infty$.

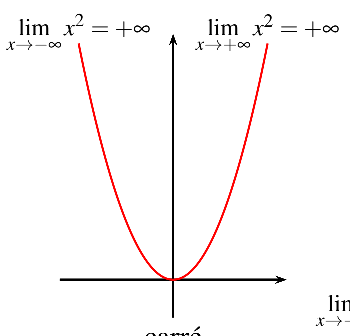
2. Calculer de la même façon la limite des expressions suivantes en $+\infty$:

a. e^{2x-1} **b.** $\dfrac{2}{e^{5x-3}}$ **c.** e^{-4x-1}

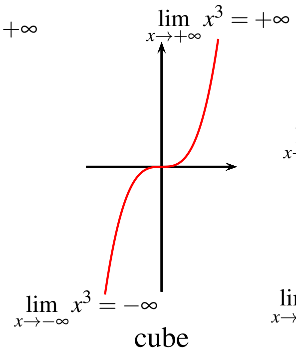
5.5 Limites de fonctions usuelles et limites particulières

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

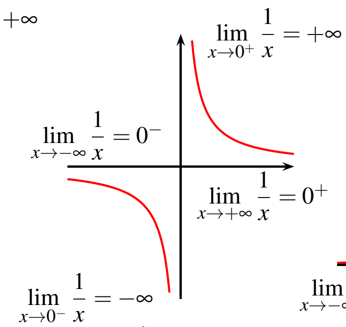
$$\lim_{x\to0+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$



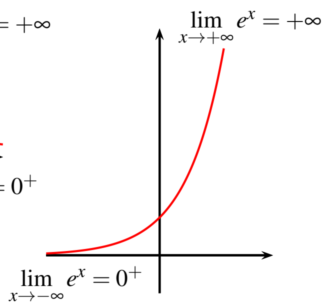
carré



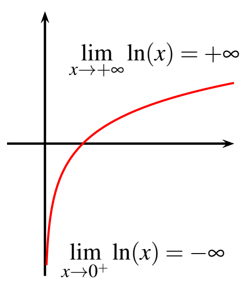
cube



inverse



exponentielle



logarithme