ALGÈBRE

1

Équations & Inéquations

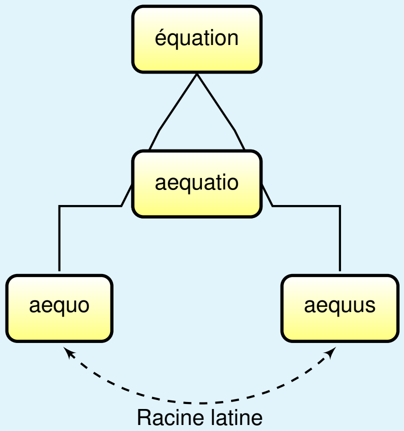
« *I love you 3000.* »

Morgan H. Stark, *Avengers : Endgame*, 2019.

Introduction

Le mot *équation* vient du latin *aequo* et *aequus*, qui ont donné *aequatio* et qui se traduit par « calme », « égal », « juste », « impartial », « juste niveau », ou encore « même ».

Le mot *équation* commence à beaucoup apparaître en France... en astrologie (l'horoscope était considéré comme une « *équation temporelle* du mouvement des astres) ; le sens général de "l'action de rendre égal" se situe dans années 1650, même si le "sens mathématique" se situe à partir des années 1560, sur la notion d'*égalisation des expressions*. Le terme "équation" en chimie arrive encore plus tard (vers 1807).



Dans son *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Stella Baruk[a] écrit ceci à propos du mot *Equation*

> *« Quand on demande à *Claude ce qu'est une équation, on obtient des réponses qui, pour ses professeurs, ne peuvent que paraître étranges : "il y a des opérations" ; "il y a des chiffres et des lettres"; "c'est des fonctions de x"; "c'est pour construire des droites" ; "c'est pour trouver x" — trouver x, soit, mais* `pour quoi faire` *? Là, mutisme : ce qu'est une équation, pas plus que ce à quoi ca peut servir, ne semble avoir fait forte impression sur Claude.*
> *En attendant de comprendre le pourquoi de certaines de ces réponses, il faut insister sur deux points essentiels et qui paraissent peut-étre trop évidents pour être soulignés :*
> **a.** *Une équation est 'construite' sur une* ***égalité** *— c'est ce dont rend compte son *étymologie. Alors qu'il peut paraître très étonnant que Claude et nombre de ses semblables ne s'en soient pas aperçus, cela se comprend mieux quand on sait que le signe de l'égalité, "=", qui se lit* ***égal(e)**, *est l'un des signes les plus fréquemment et diversement utilisés, et de ce fait les plus 'usés', des mathématiques, et qu'il peut très bien, à force, être devenu 'transparent'.*
> **b.** *"Trouver x", si c'est ce qui a été retenu, devrait au moins pouvoir se raccrocher à "trouver x pour* ***résoudre** *l'équation" ; et "résoudre l'équation", se rattacher à "résoudre l'équation pour résoudre un problème".*
> **c.** *Une équation est en effet un outil, qui peut étre utilisé dans maintes ciconstances, en particulier pour résoudre des problèmes, [...] mais cet outil aussi étre étudié pour lui-même.*

Après un rappel sur la distributivé simple et la double distributivité ainsi que le calcul avec les carrés et les racines carrées, on parlera des très célèbres *identités remarquables*. Elles sont indispensables dans le bagage de l'apprenti mathématicien. On abordera les notions de *développement* et *factorisation*.

Nous allons également *résoudre algébriquement des équations du premier degré et du second degré* dans le cas particulier de *la règle du produit nul*. Nous résolverons également des équations fractionnaires dans le cas particulier de *la règle quotient nul*.

Dans ce chapitre, nous allons également voir le lien qu'il y entre les équations droites et les *systèmes d'équations*. Plus précisement, après la résolution des équations du type $ax + b = k$, on va pouvoir résoudre et interpréter des équations du type :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

a. Stella Baruk, née à Yazd en Iran en 1932, est une chercheuse française en pédagogie des mathématiques, auteur d'ouvrages consacrés à l'enseignement de cette discipline. Elle a consacré de nombreux livres à la pédagogie de cette matière, dont les plus connus sont Échec et maths et L'Âge du capitaine.

Auto-évaluation diagnostique

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) / remarque(s).

1 Pour tout réel x, on a $x(x+2)$.

(a) $2x+2$ (b) x^2+2. (c) x^2+2x.

2 Pour tous réels a, b, c et d, on a $(a+b)(c+d) =$

(a) $a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ (b) $a\times c+b\times d$ (c) $a\times d+b\times c$

3 Soient a et b deux nombres réels. On a alors $(a+b)(a-b) =$

(a) a^2+b^2 (b) a^2-b^2 (c) $a^2\times b^2$

4 Soient a et b deux nombres réels. On a alors $(a+b)^2 =$

(a) $a^2+2ab+b^2$ (b) $a^2-2ab+b^2$ (c) $a^2-2ab-b^2$

5 Soient a et b deux nombres réels. On a alors $(a-b)^2 =$

(a) $a^2+2ab+b^2$ (b) $a^2-2ab+b^2$ (c) $a^2-2ab-b^2$

6 La solution de l'équation $3x+2=0$ est

(a) $x=\frac{2}{3}$ (b) $x=-5$ (c) $x=-\frac{2}{3}$

7 L'ensemble des solutions de l'équation $2x-3=0$ est

(a) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. (b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$. (c) $\mathcal{S}=\{1\}$.

8 Si $A\times B=0$, alors

(a) $A\neq 0$ et $B\neq 0$ (b) $A=0$ et $B=0$ (c) $A=0$ ou $B=0$

9 Si $\frac{A}{B}=0$, alors

(a) $A=0$ et $B\neq 0$ (b) $A=0$ et $B=0$ (c) $A\neq 0$ et $B=0$

10 En multipliant l'inéquation $3<7$ par -1, on obtient

(a) $-3<-7$ (b) $-7<-3$ (c) $\frac{1}{3}<\frac{1}{7}$

Voir solutions p. ??

Cours

1. Calcul littéral

A. Quelques définitions

DÉFINITION : Égalités numériques et littérales

- Les **égalités numériques** dans lesquelles n'entrent que des nombres.
- Les **égalités littérales** dans lesquelles entrent des lettres ; ce sont les **identités** et les **équations**

Exemple

$9 - 16 = -7$ est une égalité numérique.

DÉFINITION : Identité

Une **identité** est une égalité qui est toujours vérifiée, quelles que soient les valeurs numériques données aux lettres.

Exemple

- $a(a+b) = a^2 + ab$
- $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

DÉFINITION : Équation

Une **équation** est une égalité qui n'est vérifiée que par certaines valeurs particulières attribuées à des lettres appelées **inconnues**.

Exemple

Les égalités

$$3x + 12 = 5x - 8$$
$$y^2 + 5 = 35 + y$$

sont des équations ; la première n'est vérifiée que par une seule valeur, $x = 10$; la seconde l'est par deux valeurs, $y = 6$ et $y = -5$.

Remarque : La partie à gauche du signe « $=$ » est le **premier membre de l'équation** et la partie à droite, le **second membre**.

DÉFINITION : Racines ou solutions

Les **racines** ou **solutions** sont les valeurs particulières qui, substituées aux inconnues de l'équation, rendent ses deux membres égaux numériquement ou identiques.

Exemple

Soit a et b deux réels.
L'équation $2x + a = 3x + b$ a pour solution $x = a - b$. En substitiant, on obtient l'identité

$$3a - 2b = 3a - 2b$$

PÉDAGOGIE 1 Dictionnaire décalé des mathématiques

Quant à Élisabeth Busser et Bertrand Hauchecorne[a], dans leur *Dictionnaire décalé des mathématiques*, on trouve ceci à propos du mot *Équation*

a. Elisabeth Busser, agrégée de mathématiques, lauréate du Prix d'Alembert, s'est fait connaître par son action au sein de l'Association des professeurs de mathématiques dont elle fut présidente et par de nombreuses publications concernant l'enseignement des maths mais aussi la culture scientifique et les mathématiques ludiques.

Bertrand Hauchecorne, agrégé de mathématiques, est l'auteur d'ouvrages didactiques comme Contre-exemples en mathématiques mais aussi par de nombreux écrits concernant la culture et l'histoire des sciences et des maths.

Tous deux sont des piliers de la rédaction du magazine Tangente, l'aventure mathématique.

Heuristique

« Depuis l'Antiquité on utilise des équations soit par amusement mais plus souvent pour résoudre un problème concret. Le papyrus de Rhind, du temps de la civilisation égyptienne, en contient déjà, telle celle-ci : "une quantité, son quart lui est ajouté, elle devient 15. Quelle est cette quantité ?"
Plus près de nous, quelques devinettes entre amis se ramènent à des équations comme celle-ci : "Un jeune homme de 21 ans demande son age à un autre. Ce dernier lui répond : "j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez". Mais quel âge a-t-il ?"

Autrefois, seule l'agilité d'esprit et le tâtonnement amenaient au résultat. L'apparition des méthodes algébriques à la Renaissance, en particulier celles impulsées par le mathématicien François Viète, contemporain d'Henri IV, a permis une résolution méthodique. On nomme la valeur à déterminer à l'aide d'un symbole, en général la lettre x, et l'on écrit la relation qu'elle vérifie : c'est ce que l'on nomme une équation.

Sur notre premier exemple, on obtient $x + \frac{x}{4} = 15$ *soit* $\frac{5x}{4} = 15$ *: on obtient* $x = 12$*, c'est la valeur cherchée. Pour le second exemple. la différence d'âge est* $x - 21$ *donc le jeune homme avait à lépoque citée 21 ans moins cette différence d'âge soit* $21 - (x - 21)$*; l'équation à résoudre est donc* $x = 2(21 - (x - 21))$ *soit* $3x = 84$ *et donc* $x = 28$.

Ce type d'équation s'appelle une équation du premier degré. Lorsque l'inconnue x est à une certaine puissance, on parle d'équations polynomiale. [...] *Des équations peuvent contenir plusieurs inconnues, on parle alors de systèmes d'équations.*

Il existe d'autres types d'équations concernant des relations entre une fonction, souvent notée y, et sa dérivée ; on les nomme des équations différentielles. La plus simple d'entre elles s'écrit $y' = y$ *; ses solutions sont les fonctions égales à leur dérivée ; parmi elles, on trouve la fonction exponentielle, omniprésente en mathématiques. Les équations différentielles ont permis de résoudre d'innombrables problèmes en physique et ne cessent, depuis l'extrême fin du XVIIe siècle, d'être un sujet d'étude fructueux.»*

Un peu d'histoire :

Aussi loin que remontent les textes connus en mathématiques, on y trouve des questions que l'on modéliserait aujourd'hui par des équations algébriques. On lit, dans un papyrus de l'Égypte ancienne : « Quand le scribe te dit 10 est les 2/3 et le 1/10 de quoi ? »1, ce qui pourrait se traduire par $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$. Aucun outil algébrique n'est alors développé. Les égyptiens résolvent l'équation du premier degré par tâtonnement et les babyloniens disposent d'algorithmes mais sans justification autre que l'expérience.
Le livre *Arithmetica* de Diophante est le premier à décrire l'ajout d'une lettre à un ensemble de nombres.

Si les babyloniens savaient déjà résoudre des équation du 2ème degré, le symbolisme utilisé a beaucoup évolué au cours des siècles.

Considérons l'équation que nous notons aujourd'hui $2x^2 - 5x = 23$ et admirons l'évolution de l'écriture d'une telle équation au cours du temps.

Diophante, au IIIe siècle	ΔΥβ ↑ ςε εστι Μ̊ κγ
Tartalia (1556) - Pacioli (1494)	Trouve-moi un nombre dont le double du carré diminué de cinq fois lui-même fait vingt-trois
Van der Hoek (début du 16ème siècle)	S_C - 5 P_N dit is ghelije 23
Cardan(1545)	duo quad. m qumque reb. aequalis 23
Rudolf, Stiffel (1577) - Leon d'Anvers (1586)	2 z aequatus 5x+23
Gosselin (1577)	2Q M 5L aequalia 23
Bombelli (1572)	$\overset{2}{\smile}$2 m $\overset{1}{\smile}$5 equale a 23
Viète (1580)	2Q - 5N aequatur 23
Ramus (1586) - Clavius (1608)	2q - 5l aequatus sit 23
Butéo (1559)	2à M 5p = 23
Girard (1629)	2(2) - 5(1) = 23(0)
Viète (1600)	2a_q 5a aeq. 23
Harriot (1631)	2aa 5a = 23
Descartes (vers 1635)	2Aq - 5A égal à 23 OU 2zz - 5z µ 23
Herrigone (1634)	2a_2 5a ᶻ/z 23
XVIIIe siècle	2xx - 5x = 23

B. Distributivité

Remarque : On rappelle les règles de la simple distributivité et de la double distributivité :

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

$$(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemple

- $3x(x+5) = 3x \times (x+5) = 3x \times x + 3x \times 5 = 3x^2 + 15x$
- $$\begin{aligned}(x+3)(x-4) = (x+3) \times (x+(-4)) &= x \times x + x \times (-4) + 3 \times x + 3 \times (-4)\\ &= x^2 - 4x + 3x - 12\\ &= x^2 - x - 12\end{aligned}$$

PÉDAGOGIE 2 **PLIF**

Il existe beaucoup de moyens mnémotechniques pour retenir les règles de la simple distributivité et de la double distributivité. En voici une pour la double distributivité.

Heuristique

Fin

Premier

$$(ax+b)(cx+d) = \overbrace{ax \cdot cx}^{\text{P}} + \overbrace{ax \cdot d}^{\text{L}} + \overbrace{b \cdot cx}^{\text{I}} + \overbrace{b \cdot d}^{\text{F}}$$

Intérieur

Limite

Remarque :

- On parle également de **développement** et de **factorisation**.
- Pour tout nombres k, a et b, on a toujours :

$$k \times (a+b) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} k \times a + k \times b$$

- Pour tout nombres a, b, c et d, on a toujours :

$$(a+b) \times (c+d) \underset{\text{factoriser}}{\overset{\text{développer}}{=}} a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

PÉDAGOGIE 3 Le développement et la factorisation vus par les SMS

Une manière d'illustrer la factorisation est l'envoi de SMS à un groupe de personnes. En effet, dans la vie courante, nous nous servons souvent de la factorisation pour nous « simplifier la vie ».

Heuristique

En voici un exemple concret : inviter des ami·e·s à un anniversaire. Vous voulez envoyer un SMS à vos ami·e·s pour les inviter. Vous avez deux solutions :

Vous écrivez le SMS pour votre Ami·e n°1, vous lui envoyez, puis vous écrivez à nouveau le même SMS pour votre Ami·e n°2 et vous lui envoyez et ainsi de suite, ce qui peut vite devenir fastidieux.

OU

Vous écrivez le SMS une seule fois et vous l'envoyez à vos invité·e·s en une seule fois.

Dans les deux cas, vous obtenez le même résultat mais, avec la deuxième solution, vous avez économisez votre temps et réduisez vos efforts.
De votre coté, vous *factorisez* par le terme « *SMS* ».

$$(\text{SMS pour Ami·e n°1}) + (\text{SMS pour Ami·e n°2}) = \text{SMS pour (Ami·e n°1} + \text{Ami·e n°2)}$$

Du côté du téléphone, c'est lui qui se chargera de *développer* le terme « *SMS* » à vos ami·e·s.

$$\text{SMS pour (Ami·e n°1} + \text{Ami·e n°2)} = \text{SMS pour Ami·e n°1} + \text{SMS pour Ami·e n°2}$$

Un peu d'histoire :

François Viète, est un mathématicien (amateur) français (Fontenay-le-Comte, 1540 - Paris, 23 février 1603).
On lui doit cependant une invention capitale : le calcul littéral qu'il expose dans un bref ouvrage, "*Introduction à l'Art Analytique ou Algèbre Nouvelle*". La nouveauté, c'est que c'est un calcul sur les grandeurs en général désignées par des lettres : voyelles majuscules A, E, I, O, U, Y pour les grandeurs inconnues, consonnes majuscules B, C, D... pour les grandeurs connues. Viète, à travers ses écrits et ses exploits, montre la puissance de son Algèbre nouvelle à laquelle il assigne pour but de résoudre tous les problèmes. Ce calcul littéral, repris et amélioré par Descartes, va permettre un développement fulgurant de toutes les sciences à partir du 17ème siècle.

C. Calcul littéral avec des expressions algébriques

PROPOSITION

Soient a et b deux nombres réels. On a alors :

1. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Remarque : En termes de **développement** et de **factorisation**, on a, pour tous réels a et b :

$$\begin{tikzcd}(a+b)\times(a-b) \arrow[rr, bend left, "\text{développer}"] & = & a^2-b^2 \arrow[ll, bend left, "\text{factoriser}"]\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}(a+b)^2 \arrow[rr, bend left, "\text{développer}"] & = & a^2+2ab+b^2 \arrow[ll, bend left, "\text{factoriser}"]\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}(a-b)^2 \arrow[rr, bend left, "\text{développer}"] & = & a^2-2ab+b^2 \arrow[ll, bend left, "\text{factoriser}"]\end{tikzcd}$$

Exemple

- **Avec l'identité** $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ **:**

On développe :

$(x-3)\times(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

$(3x+5)\times(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$

On factorise :

$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)\times(x+4)$

$25x^2 - 81 = (5x)^2 - 9^2 = (5x-9)\times(5x+9)$

- **Avec l'identité** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **:**

On développe :

$(x+7)^2 = x^2 + 2\times x\times 7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

$(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

On factorise :

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2\times 4\times x + 4^2 = (x+4)^2$

$25x^2 + 90x + 81 = (5x)^2 + 2\times 5x\times 9 + 9^2 = (5x+9)^2$

- **Avec l'identité** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **:**

On développe :

$(x-3)^2 = x^2 - 2\times x\times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

$(2x-3)^2 = (2x)^2 - 2\times 2x\times 3 + 3^2 = 4x^2 - 6x + 9$

On factorise :

$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2\times x\times 6 + 6^2 = (x-6)^2$

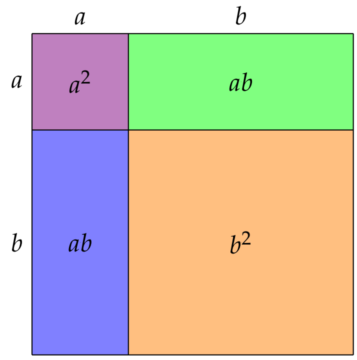
$9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2\times 3x\times 1 + 1^2 = (3x-1)^2$

PÉDAGOGIE 4 **Illustration géométrique pour $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

Il existe de très belles méthodes géométriques qui permettent de démontrer les identités remarquables.
Je ne saurais que trop vous conseiller l'excellent livre *Proofs Without Words (PWWs) III : Further Exercises in Visual Thinking* de Roger B. Nelsen dont la première édition est en ligne gratuitement.

Heuristique

Soient a et b des nombres réels positifs.
La figure ci-contre est un carré de côté $a+b$.
Son aire est donc $(a+b)^2$.
Mais cette aire est aussi la somme :
- des aires a^2 et b^2 des carrés violet et orange,
- des aires des deux rectangles vert et bleu, chacun d'aire ab.



Donc
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + 2ab + b^2$

2. Résolutions d'équations et d'inéquations du premier degré

A. Résolution d'une équation algébrique

PROPOSITION

Pour tous réels a et b tel que $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ admet pour unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

Exemple

- $2x = 5 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.
- $-3x = 12 \Leftrightarrow \dfrac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} = \dfrac{12}{-3} \Leftrightarrow x = \dfrac{12}{-3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{12}{3} = -4$.
- $-x + 1 = 3 \Leftrightarrow -x + 1 - 1 = 3 - 1 \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow -1 \times -x = -1 \times 2 \Leftrightarrow x = -2$.

PROPOSITION

Si un produit est nul alors, l'un au moins des facteurs est nul.

$$\text{Si } A \times B = 0, \text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0$$

PROPOSITION : Équations de la forme $(ax+b)(cx+d) = 0$

Soient 4 réels a, b, c et d. Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d) = 0$ sont les solutions des équations $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-3)(x-5)=0$.
D'après la règle du produit nul, les solutions de l'équation $(2x-3)(x-5)=0$ sont les solutions des équations $2x-3=0$ et $x-5=0$. On résout donc ces deux dernières équations :

$$2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

$$x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=5$$

L'ensemble des solutions de l'équation $(2x-3)(x-5)=0$ est $\mathcal{S}=\left\{\frac{3}{2};5\right\}$.

PROPOSITION

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul ET son dénominateur ne l'est pas.

$$\text{Si } \frac{A}{B}=0, \text{ alors } A=0 \text{ et } B\neq 0$$

PROPOSITION : Équations de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}=0$

Soient 4 réels a, b, c et d. Les solutions de l'équation $\frac{ax+b}{cx+d}=0$ sont les solutions des équations $ax+b=0$.

ATTENTION : Les valeurs qui annulent le dénominateur sont appelées **valeurs interdites** et doivent être éliminées avant tout calcul.

Exemple

Résoudre l'équation $\frac{7x+3}{3x+5}=0$.

- *Calcul des valeurs interdites :*

$$3x+5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{5}{3}$$

- *Calcul des solutions de l'équation :*

  D'après la règle du quotient nul, les solutions de l'équation $\frac{7x+3}{3x+5}=0$ sont les solutions de l'équation $7x+3=0$. On résout donc cette dernière équation :

$$7x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{3}{7}$$

  L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{7x+3}{3x+5}=0$ est $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{7}\right\}$.

B. Résolutions d'inéquations du premier degré

PROPOSITION

Les inégalités présentées au sens strict ($<$ et $>$) sont valables au sens large ($\leq$ et $\geq$).

1) Addition (et soustraction)

a) Additionner un même nombre

Si on additionne un même nombre aux membres d'une inégalité, alors cette inégalité ne change pas de sens. (Si $a < b$, alors $a + c < b + c$)

b) Addition entre deux inégalités de même sens

Si a, b, c et d sont quatre réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$

2) Multiplication (et division par un réel non nul)

a) Multiplier (ou diviser) par un nombre

Si on multiplie (ou on divise) les membres d'une inégalité par un même nombre positif, alors cette inégalité ne change pas de sens. (Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$).
Si on multiplie (ou on divise) les membres d'une inégalité par un même nombre négatif, alors cette inégalité change de sens. (Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$).

b) Multiplier deux inégalités de même sens entre nombres positifs entre elles

Si a, b, c et d sont quatre nombres positifs tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$

PROPOSITION : Inéquations de la forme $ax + b \leq 0$ (avec $a \neq 0$)

Une inéquation du premier degré se ramène toujours à un des cas suivants

$$ax + b < 0 \quad \text{ou} \quad ax + b \leqslant 0$$

- si $a > 0$, l'inéquation équivaut à $x < \frac{-b}{a}$ ou $x \leqslant \frac{-b}{a}$
- si $a < 0$, l'inéquation équivaut à $x > \frac{-b}{a}$ ou $x \geqslant \frac{-b}{a}$

Exemple

Résolvons l'inéquation $-2x + 1 > 3x + 2$.
On a

$$\begin{aligned}
-2x + 1 > 3x + 2 &\Leftrightarrow -2x + 1 - 3x > 3x + 2 - 3x \\
&\Leftrightarrow -5x + 1 > 2 \\
&\Leftrightarrow -5x + 1 - 1 > 2 - 1 \\
&\Leftrightarrow -5x > 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} < \frac{1}{-5} \\
&\Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $-2x + 1 > 3x + 2$ est $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{5}\right[$.

3. Système d'équations

A. Résolution algébrique

DÉFINITION

Résoudre un système d'équations du type

$$\begin{cases} ax + by + c & = 0 \\ a'x + b'y + c' & = 0 \end{cases} \quad (\text{où } a, b, c, a', b', c' \text{ sont des réels})$$

c'est déterminer les valeurs des inconnues pour lesquelles les égalités sont vraies simultanément.

Exemple

Le couple $(x; y) = (3; 5)$ est solution du système d'équations

$$\begin{cases} 3x + y & = 14 \\ 7x - 4y & = 1 \end{cases}$$

car, quand on remplace x par 3 et y par 5, les deux égalités sont vraies :

$$\begin{cases} 3 \times 3 + 5 & = 9 + 5 = 14 \\ 7 \times 3 - 4 \times 5 & = 21 - 20 = 1 \end{cases}$$

En revanche, le couple $(x; y) = (4; 2)$ n'est pas solution du système car, quand on remplace x par 3 et y par 5, l'égalité $3x + y = 14$ est vraie mais l'autre égalité est fausse : $7 \times 4 - 4 \times 2 = 20 \neq 1$

PROPOSITION

On obtient un système équivalent à un système donné, c'est-à-dire qui a les mêmes solutions en :

- remplaçant une équation par une équation équivalente ;
- substituant une expression par une expression qui lui est égale ;
- remplaçant une des équations par la somme ou la différence membre à membre des équations.

Exemple

Le système $\begin{cases} 3x + y & = 14 \\ 7x - 4y & = 1 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} 6x + 2y & = 28 \\ 7x - 4y & = 1 \end{cases}$ car les coefficients de la première équation ont tous été multipliés par 2.

Ces deux systèmes ont donc, si elles existent, les mêmes solutions x et y.

MÉTHODE 1 Combinaisons linéaires *versus* Substitution

On va donner deux méthodes pour résoudre le système d'équations $\begin{cases} 8x+3y &= 5 \\ -2x-y &= 3 \end{cases}$

Méthode par combinaisons linéaires

$$\begin{cases} 8x+3y &= 5 \\ -2x-y &= 3 \end{cases}$$

On choisit une variable à éliminer.

$$\begin{cases} 8x+3y &= 5 \\ (\,-2x-y &= 3\ )\times 3 \end{cases}$$

On multiplie une de des équations par une constante appropriée (et non nulle !) pour que la somme des coefficients fasse zéro.

$$+\begin{cases} 8x+3y &= 5 \\ -6x-3y &= 9 \end{cases}$$
$$2x = 14$$

On additionne les deux équations ensemble pour obtenir une équation avec une seule variable.

$$x = \frac{14}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=7}$$

On résoud l'équation en une variable.

$$\begin{aligned} & -6\times 7-3y &&= 9 \\ \Leftrightarrow\ & -42-3y &&= 9 \\ \Leftrightarrow\ & -3y &&= 51 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x=-17} \end{aligned}$$

On substitue la valeur obtenue dans une des deux équations du système d'origine et on résoud pour trouver l'autre variable.

Méthode par substitution

$$\begin{cases} 8x+3y &= 5 \quad (1) \\ -2x-y &= 3 \quad (2) \end{cases}$$

On choisit une équation et on exprime une variable en fonction de l'autre. Soyez malin dans le choix de l'équation !

$$\begin{aligned} (2) \Rightarrow\ & -y = 3+2x \\ \Rightarrow\ & y = -3-2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad 8x+3(-3-2x) &= 5 \\ \Leftrightarrow 8x-9-6x &= 5 \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= 14 \\ \Leftrightarrow \quad \boxed{x=7} \end{aligned}$$

On substitue l'expression dans l'autre équation (ici dans (1)).
On résoud l'équation en une variable.

$$(2)\ y = -3-2\times 7$$
$$\boxed{y=-17}$$

On substitue la valeur obtenue dans une des deux équations du système d'origine et on résoud pour trouver l'autre variable.

La solution du système est donc le couple $(7;-17)$.

B. Interprétation géométrique

PROPOSITION : Équation cartésienne d'une droite

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x; y)$ d'une droite d vérifient une relation du type suivant

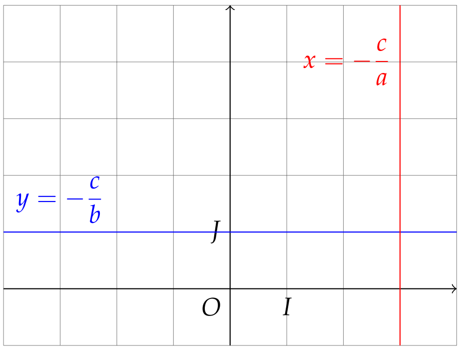
$$ax + by + c = 0$$

où $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c \in \mathbb{R}$.

NOTATION : $(a, b) \neq (0, 0)$ signifie que a et b ne sont pas tous les deux nuls en même temps.

REMARQUE :

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $y = -\frac{c}{b}$ et la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors $x = -\frac{c}{a}$ et la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.



DÉFINITION

La relation $ax + by + c = 0$ s'appelle **équation cartésienne** de la droite d.

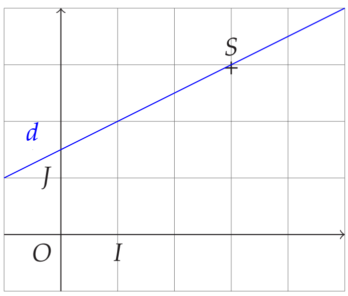
Exemple

Dans le repère ci-contre, une équation de la droite d est

$$-x + 2y - 3 = 0$$

Par ailleurs, le point $S(3; 3)$ appartient à la droite d car en remplaçant ses coordonnées dans le premier membre de l'égalité, on obtient 0. En effet :

$$-x_S + 2y_S - 3 = -3 + 2 \times 3 - 3 = -6 + 6 = 0$$



ATTENTION : C'est important de préciser qu'il s'agit d'**une** équation de droite et non **l'**équation de droite. La nuance peut paraître anecdotique, mais pas du tout.

En effet, dans l'exemple ci-dessus, on a $-x + 2y - 3 = 0$ comme équation de droite. Mais si l'on multiplie cette équation par un réel quelconque, il s'agira de la même droite ! Par exemple, l'équation $-2x + 4y - 6 = 0$ est équivalente à $-x + 2y - 3 = 0$: on a tout simplement multiplié cette dernière par deux. Si vous tracez ces deux équations dans un logiciel de géométrie dynamique (comme Geogebra), vous obtiendrez deux droites confondues.

Par conséquent, pour une même droite, il existe une infinité d'équations cartésiennes.

REMARQUE : Pour la suite de cette partie, on considère deux droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.

PROPOSITION

Lorsque deux droites sont sécantes, les coordonnées $(x; y)$ de leur point d'interserction sont les solutions du système : $\begin{cases} ax + by + c & = 0 \\ a'x + b'y + c' & = 0 \end{cases}$

PROPOSITION

Soient deux droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ où a, b, c, a', b', c' sont des réels.
Les droites d et d' sont sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

NOTATION : $\begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix}$

Exemple

Reprenons le système $\begin{cases} 8x + 3y & = 5 \\ -2x - y & = 3 \end{cases}$. Avant même de le résoudre, nous pouvons déterminer s'il a une solution.
En effet,

$$\begin{vmatrix} -3 & -(-1) \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times (-2) - 8 \times 1 = 6 - 8 = -2 \neq 0$$

Comme le déterminant est différent de zéro, le système admet une unique solution.

Nous avons résolu ce système plus haut, et nous avions trouvé $(-17; 7)$ comme solution.
Le point $M(-17; 7)$ est l'intersection des droites d et d' d'équations respectives $8x + 3y - 5 = 0$ et $-2x - y - 3 = 0$.

Prenons de la hauteur : On vient de faire la rencontre avec la notion de « *déterminant d'un système* ».
Par la suite, on pourra envisager un calcul plus commode pour éviter le problème des signes «-».
Reprenons le système $\begin{cases} 8x+3y & =5 \\ -2x-y & =3 \end{cases}$. Et prenons directement les coefficients a, b, a' et b' que l'on a fait ressortir :

$$\begin{cases} \color{red}{8}x+\color{red}{3}y & =5 \\ \color{red}{-2}x\color{red}{-1}y & =3 \end{cases}$$

En calculant directement le déterminant

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8\times(-1)-(-2)\times 3 = -8+6 = -2$$

On retrouve le même résultat que précédemment. C'est un résultat général sur les déterminants (de système). Par la suite, on pourra appliquer directement ce type de calcul.

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Effectuer des calculs numériques ou littéraux.
- Choisir la forme la plus adaptée (factorisée, développée, réduite) d'une expression dans une résolution de problème.
- Modéliser un problème par une inéquation.
- Résoudre une inéquation du premier degré.
- Sur des cas simples de relations entre variables, exprimer une variable en fonction des autres.
- Tracer une droite connaissant une équation cartésienne ou réduite.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

QCM d'auto-évaluation

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) / remarque(s).

Voici un QCM d'auto-évaluation pour vous tester. Vous avez quelques questions reprenant l'ensemble des notions abordées dans ce cours.

11 $(x+3)^2 =$

(a) x^2+9 (b) x^2+6x+9 (c) x^2+3x+9

12 $(x-7)^2 =$

(a) $x^2-14x+49$ (b) $x^2-14x-49$ (c) $x^2+14x-49$

13 $(3x-4)(3x+4) =$

(a) $3x^2-8x+16$ (b) $3x^2-16$ (c) $9x^2-16$

14 L'ensemble des solutions de l'équation $(2x-3)(x-5)=0$ est

(a) $\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2};5\right\}$. (b) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2};-5\right\}$. (c) $\mathcal{S} = \{-5;5\}$.

15 L'ensemble des solutions de l'équation $\frac{7x+3}{3x+5} = 0$ est

(a) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. (b) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$. (c) $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3};-\frac{3}{7}\right\}$.

16 L'inéquation $3x+5>0$ a pour solution

(a) $x < -\frac{5}{3}$ (b) $x > \frac{5}{3}$ (c) $x > -\frac{5}{3}$

17 Le système d'équation $\mathcal{S}$: $\begin{cases} 3x+2y &= 8 \\ x-5y &= -9 \end{cases}$ a pour solution

(a) $(x;y) = (-1;-2)$ (b) $(x;y) = (2;1)$ (c) $(x;y) = (1;2)$

Calcul littéral

18 Développement I — CORRIGÉ

Développer les expressions suivantes :

1) $(x+6)(2x-4)$
2) $(-2x+4)(3x+1)$
3) $(-3x+6)(x-5)$
4) $(2x+1)(2x-1)$

19 Développement II — CORRIGÉ

Transformer l'expression donnée en une expression qui lui égale pour tout réel x et qui s'écrit sans parenthèses.

1) $3(x-2)+6(4-x)$
2) $6\left(\frac{1}{3}x+1\right)-12x$
3) $\frac{3}{4}\left(-12x+\frac{16}{5}\right)$
4) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)-3(x+1)$

20 Factorisation

Factoriser les expressions suivantes :

1) x^2+3x
2) $4x^2-5x$
3) $xy+4x$
4) $3x^2-6x$

21 Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(3x+7)^2-(x-1)^2=8x^2+44x+48$$

22 Identités remarquables à trous

Recopier et compléter :

1) $(x-...)^2=x^2-...+25$
2) $(2x-...)^2=4x^2-6x+...$
3) $(3x-...)^2=9x^2-...+1$

Résolution d'équations

23 Équations du premier degré — CORRIGÉ

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $2x=5$
2) $x-6=2$
3) $5x=1$
4) $-3x=12$
5) $-x=7$
6) $-x+1=3$

24 Équations quotient

Résoudre les équations suivantes après avoir éliminé la (les) valeur(s) interdite(s) :

1) $\dfrac{2x+8}{5-2x}=0$
2) $\dfrac{3x+1}{1-7x}=0$
3) $\dfrac{-6x+5)(3x-1)}{(7+3x)(6x-2)}=0$

25 Identités remarquables à trous

Recopier et compléter :

1) $(x-...)^2=x^2-...+25$
2) $(2x-...)^2=4x^2-6x+...$
3) $(3x-...)^2=9x^2-...+1$

Résolution d'inéquations

26 Inéquations du premier degré

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2x+5<7$
2) $-3x+2<8$
3) $3x+5\geq -2x+1$

27 Identités remarquables à trous

Recopier et compléter :

1) $(x-...)^2=x^2-...+25$
2) $(2x-...)^2=4x^2-6x+...$
3) $(3x-...)^2=9x^2-...+1$

Système d'équations

28

1) Le système $\begin{cases} -2x+2y &= -6 \\ x+2y &= 6 \end{cases}$ a-t-il une solution ? Si oui, la calculer.

2) a) Même question pour le système $\begin{cases} 3x+9y &= 20 \\ -2x-6y &= -7 \end{cases}$.

b) Que peut-on en déduire graphiquement ?

3) a) Même question pour le système $\begin{cases} 3x+9y &= 20 \\ -2x-6y &= -\dfrac{40}{3} \end{cases}$

b) Que peut-on en déduire graphiquement ?

29 Un petit café ? — CORRIGÉ

Un torréfacteur met en vente deux sortes de mélange de café.

Le mélange A est composé de 60% d'arabica et de 40%

de robusta et est vendu $17,28$ euros le kilogramme.
Le mélange B est composé de 40% d'arabica et de 60% de robusta et est vendu $15,92$ euros le kilogramme.
On note x le prix du kilogramme d'arabica et y le prix du kilogramme de robusta.

Ecrire un système vérifié par x et y et montrer que le système obtenu est équivalent au système

$$\begin{cases} 3x+2y & = 86,4 \\ 2x+3y & = 79,6 \end{cases}.$$

Le résoudre.

30 Les coefficients d'un examen CORRIGÉ

Un examen comporte deux épreuves, l'une écrite coefficient x et l'autre orale, coefficient y. La somme des deux coefficients est égale à 10.
Louis, qui a eu 13 à l'écrit et 7 à l'oral a obtenu une moyenne de $9,4$.

1) Montrer que $(x;y)$ est solution du système

$$\begin{cases} x+y & = 10 \\ 1,3x+0,7y & = 9,4 \end{cases}.$$

2) Résoudre ce système.

31 Les dimensions d'un rectangle

Si on augmente la longueur d'un rectangle de 7cm et si on diminue sa largeur de 5cm, son aire reste inchangée.
Si on augmente la longueur de 20cm et si on diminue sa largeur de 13cm, l'aire augmente de 20cm².
Déterminer les dimensions du rectangle.

32 $\pi = \frac{22}{7}$? CORRIGÉ

Les droites d'équations $y = \pi x + 1$ et $y = \frac{22}{7}x - 1$ sont-elles sécantes ? Qu'en déduit-on sur π et $\frac{22}{7}$?

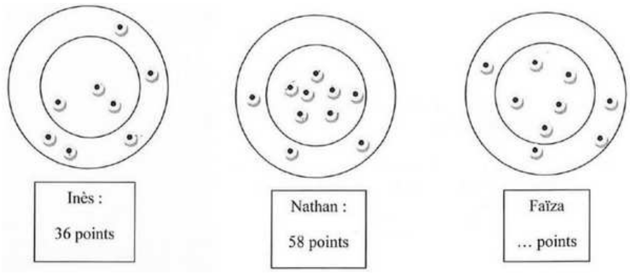
Vu au CRPE

33 Créteil - CRPE 2016

CRPE CORRIGÉ

Trois enfants jouent aux fléchettes.
Les fléchettes situées dans une même zone rapportent le même nombre de points.
Inès et Nathan ont obtenu les scores ci-dessous.

Quel est le score de Faïza ?



34 Groupement 3 - CRPE 2019

CRPE

1) Pour tout nombre entier n, montrer que $30n + 25$ est divisible par 5 .

2) Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier
- Multiplier par 3
- Ajouter 5
- Élever au carré
- Soustraire 9 fois le carré du nombre de départ

a) Montrer que ce programme a pour résultat 265 si le nombre entier choisi est 8. Les calculs seront détaillés.

b) Quel résultat obtient-on si le nombre entier choisi est (-56) ?

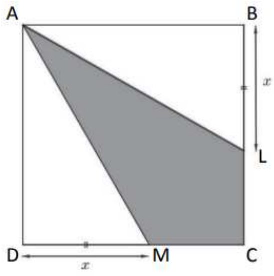
c) Montrer que le résultat de ce programme de calculs, quel que soit le nombre de départ, est divisible par 5.

35 Groupement 4 - CRPE 2021

CRPE

Partie A :

On souhaite partager un carré $ABCD$ de 10 cm de côté en trois parties comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



L est un point du segment [BC] et M est le point du segment [CD] tel que DM $=$ BL. On note x la longueur, en centimètre, du segment [BL].

1) Expliquer pourquoi $0 \leq x \leq 10$.

2) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du quadrilatère grisé $AMCL$ est égale à 80 cm^2.

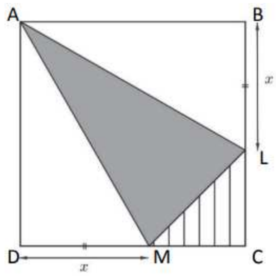
3) Calculer l'aire du quadrilatère grisé AMCL si $x = \frac{3}{5}$.

4) Montrer que l'aire du quadrilatère grisé AMCL, exprimée en centimètre carré, en fonction de x, est égale à $100 - 10x$.

5) Déterminer x pour que les trois parties aient la même aire.

Partie B :

Dans cette partie, le triangle hachuré a été supprimé pour obtenir trois triangles ADM, AML et ALB.



1) a) Vérifier que si $x = 2$, alors l'aire du triangle hachuré MCL est égale à 32 cm^2.

b) Exprimer l'aire, en centimètre carré, de la partie hachurée MCL en fonction de x.

c) Montrer que l'aire du triangle grisé AML, exprimée en centimètre carré, est égale à $50 - \frac{x^2}{2}$