

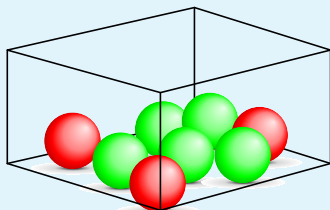
Probabilités

« C'est pas moi qui explique mal, c'est les autres qui sont cons. »

Perceval, Kaamelott, 2005

Introduction

D'après les récentes études en neurosciences, les probabilités sont intrinsèques à l'Homme. Une expérience a été réalisée auprès d'enfants de quelques mois. On leur montre une urne avec 10 boules dont 7 sont vertes et 3 sont rouges. Puis on met un cache devant l'urne.



Quand on tire une boule verte, l'activité cérébrale de l'enfant est normale tandis qu'en on tirant une boule rouge, l'activité cérébrale enregistre un pic : il est surpris.

Pourquoi ? Tout simplement parce qu'il est *moins probable* d'obtenir une boule verte.

Nous sommes donc des *êtres probabilistes* par nature. Encore faut-il que l'on sache de quoi l'on parle et que l'on manipule les outils concernant les probabilités de manière rigoureuse.

À l'origine, dans les traductions d'Aristote, le mot « probabilité » ne désigne pas une quantification du caractère aléatoire d'un fait, mais la perception qu'une idée est communément admise par tous. Ce n'est qu'au cours du Moyen Âge, puis de la Renaissance, autour des commentaires successifs et des imprécisions de traduction de l'œuvre d'Aristote, que ce terme connaîtra un glissement sémantique pour finir par désigner la vraisemblance d'une idée.

L'apparition de la notion de « risque », préalable à l'étude des probabilités, n'est apparue qu'au xii^e siècle, pour l'évaluation de contrats commerciaux avec le Traité des contrats de Pierre de Jean Olivi, et s'est développée au xvi^e siècle, avec la généralisation des contrats d'assurance maritime.

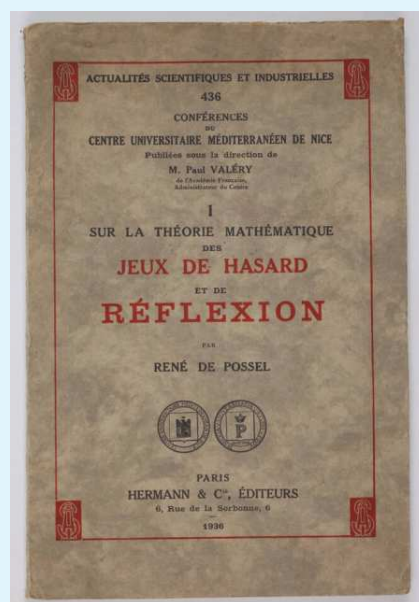
C'est dans la deuxième moitié du XVII^e siècle, à la suite des travaux de Blaise Pascal, Pierre de Fermat et Christian Huygens sur le problème des partis, que le terme « probabilité » prend peu à peu son sens actuel, avec les développements du traitement mathématique du sujet par Jakob Bernoulli.

Au XVIII^e siècle, Gabriel Cramer donne un cours sur la logique probabiliste qui deviendra une base à l'article probabilité de

l'encyclopédie de Diderot, écrite à la fin de ce même siècle. Ce n'est alors qu'au XIX^e siècle qu'apparaît ce qui peut être considéré comme la théorie moderne des probabilités en mathématiques.

Le calcul des probabilités prend un nouvel essor au début du XX^e siècle, avec Andreï Kolmogorov ; commence alors la théorie des probabilités. Les probabilités deviennent une science et une théorie, comme branche des mathématiques.

La théorie des probabilités est l'étude des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. Elle forme avec la statistique les deux sciences du hasard qui sont partie intégrante des mathématiques. Les débuts de l'étude des probabilités correspondent aux premières observations du hasard dans les jeux ou dans les phénomènes climatiques par exemple.



Dans ce chapitre, nous allons revenir sur la définition de *probabilité* mais également de notions importantes comme *expérience aléatoire*, *issue*, *événement*, etc. Nous définirons la très importante *loi de probabilité*

Puis, dans un deuxième temps, nous verrons qu'il est possible de réaliser des *opérations sur les événements* grâce à la notion d'*union* et d'*intersection*. Cela nous permettra également de revenir sur les *arbres de probabilité*.



Auto-évaluation diagnostique

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) / remarque(s).



1 Il y a 23 jetons noirs dans un lot de 58 jetons.

Pour calculer la fréquence des jetons noirs on effectue

a $58 - 23$

b $\frac{58}{23}$

c $\frac{23}{58}$

2 L'effectif du lycée est de 720 élèves.

40 % d'entre eux pratiquent régulièrement un sport ce qui représente

a 320 élèves

b 400 élèves

c 288 élèves

3 La fréquence des filles dans une classe du domaine tertiaire est de $\frac{3}{5}$.

Une autre écriture de cette fréquence est

a 3,5 %

b 60 %

c 6 %

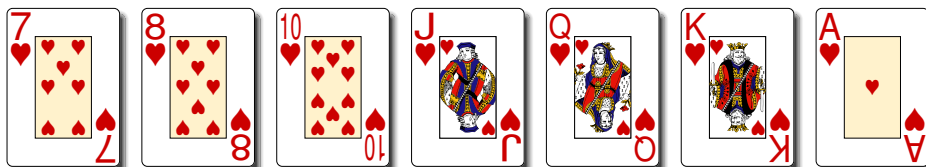
4 Si je lance deux fois d'affilée une pièce de monnaie non truquée, la probabilité d'obtenir deux fois « Pile » est de

a 0,25

b 0,5

c 1

Pour les questions **5** à **8**, on considère un jeu de 32 cartes réparties en quatre catégories, dont en voici une :



5 La probabilité de tirer une carte de couleur rouge est :

a 0,75

b 0,5

c 0,25

6 La probabilité de tirer un cœur est :

a 0,75

b 0,5

c 0,25

7 La probabilité de tirer un roi est :

a 0,0625

b 0,125

c 0,25

8 La probabilité de tirer un 9 noir est :

a 0,0625

b 0,125

c 0,25

➡➡➡ Voir solutions p. 20

1. Modélisation d'une expérience aléatoire

A. Définitions

■ DÉFINITION

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.
- Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.
- L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles. On le note Ω

REMARQUE :

- *Hasard* vient de l'arabe *az-zahr* qui signifie « jet de dé ».
- *Aléa* vient du latin *alea* qui signifie « coup de dé ».
- *Chance* vient du latin *cadere* qui signifie « choir, tomber ».

Exemple

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le nombre obtenu.

Cette expérience a 6 issues possibles et l'univers associé est

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

■ MÉTHODE

- Pour chaque expérience, on s'intéresse à ce qui est étudié (valeur, couleur, etc.).
- Pour chaque expérience, on liste les différentes issues possibles sans en oublier et sans les répéter!

B. Loi de probabilité d'une expérience aléatoire

■ DÉFINITION

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience dont l'univers est $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues un nombre p_i positif ou nul, appelé **probabilité**, tel que $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

REMARQUE : Lorsque chaque issue a la même probabilité de se produire qu'une autre, on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

Exemple

On lance un dé tétraédrique dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.

Si le dé n'est pas truqué, on est dans une situation d'équiprobabilité. On obtient donc la loi de probabilité suivante

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{4}$$



On peut également regrouper les résultats sous forme d'un tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4
	↓	↓	↓	↓
x_i	{1}	{2}	{3}	{4}
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	↑	↑	↑	↑
	p_1	p_2	p_3	p_4

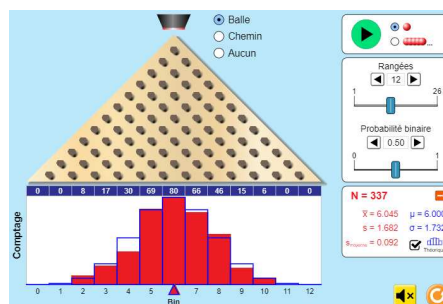
■ MÉTHODE

- Pour chaque expérience, on s'intéresse à ce qui est étudié (valeur, couleur, etc.).
- Pour chaque expérience, on liste les différentes issues possibles sans en oublier et sans les répéter!
- On attribue une probabilité à chaque issue.
- Il est préférable de synthétiser le tout dans un tableau.

■ PROPOSITION

En répétant un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de chaque issue se stabilise autour d'une valeur. Il est donc raisonnable de prendre cette valeur comme probabilité de l'issue.

PRENONS DE LA HAUTEUR : Cette propriété est une conséquence de la loi des grands nombres. Sur le site internet du *PhET Interactive Simulations* (<https://phet.colorado.edu/fr/>), on peut trouver une simulation du jeu du Plinko qui permet d'illustrer cette proposition.



UN PEU D'HISTOIRE :

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654, Bâle -1705, Bâle) est un mathématicien et physicien suisse. La famille Bernoulli s'est illustrée dans les mathématiques et la physique.

Bernoulli est à l'origine de la loi des grands nombres qu'il publie dans *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* en 1689.

Remarque 1 : Il s'agit d'une peinture de Jacques Bernoulli faite par son frère Nicolas.

Remarque 2 : Le nom de famille est parfois mal orthographié sous la forme *Bernouilli*.



2. Probabilité d'un événement

DÉFINITION

- Un **événement** A est un sous-ensemble de Ω (ensemble des issues).
- Sa **probabilité** $p(A)$ est la somme des probabilités des issues favorables à A .
- Si $p(A) = 0$, l'événement A est dit **impossible**.
- Si $p(A) = 1$, l'événement A est dit **certain**.

REMARQUE : Si A est un sous-ensemble de Ω , on le note $A \subset \Omega$.

PROPOSITION

- $p(\emptyset) = 0$,
- $p(\Omega) = 1$ et,
- pour tout événement A , on a $0 \leq p(A) \leq 1$.

PREUVE

- $\emptyset$ est un événement impossible : il ne contient aucune issue, donc $p(\emptyset) = 0$.
- Au contraire, Ω est un événement certain : il contient toutes les issues, donc $p(\Omega) = 1$.
- Par définition, $p(A) \geq 0$. De plus, A ne contient qu'une partie des issues de Ω donc

$$p(A) \leq p(\Omega) = 1$$

PROPOSITION

Dans une **situation d'équiprobabilité**, la probabilité d'un événement A est

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}$$

Exemple

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes et on note la carte obtenue.

Calculer les probabilités des événements :

1. A : « La carte est un valet. »

2. B : « La carte est un pique. »

Solutions :

Les 32 issues étant équiprobables (tirage au hasard), on a :

$$1. p(A) = \frac{\text{nombre de valets}}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

$$2. p(B) = \frac{\text{nombre de piques}}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

MÉTHODE

- Repérer si l'on est bien dans une situation d'équiprobabilité!
- Chercher les issues qui réalisent chacun des événements.
- Compter le nombre d'issues qui réalisent chacun des événements.
- Calculer la ou les probabilités grâce à la formule.

ATTENTION : Une probabilité s'écrit toujours sous la forme d'une fraction ou d'un nombre décimal.

On évitera donc d'écrire « *Une chance sur 4* » ou encore « *35% de chance que ...* ». Par exemple, en s'intéressant au lancer d'une pièce et en notant F l'événement « *Obtenir face* », on aura

~~On a une chance sur deux d'avoir face~~ $\Rightarrow$ La probabilité d'obtenir F est de $\frac{1}{2}$

3. Opérations sur les événements**A. Intersection et réunion d'événements****DÉFINITION**

Si A et B sont deux événements d'un univers Ω ,

- $A \cap B$, **intersection** de A et B , est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **et** B .
- $A \cup B$, **réunion** de A et B , est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A **ou** B (au moins l'un des deux).
- Les événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

REMARQUE : Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cap B) = 0$.

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 »

$$A = \{5; 6\}$$

B « Obtenir un résultat pair »

$$B = \{2; 4; 6\}$$

$A \text{ ET } B$ « Obtenir un résultat pair ET strictement supérieur à 4 »

$$A \cap B = \{6\}$$

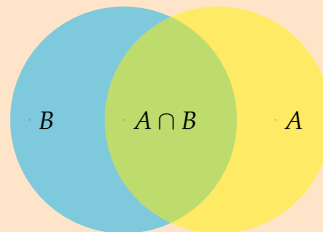
$A \text{ OU } B$ « Obtenir un résultat pair OU strictement supérieur à 4 »

$$A \cup B = \{2; 4; 5; 6\}$$

■ PROPOSITION : Formule du crible de Poincaré

Soit A et B deux événements. On a

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$$

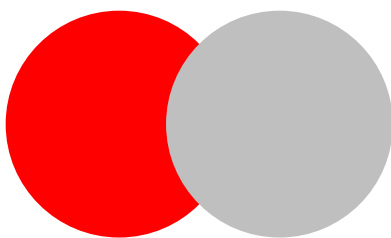


REMARQUE : Cette formule est surtout utilisée pour calculer la réunion de deux événements.

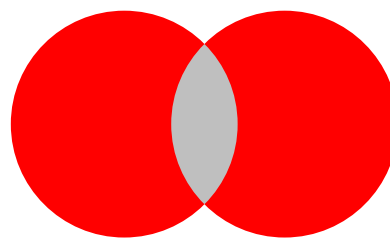
PRENONS DE LA HAUTEUR : Il existe encore deux notations utiles en probabilité :

- $A \setminus B$ qui signifie « A privé de B » ou « le complémentaire de B dans A » et ;
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

On comprend un peu mieux avec une illustration (l'ensemble illustré est en rouge!) :



$A \setminus B$



$A \Delta B$

UN PEU D'HISTOIRE :

La figure ci-dessus porte le nom de « *diagramme de Venn* ». Les diagrammes de Venn utilisent des cercles ou d'autres formes entrecroisées pour illustrer les relations logiques entre deux ensembles d'éléments ou plus. Souvent, ils jouent le rôle d'outil d'organisation visuelle en montrant les similitudes et différences de divers éléments. Les diagrammes de Venn, appelés aussi diagrammes d'ensembles ou diagrammes logiques, sont couramment utilisés dans les domaines des mathématiques, des statistiques, de la logique, de l'enseignement, de la linguistique, de l'informatique et des affaires.



John Venn (1834, Kingston-upon-Hull - 1923, Cambridge) est un mathématicien et logicien britannique.

Exemple

On a demandé à 180 adolescents quel était leur genre de film préféré et on a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous :

	Filles	Garçons	Total
Comédie	75	25	100
Action	45	35	80
Total	120	60	180

On choisit au hasard un adolescent participant à cette étude et on considère les événements :

- A « L'adolescent choisi préfère les films d'action », et
- F « L'adolescent choisi est une fille ».

Calculer $p(A \cup F)$.

Solution :

On souhaite donc utiliser la formule

$$p(A \cup F) + p(A \cap F) = p(A) + p(F)$$

Pour cela, il faut donc déterminer $p(A)$, $p(F)$ et $p(A \cap F)$. Allons-y!

- Détermination de $p(A)$:

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'adolescents préférant les films d'action}}{180} = \frac{80}{180} = \frac{4}{9}$$

- Détermination de $p(F)$:

$$p(F) = \frac{\text{nombre de filles}}{180} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3}$$

- Détermination de $p(A \cap F)$:

$$p(A \cap F) = \frac{\text{nombre de filles préférant les films d'action}}{180} = \frac{45}{180} = \frac{1}{4}$$

- Calcul de $p(A \cup F)$:

$$p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = \frac{80}{180} + \frac{120}{180} - \frac{45}{180} = \frac{155}{180} = \frac{31}{36}$$

■ MÉTHODE

- Bien identifier les différents événements.
- Déterminer les probabilités grâce aux formules.

REMARQUE : Dans cet exercice, il faut noter que les informations ont été mises sous la forme d'un tableau. Ce qui n'est pas toujours le cas...

Certains énoncés mathématiques contiennent plusieurs données à analyser et il est difficile d'avoir une vision d'ensemble de toutes ces informations éparpillées dans l'énoncé.

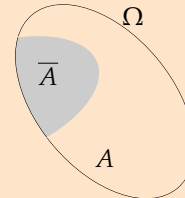
Un tableau à double entrée permet d'organiser des données en fonction de deux paramètres.

B. Événement contraire

■ DÉFINITION

L'**événement contraire** (ou **événement complémentaire**) de A , noté $\bar{A}$, est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A .
Autrement dit, on a

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$



REMARQUE : A et $\bar{A}$ sont incompatibles.

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $A = \{5; 6\}$

$\bar{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4\}$

■ PROPOSITION

Pour tout événement A , on a

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

PREUVE Par définition, on a

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \bar{A} = \Omega$$

Donc, d'après la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$, en remplaçant B par $\bar{A}$, on a

$$\begin{aligned} p(\underbrace{A \cup \bar{A}}_{\Omega}) + p(\underbrace{A \cap \bar{A}}_{\emptyset}) &= p(A) + p(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow \underbrace{p(\Omega)}_{=1} + \underbrace{p(\emptyset)}_{=0} &= p(A) + p(\bar{A}) \\ \Leftrightarrow p(A) + p(\bar{A}) &= 1 \end{aligned}$$

Exemple

On lance un dé cubique :

A « Obtenir un résultat strictement supérieur à 4 » $A = \{5; 6\}$

$\bar{A}$ « Ne pas obtenir résultat strictement supérieur à 4 » $\bar{A} = \{1; 2; 3; 4\}$

On a donc $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. D'après la formule, on a donc

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

■ MÉTHODE

- Bien repérer l'événement à étudier.
- Déterminer son événement contraire.
- Calculer sa probabilité grâce à la formule.



C. Expérience à 2 ou 3 événements successifs

■ DÉFINITION : Arbre de probabilité pondéré

Un **arbre de probabilité** est un arbre permettant de modéliser une expérience aléatoire et de déterminer la probabilité de certains événements complexes.

REMARQUE : Ces arbres sont abondamment utilisés en théorie de la décision.

■ PROPOSITION

- La somme des probabilités des branches issues d'un même sommet donne 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.

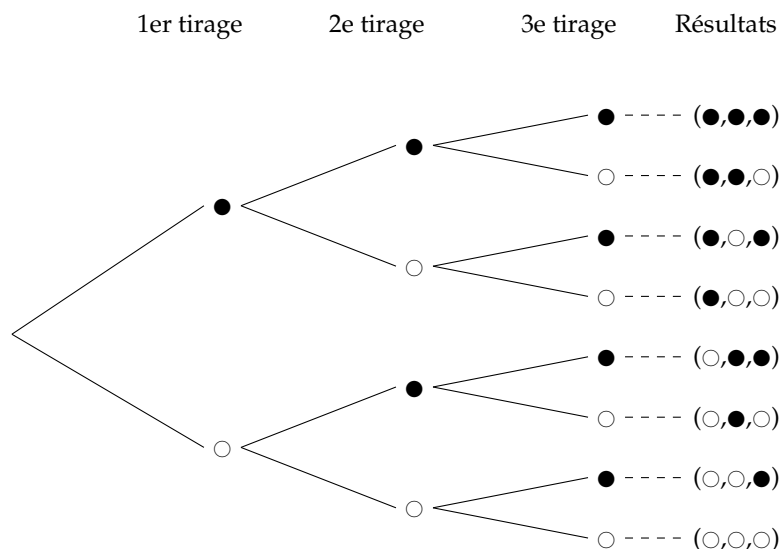
PÉDAGOGIE 1 Les arbres de probabilité

L'arbre de probabilité pondéré est particulièrement bien adapté aux situations correspondant à l'enchaînement de deux ou plusieurs expériences aléatoires, la probabilité des issues de la seconde expérience dépendant du résultat de la première.

Heuristique

Imaginons que vous ayez des jetons blancs et noirs et que vous réalisiez 3 tirages. Vous décidez de noter ce que vous obtenez à la fin.

Voici comment cette situation peut être modéliser par un arbre de probabilité (sans les valeurs de probabilités pour le moment...).



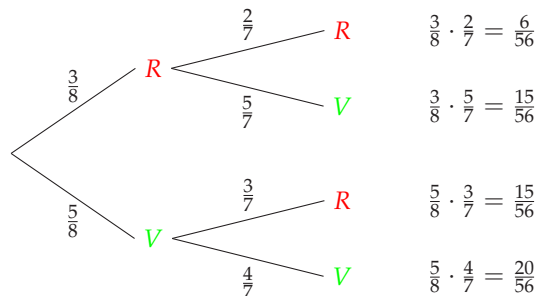
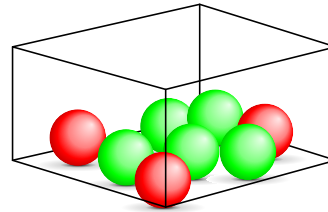
On remarque bien la force des arbres de probabilités : il permettent, en un coup d'oeil, de voir l'ensemble des issues possibles et les « chemins » pour les obtenir.

On pourrait, par ailleurs, décider que l'ordre des tirages ait de l'importance, mais dans le cadre des calculs de probabilités, cela n'a pas vraiment d'importance.

Exemple

Dans une urne, il y a 8 boules dont 3 sont rouges et 5 sont vertes. On tire successivement sans remise deux boules et on note leur couleur.

L'expérience peut se schématiser par l'arbre suivant :



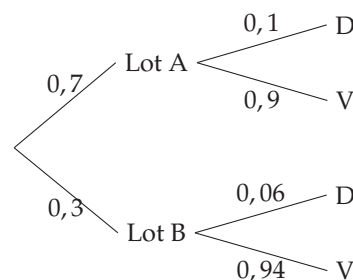
On aurait pu schématiser l'expérience par le tableau suivant (mais cela est moins intuitif...) :

1 ^{er} tirage \ 2 ^e tirage	R	V
R	$p(\{(R; R)\}) = \frac{6}{56}$	$p(\{(R; V)\}) = \frac{15}{56}$
V	$p(\{(V; R)\}) = \frac{15}{56}$	$p(\{(V; V)\}) = \frac{20}{56}$

Exemple

On dispose de lampes issues de deux lots, le lot A et le lot B. 70% des lampes sont issues du lot A, et 30% du lot B. On sait de plus que la probabilité qu'une lampe issue du lot A soit valide est de 0,9, alors que la probabilité qu'une lampe issue du lot B soit valide est de 0,94. Si on prend une lampe au hasard, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

- La probabilité d'être dans le lot A et d'être défectueux, on trouve $0,7 \times 0,1 = 0,07$.
- La probabilité d'être dans le lot B et d'être défectueux vaut $0,3 \times 0,06 = 0,018$.
- Finalement, la probabilité d'être défectueux est $0,07 + 0,018 = 0,088$.



MÉTHODE

- Bien repérer les événements successifs.
- Bien repérer si l'on est dans une situation de "remise" ou "sans remise".
- Déterminer toutes les probabilités et les reporter sur l'arbre ou le tableau.
- Calculer les probabilités au "bout" de l'arbre.



À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- ▶ Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce supposée équilibrée, tirage au sort avec équiprobabilité) où les probabilités sont définies a priori.
- ▶ Définir un modèle de probabilité pour une expérience aléatoire.
- ▶ Calculer des probabilités dans des cas simples (expériences aléatoires à deux ou trois épreuves).
- ▶ Calculer la probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements.
- ▶ Calculer la probabilité d'un événement contraire.



QCM d'auto-évaluation

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) /
remarque(s).



Voici un QCM d'auto-évaluation pour vous tester. Vous avez quelques questions reprenant l'ensemble des notions abordées dans ce cours.

9 On tire au hasard, successivement et sans remise, 2 cartes parmi 32. Le nombre d'issues est :

- (a) 63 (b) 64 (c) 992

10 On observe la trotteuse d'une horloge à aiguilles qui affiche les chiffres de 1 à 12. La probabilité qu'elle soit à un instant donné sur un chiffre est de :

- (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{60}$

11 Un concessionnaire propose deux options sur les voitures qu'il vend : la peinture métallisée (M) et l'autoradio Bluetooth (B). On choisit une voiture au hasard. L'événement peut s'énoncer : « La voiture a

- (a) l'option M ou l'option B » (b) au moins une option » (c) les deux options »

12 Un élève répond au hasard à 5 questions d'un QCU dont chaque proposition a trois réponses. On appelle B l'événement « L'élève a 5 réponses justes ». Alors $p(B) =$

- (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{1}{15}$ (c) $\frac{1}{243}$

Pour les questions **13** et **14**, on considère le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Voyage	75	25	100
Lecture	45	35	80
Total	120	60	180

13 On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ou un(e) lecteur(trice) ?

- (a) $\frac{105}{180}$ (b) $\frac{140}{180}$ (c) $\frac{60}{80}$

14 On choisit un garçon au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit un voyageur ?

- (a) $\frac{25}{100}$ (b) $\frac{25}{60}$ (c) $\frac{60}{100}$



Probabilité d'un événement

15 Le tiroir

CORRIGÉ

Dans un tiroir de la commode il y a 21 t-shirts. 2 sont rouges, 5 sont verts, 6 sont bleus, 3 sont noirs et 5 sont blancs.

Kamel choisit au hasard l'un d'entre eux.

- 1) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts blancs ?
- 2) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts bleus ?
- 3) Quelle est la probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des t-shirts noirs ?
- 4) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts blancs ou bleus ?

16 Les bonbons

CORRIGÉ

Dans un paquet de bonbons il y a 21 nounours. 3 sont rouges, 4 sont verts, 6 sont bleus, 6 sont noirs et 2 sont jaunes.

Elsa choisit au hasard l'un d'entre eux.

- 1) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours jaunes ?
- 2) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours verts ?
- 3) Quelle est la probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des nounours bleus ?
- 4) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours jaunes ou verts ?

17 Le frigo

CORRIGÉ

Dans le frigo il y a 18 desserts lactés. 4 sont au chocolat, 2 sont à la vanille, 4 sont au café, 5 sont à la pistache et 3 sont au caramel.

José choisit au hasard l'un d'entre eux.

- 1) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la vanille ?
- 2) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la pistache ?

- 3) Quelle est la probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des desserts lactés au café ?
- 4) Quelle est la probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la vanille ou à la pistache ? Ma-non choisit au hasard l'un d'entre eux.

18 Don du sang

CORRIGÉ

Le tableau suivant donne la répartition des groupes sanguins dans la population française.

Une personne « au hasard », Monsieur V, se présente pour donner son sang.

Groupe	A ⁺	A ⁻	B ⁺	B ⁻
%	39	6	7	2
Groupe	AB ⁺	AB ⁻	O ⁺	O ⁻
%	2	1	37	6

- 1) Quelle est la probabilité que Monsieur V appartienne au groupe O⁻ (donneur universel) ?
- 2) Un patient du groupe A⁻ ne peut recevoir du sang que des groupes O⁻ et A⁻. Quelle est la probabilité qu'il puisse recevoir du sang de Monsieur V ?
- 3) Un patient du groupe B⁺ ne peut recevoir du sang que des groupes O⁻, O⁺, B⁻ et B⁺. A-t-il plus d'une chance sur deux de pouvoir recevoir du sang de Monsieur V ?

19 Le bon ensemble

CORRIGÉ

Léa-Annushka organise une tombola comportant 50 billets, dont 12 sont gagnants. Parmi les billets gagnants, un seul fait gagner le « gros lot ».

Léo-Zeeshan achète un billet de tombola.

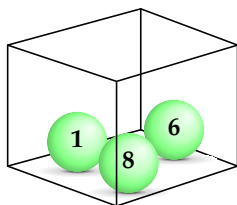
- 1) Quelle est la probabilité que Léo-Zeeshan :
 - a) ne gagne rien ?
 - b) gagne un lot ?
 - c) gagne le gros lot ?
- 2) Quelle est la somme de ces probabilités ? Faut-il s'en étonner ?



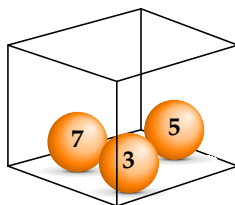
20 Qui l'emporte sur qui ?

CORRIGÉ

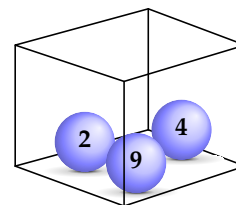
Aziz-Henri, Bill-Abhishek, et Clara-Heidi disposent chacun d'une urne comprenant trois boules numérotées.



Aziz-Henri



Bill-Abhishek



Clara-Heidi

Les joueurs se rencontrent deux par deux : chacun tire au hasard une boule de son urne. Le gagnant est celui qui a obtenu le numéro le plus grand.

1) Aziz-Henri VS Bill-Abhishek

On a croisé dans un tableau les issues possibles du tirage de Aziz-Henri et du tirage de Bill-Abhishek.

On a obtenu 9 couples équiprobables, auxquels on a associé un gagnant.

Quelle est la probabilité que Aziz-Henri l'emporte sur Bill-Abhishek ?

A-H \ B-A	3	5	7
	B-A	B-A	B-A
1	(1, 3) B-A	(1, 5) B-A	(1, 7) B-A
6	(6, 3) A-H	(6, 5) A-H	(6, 7) B-A
8	(8, 3) A-H	(8, 5) A-H	(8, 7) A-H

2) Bill-Abhishek VS Clara-Heidi

L'étude des chances de gain Bill-Abhishek et de Clara-Heidi lorsqu'ils se rencontrent

On a obtenu 9 couples équiprobables, auxquels on a associé un gagnant.

Quelle est la probabilité que Bill-Abhishek l'emporte sur Clara-Heidi ?

B-A \ C-H	2	4	9
	C-H	C-H	C-H
3	(3, 2) B-A	(3, 4) C-H	(3, 9) C-H
5	(5, 2) B-A	(5, 4) B-A	(5, 9) C-H
7	(7, 2) B-A	(7, 4) B-A	(7, 9) C-H

3) Aziz-Henri VS Clara-Heidi

a) A partir des résultats précédents, que pensez-vous des chances de gagner respectives de Aziz-Henri et de Clara-Heidi lors d'une rencontre ?

b) Construire un tableau, semblable aux précédents, illustrant une rencontre « Aziz-Henri VS Clara-Heidi ».

Qu'obtenez-vous comme probabilité de victoire de Aziz-Henri sur Clara-Heidi ? En quoi, la situation révèle-t-elle ici un paradoxe ? Avez-vous une explication ?

Opération sur les événements

21 Home run !

Lors d'un match de baseball, l'équipe qui reçoit un adversaire a une probabilité de 0,59 de gagner son match et 0,27 de faire un match nul.

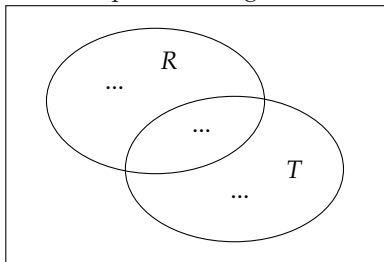
- 1) Quelle est la probabilité, pour cette équipe, de ne pas perdre le match ?
- 2) Quelle est la probabilité, pour cette équipe, de perdre le match ?

22 Tirons les cartes

On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. On considère les événements :

- R : « la carte tirée est rouge » ;
- K : « la carte tirée est un roi » ;
- T : « la carte tirée est un trèfle ».

- 1) Déterminer $p(R)$, $p(K)$ et $p(T)$.
- 2) Reproduire et compléter le diagramme ci-dessous :



- 3) Définir par une phrase les événements et donner leur probabilité.
 - a) $R \cap K$
 - b) $R \cap T$
 - c) $R \cup T$.
- 4) Définir par une phrase les événements et donner leur probabilité.
 - a) $\bar{R}$
 - b) $\bar{T} \cap R$.

23 Gauchers et yeux bleus

CORRIGÉ

En France, il y a 16% de gauchers, 30% de personnes qui ont les yeux bleus et 3% de gauchers aux yeux bleus.

Quelle est la probabilité qu'un individu pris au hasard ne soit pas gaucher et n'ait pas les yeux bleus ?

24 Un classique

CORRIGÉ

Chez Coquillages & Poincaré Assurances (société d'assurances spécialisée dans l'indemnisation des victimes traumatisées par les études en Mathématiques), à partir des fiches de 1000 assurés, on a dressé le tableau d'effectifs ci-contre :

Age	Homme	Femme
[18; 25[	121	79
[25; 35[	83	88
[35; 45[	82	84
[45; 55[	80	83
[55; 65[	81	85
65 ans ou plus	70	64

On tire au hasard l'une des 1000 fiches.

Quelle est la probabilité que la fiche tirée soit :

- 1) celle d'un homme ?
- 2) celle d'une femme ?
- 3) celle d'une femme âgée de 35 à 55 ans ?
- 4) celle d'une personne de moins de 65 ans ?

25 Pièces défectueuses

CORRIGÉ

Deux ateliers de production ont fabriqué 300 pièces. L'atelier A a une cadence de production double de celle de l'atelier B. Le pourcentage de pièces défectueuses est de 3% dans la production de l'atelier A et de 4% dans celle de l'atelier B.

On prélève au hasard une pièce dans la production totale.

- 1) Combien l'atelier A a-t-il produit de pièces ? Quelle est la probabilité que la pièce tirée provienne de l'atelier A ?
- 2) Combien y a-t-il de pièces défectueuses ? Quelle est la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse ?
- 3) Combien y a-t-il de pièces défectueuses dans la production de l'atelier A ?

Quelle est la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse et provienne de l'atelier A ?



Événements successifs

26 EXO 1

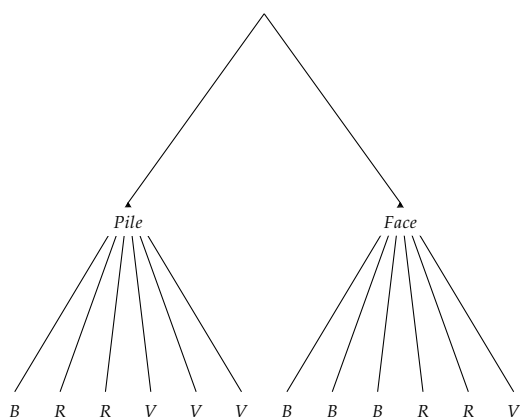
CORRIGÉ

On lance une pièce équilibrée.

Si la pièce tombe sur «Pile», on tire une boule dans une urne contenant 1 boule bleue, 2 boules rouges, et 3 boules vertes.

Si la pièce tombe sur «Face», on tire une boule dans une urne contenant 3 boules bleues, 2 boules rouges, et 1 boule verte.

On a représenté l'expérience par l'arbre ci-dessous :



Légende : B = bleue ; R = rouge ; V = verte

- 1) Construire un tableau à double entrée des issues de cette expérience aléatoire.
- 2) On vient de faire «Face». Donner la probabilité d'obtenir une boule rouge.
- 3) On recommence l'expérience au début. Donner la probabilité d'obtenir une boule bleue.

27 Un dernier jeu de cartes...

CORRIGÉ

On considère l'expérience consistant à tirer deux

cartes dans un jeu de 32 cartes. Partie 1 : On effectue le tirage de la deuxième carte après remise de la première dans le jeu.

- 1) a) Quelle est la probabilité de tirer 2 cartes de la même couleur (Rouge/Rouge ou Noire/Noire) ?
b) Quelle est la probabilité de tirer 2 as ?
c) Quelle est la probabilité de tirer 2 cartes de carreau ?
- 2) Partie 2 : On effectue le tirage de la deuxième carte sans remise de la première dans le jeu.
Reprendre les 3 questions de la partie 1 dans cette nouvelle expérience.

28 Dans la commode de Yazid

CORRIGÉ

Dans sa commode, Yazid a mis dans le premier tiroir des paires de chaussettes. Il y a 3 paires de chaussettes rouges, 7 paires de chaussettes vertes, 2 paires de chaussettes bleues, 6 paires de chaussettes noires et 5 paires de chaussettes blanches.

Dans le deuxième tiroir, Yazid a mis des T-shirt. Il y a 3 T-shirt rouges, 7 T-shirt verts, 2 T-shirt bleus, 6 T-shirt noirs et 5 T-shirt blancs.

Un matin, il y a une panne de courant et Yazid prend au hasard une paire de chaussettes dans le premier tiroir et un T-shirt dans le deuxième.

- 1) Quelle est la probabilité que Yazid ait choisi des chaussettes et un T-shirt noirs ?
- 2) Quelle est la probabilité que Yazid ait choisi des chaussettes et un T-shirt de la même couleur ?*
- 3) Quelle est la probabilité que Yazid ait choisi des chaussettes et un T-shirt de couleurs différentes ?



Vu au CRPE

29 Groupement 1 - CRPE 2022

CRPE

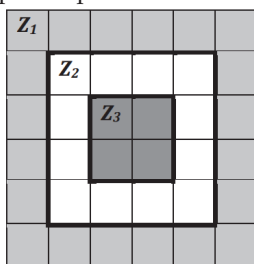
On dispose d'un dé cubique non truqué dont les faces opposées sont identiques : deux faces numérotées 0, deux faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

1) On effectue deux lancers et on lit, à chaque lancer, le chiffre inscrit sur la face supérieure.

Les deux lancers permettent d'obtenir un nombre décimal : le résultat du premier lancer donne le chiffre des unités et celui du second lancer le chiffre des dixièmes.

- Donner la liste de tous les nombres que l'on peut obtenir.
- Justifier que la probabilité d'obtenir 1,2 est égale à $\frac{1}{9}$.
- Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre entier ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal ?

2) Le tapis représenté ci-dessous est constitué de 36 carrés de côté 10 cm. Ces carrés définissent trois zones Z_1 , Z_2 et Z_3 repérées par des couleurs différentes.



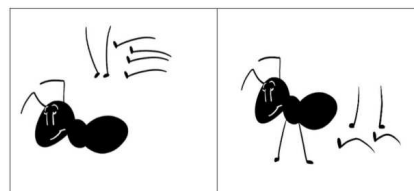
Avec le même dé que précédemment, on effectue un lancer sur ce tapis et on regarde la face supérieure. Si le dé tombe à cheval sur deux zones, on le relance. On admet que la probabilité que le dé tombe dans une zone est proportionnelle à l'aire de la zone.

- Quelle est la probabilité que le dé tombe dans la zone Z_2 ?
- Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 donne le nombre 1 ?
- Quelle est la probabilité que le dé tombe en zone Z_2 donne un nombre pair ?

30 Groupement 2 - CRPE 2022

CRPE

Un enseignant de grande section propose à ses élèves un jeu pour travailler la décomposition et la recomposition de nombres. Le jeu se compose de deux dés cubiques équilibrés et de corps de fourmis à compléter avec des pattes comme sur le dessin ci-dessous.



Sur les six faces du premier dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

Sur les six faces du deuxième dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.

On donne à chaque élève un corps de fourmi et 6 pattes à fixer sur le corps.

Au début de la partie, chaque élève choisit un nombre compris entre 2 et 10. Ce nombre reste le même durant toute la partie. À tour de rôle, chaque élève joue. Il lance les deux dés :

- si la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés est égale au nombre choisi par cet élève, alors celui-ci fixe une patte à sa fourmi et relance les dés.
- sinon, c'est au joueur suivant de lancer les dés. Il donne ensuite les dés au joueur suivant.

La partie se termine lorsqu'un élève a gagné, en fixant les six pattes de sa fourmi.

- Un élève choisit un nombre et lance les dés.
 - Quelles sont les différentes sommes qu'il peut obtenir ?
 - Montrer que la probabilité qu'il obtienne 8 est égale à $\frac{4}{36}$.
- Un autre élève choisit le nombre 6 et lance les dés.
 - Quelle est la probabilité qu'il gagne une patte pour sa fourmi dès son premier lancer ?
 - Quelle est la probabilité qu'il gagne deux pattes pour sa fourmi en 2 lancers ?
- Eden et Axelle commencent une partie. Eden choisit le nombre 6 et Axelle choisit un autre nombre.
 - Qui a le plus de chance de gagner la partie ? Justifier.
 - Eden est-il sûr de gagner la partie ? Justifier.

Le paradoxe de Monty Hall

Le problème de Monty Hall est un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*. Il est simple dans son énoncé, mais non intuitif dans sa résolution et c'est pourquoi on parle parfois à son sujet de paradoxe de Monty Hall. Il porte le nom de celui qui a présenté ce jeu aux États-Unis pendant treize ans, Monty Hall.



Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Il doit tout d'abord désigner une porte. Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou d'ouvrir la troisième porte.

Explications

Le joueur a une chance sur trois de choisir au départ la porte masquant la voiture. S'il maintient son choix après que le présentateur lui a montré la chèvre, il gagne exactement dans les cas où ce premier choix était le bon, donc avec probabilité $1/3$.

Imaginons un second joueur ayant choisi la même porte au départ mais qui, lui, change de porte après avoir vu la chèvre. Quand le premier joueur tombe sur une chèvre, le second trouve la voiture, et inversement. Le second joueur gagne donc avec probabilité $2/3$.

Ainsi, vous doublez vos chances de gagner la voiture en modifiant systématiquement votre choix initial. Ce résultat théorique est confirmé par les simulations. Notez qu'on pourrait aussi tirer à pile ou face si l'on garde ou non la porte initiale, mais cela ne donne qu'une chance sur deux de gagner.

Puisqu'il y a toujours une chèvre derrière au moins l'une des deux portes non choisies, on pourrait croire que le fait d'en montrer une n'apporte pas d'information au joueur. En réalité, dans deux cas sur trois, il y a une chèvre et une voiture derrière ces deux portes, et dévoiler la chèvre indique alors où est la voiture.

SOLUTIONS

Chapitre A1 Probabilités

Auto-évaluation diagnostique

0 (a)

0 (a)

0 (a)

0 (a)

0 (a)

0 (a)

0 (a)

0 (a)

Auto-évaluation QCM

9 (c)

11 (c)

13 (a)

10 (a)

12 (c)

14 (b)

S'entraîner

15

On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité est donnée par le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas au total.

1) Il y a 5 t-shirts blancs et il y a 21 t-shirts possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts blancs est :

$$\frac{5}{21}.$$

2) Il y a 6 t-shirts bleus et il y a 21 t-shirts possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts bleus est :

$$\frac{6}{21} = \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{2}{7}.$$

3) Il y a 3 t-shirts noirs, donc il y a $21 - 3 = 18$ autres t-shirts et il y a 21 t-shirts possibles. La probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des t-shirts noirs est :

$$\frac{18}{21} = \frac{6 \times 3}{7 \times 3} = \frac{6}{7}.$$

4) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent. Donc la probabilité que son choix tombe sur l'un des t-shirts blancs ou bleus est :

$$\frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{11}{21}.$$

16

On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité est donnée par le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas au total.

1) Il y a 2 nounours jaunes et il y a 21 nounours possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours jaunes est :

$$\frac{2}{21}.$$

2) Il y a 4 nounours verts et il y a 21 nounours possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours verts est :

$$\frac{4}{21}.$$

3) Il y a 6 nounours bleus, donc il y a $21 - 6 = 15$ autres nounours et il y a 21 nounours possibles. La probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des nounours bleus est :

$$\frac{15}{21} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{5}{7}.$$

4) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent. Donc la probabilité que son choix tombe sur l'un des nounours jaunes ou verts est :

$$\frac{2}{21} + \frac{4}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2 \times 3}{7 \times 3} = \frac{2}{7}.$$

17

On est dans une situation d'équiprobabilité donc la probabilité est donnée par le quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas au total.

1) Il y a 2 desserts lactés à la vanille et il y a 18 desserts lactés possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la vanille est :

$$\frac{2}{18} = \frac{1 \times 2}{9 \times 2} = \frac{1}{9}.$$

2) Il y a 5 desserts lactés à la pistache et il y a 18 desserts lactés possibles. La probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la pistache est :

$$\frac{5}{18}.$$

3) Il y a 4 desserts lactés au café, donc il y a $18 - 4 = 14$ autres desserts lactés et il y a 18 desserts lactés possibles. La probabilité que son choix ne tombe pas sur l'un des desserts lactés au café est :

$$\frac{14}{18} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{7}{9}.$$

4) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent. Donc la probabilité que son choix tombe sur l'un des desserts lactés à la vanille ou à la pistache est :

$$\frac{2}{18} + \frac{5}{18} = \frac{7}{18}.$$

18

- 1) La probabilité se lit quasi-directement sur le tableau car celui-ci est donné en pourcentage. On a donc :

$$p(O^-) = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$



- 2) **Attention!** Monsieur V n'appartient pas nécessairement au groupe O^- !

Notons E l'événement « Le patient du groupe A^- peut recevoir du sang de Monsieur V ».

Il faut répertorier dans le tableau précédent les groupes compatibles :

Groupe	A^+	A^-	B^+	B^-	AB^+	AB^-	O^+	O^-
%	39	6	7	2	2	1	37	6

On a donc :

$$p(E) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } E}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{6 + 6}{100} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

- 3) Notons F l'événement « Le patient du groupe B^+ peut recevoir du sang de Monsieur V ».

Il faut encore répertorier dans le tableau précédent les groupes compatibles :

Groupe	A^+	A^-	B^+	B^-	AB^+	AB^-	O^+	O^-
%	39	6	7	2	2	1	37	6

On a donc :

$$p(F) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } F}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{7 + 2 + 37 + 6}{100} = \frac{52}{100} = \frac{13}{25} \geq \frac{1}{2}$$

En effet, un patient du groupe B^+ a plus d'une chance sur deux de pouvoir recevoir du sang de Monsieur V.

19

1) a) Notons L (L pour « *Loose* », qui veut dire « perdre » en anglais) l'événement « Léo-Zeeshan ne gagne rien ». Incontestablement, il y a $50 - 12 = 38$ billets perdants. On a donc

$$p(L) = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$$

b) Notons W (W pour « *Win* », qui veut dire « gagner » en anglais) l'événement « Léo-Zeeshan ne gagne rien ». On a donc

$$p(W) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$$

c) Notons S (S pour « *Suerte* », qui veut dire « chance » en espagnol) l'événement « Léo-Zeeshan ne gagne rien ». On a donc

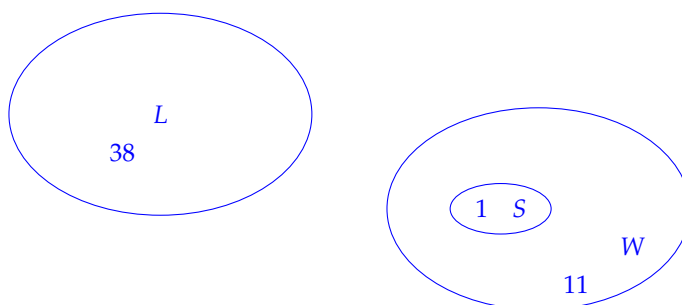
$$p(S) = \frac{1}{50}$$

1) En additionnant toutes les probabilités, on obtient

$$p(L) + p(W) + p(S) = \frac{38}{50} + \frac{12}{50} + \frac{1}{50} = \frac{38 + 12 + 1}{50} = \frac{51}{50} \geq 1$$

On remarque qu'en additionnant toutes les probabilités, on trouve un résultat supérieur à 1! « *Nom de Zeus!* » Bon, on se calme... En fait, c'est normal! Cela provient du fait que l'on a compté deux fois le billet qui fait gagner le gros lot dans l'événement W et dans le S .

On peut dessiner un diagramme de Venn pour comprendre un peu mieux :



20

1) Les issues étant équiprobables, il suffit de compter le nombre d'issues favorables correspondantes à l'événement A : « Aziz-Henri l'emporte sur Bill-Abhishek »

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{5}{9}$$

2) Les issues étant encore équiprobables, il suffit de compter le nombre d'issues favorables correspondantes à l'événement B : « Bill-Abhishek l'emporte sur Clara-Heidi »

$$p(B) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } B}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{5}{9}$$

3) a) Comme Aziz-Henri l'emporte sur Bill-Abhishek, et que Bill-Abhishek l'emporte sur Clara-Heidi, on pourrait Aziz-Henri et de Clara-Heidi

b)

A-H \ C-H	2	4	9
1	(1,2) C-H	(1,4) C-H	(1,9) C-H
6	(6,2) A-H	(6,4) A-H	(6,9) C-H
8	(8,2) A-H	(8,4) A-H	(8,9) C-H

Les issues étant encore équiprobables, il suffit de compter le nombre d'issues favorables correspondantes à l'événement C : « Aziz-Henri l'emporte sur Clara-Heidi »

$$p(C) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } C}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{4}{9}$$

Donc Aziz-Henri n'a pas l'avantage sur Clara-Heidi contrairement à ce que l'on pouvait croire...

UN PEU D'HISTOIRE :

Il paraît rationnel de penser que si A prend le plus souvent l'ascendant sur B , et B sur C , c'est A qui l'emportera sur C avec les plus grandes chances...

Le marquis de Condorcet (17 septembre 1743, Ribemont - 29 mars 1794, Bourg-la-Reine) a prouvé qu'on ne pouvait pas ainsi « ordonner les préférences ».

La situation précédente vient d'illustrer ce que l'on appelle le « **paradoxe de Condorcet** ».

Vous pourrez trouver une très belle explication sur ce site!



21

1) Ne pas perdre un match, c'est, soit le gagner, soit faire un match nul, la probabilité est donc :

$$\begin{aligned}P(\text{"Ne pas perdre le match"}) &= P(\text{"Gagner le match"}) + P(\text{"Match nul"}) \\&= 0,59 + 0,27 \\&= 0,86\end{aligned}$$

2) L'évènement "Perdre le match" est l'évènement contraire de "Ne pas perdre le match", on peut donc affirmer que :

$$\begin{aligned}P(\text{"Perdre le match"}) + P(\text{"Ne pas perdre le match"}) &= 1 \\P(\text{"Perdre le match"}) &= 1 - P(\text{"Ne pas perdre le match"}) \\P(\text{"Perdre le match"}) &= 1 - 0,86 \\P(\text{"Perdre le match"}) &= 0,14\end{aligned}$$

22

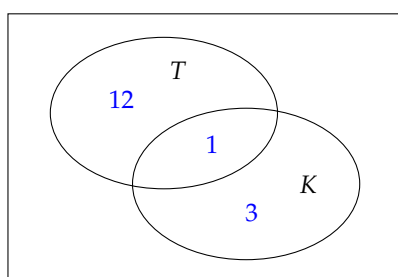
1) Les issues étant encore équiprobables, il suffit de compter le nombre d'issues favorables correspondantes aux différents événements :

$$p(R) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } R}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$p(K) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } K}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$p(T) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } T}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

2)



3) a) $R \cap K$: « la carte tirée est rouge ET est un roi » et on a :

$$p(R \cap K) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } R \cap K}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

b) $R \cap T$: « la carte tirée est rouge ET est un trèfle » et on a :

$$p(R \cap T) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } R \cap T}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{0}{52} = 0$$



Remarque : Les événements R et T sont incompatibles.

c) $R \cup T$: « la carte tirée est rouge OU est un trèfle » et on a :

$$p(R \cup T) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } R \cup T}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$$

On pouvait également utiliser la formule suivante :

$$p(R \cup T) = p(R) + p(T) - p(R \cap T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

1) a) $\bar{R}$: « la carte tirée n'est pas rouge » ou encore « la carte tirée est noire » et on a :

$$p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

b) $\bar{T} \cap R$: « la carte tirée n'est pas un trèfle ET est rouge » ou encore (plus simplement) « la carte tirée est rouge » (Si si, ça revient à ça...) et on a :

$$p(\bar{T} \cap R) = p(R) = \frac{1}{2}$$

23

Le plus simple est de modéliser la situation sous la forme d'un tableau à double entrée. Les cases coloriées correspondent aux données que l'on obtient directement de l'énoncé (le reste en découle par un « jeu de complémentarité »).

	Gauchers	Non-Gauchers	Total (en %)
Yeux bleus	3	27	30
Non-Yeux bleus	13	57	70
Total (en %)	16	84	100

Grâce à ce tableau, on peut donc lire directement que la probabilité qu'un individu pris au hasard ne soit pas gaucher et n'ait pas les yeux bleus est $\frac{57}{100}$.



Remarque : Pour illustrer les réponses, on va colorier les cases correspondantes aux événements. 1)

Age	Homme	Femme
[18; 25[	121	79
[25; 35[	83	88
[35; 45[	82	84
[45; 55[	80	83
[55; 65[	81	85
65 ans ou plus	70	64

Notons H l'événement « La fiche tirée est celle d'un homme ». On a donc

$$p(H) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } H}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{121 + 83 + 83 + 80 + 81 + 70}{1000} = \frac{517}{1000}$$

2) Notons F l'événement « La fiche tirée est celle d'une femme ». Il suffit de remarquer que F est l'événement contraire de H ... On a donc

$$p(F) = 1 - p(H) = 1 - \frac{517}{1000} = \frac{483}{1000}$$

3)

Age	Homme	Femme
[18; 25[	121	79
[25; 35[	83	88
[35; 45[	82	84
[45; 55[	80	83
[55; 65[	81	85
65 ans ou plus	70	64

Notons A l'événement « La fiche tirée est celle d'une femme âgée de 35 à 55 ans ». On a donc

$$p(A) = \frac{84 + 83}{1000} = \frac{167}{1000}$$

4)

Age	Homme	Femme
[18; 25[	121	79
[25; 35[	83	88
[35; 45[	82	84
[45; 55[	80	83
[55; 65[	81	85
65 ans ou plus	70	64

Notons B l'événement « La fiche tirée est celle d'une personne de moins de 65 ans ».

Pour simplifier nos calculs, il suffit de remarquer que l'événement contraire de B est l'événement « La fiche tirée est celle d'une personne de 65 ans ou plus » (que l'on va donc noter $\bar{B}$)... On a donc

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{70 + 64}{1000} = \frac{134}{1000} = \frac{67}{500}$$

25

1) Il s'agit de poser une équation pour répondre à cette question. Notons p le nombre de pièces produites par l'atelier B. On sait donc que la production de l'atelier A c'est $2p$ (car c'est le double de celle de l'atelier B). On a donc :

$$\underbrace{2p}_{\text{Atelier A}} + \underbrace{p}_{\text{Atelier B}} = \underbrace{300}_{\text{Total}} \Leftrightarrow 3p = 300 \Leftrightarrow p = \frac{300}{3} = 100$$

Il y a donc 200 pièces dans l'atelier A. (On rappelle que p est le nombre de pièces produites par l'atelier B!)

Notons A l'événement « la pièce tirée provient de l'atelier A ». On a donc

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$$

2) Il s'agit de calculer le nombre de pièces défectueuses à partir des pourcentages.

Dans l'atelier A, il y a 200 pièces au total et 3% de celles-ci sont défectueuses. Donc il y a $\frac{3}{100} \times 200 = 6$ pièces défectueuses dans l'atelier A.

Dans l'atelier B, il y a 100 pièces au total et 4% de celles-ci sont défectueuses. Donc il y a $\frac{4}{100} \times 100 = 4$ pièces défectueuses dans l'atelier B.

Il y a donc au total 10 pièces défectueuses.

Notons D l'événement « la pièce tirée est défectueuse ». On a donc

$$p(D) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } D}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{10}{300} = \frac{1}{30}$$

3) Le calcul a été fait à la question précédente : il y a 6 pièces défectueuses dans l'atelier A.

Quelle est la probabilité que la pièce tirée soit défectueuse et provienne de l'atelier A ?

Dans cette question, il s'agit de calculer la probabilité de $A \cap D$. Je propose de faire un petit tableau croisé pour se repérer (mais ce n'est pas forcément indispensable!) :

Pièces \ Ateliers	Ateliers		
	A	B	Total
D	6	4	10
$\overline{D}$	194	96	290
Total	200	100	300

Ensuite, il faut relever la valeur qui est à l'intersection (eh eh, ça porte bien son nom) pour calculer l'intersection $A \cap D$. On a donc

$$p(A \cap D) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A \cap D}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{6}{300} = \frac{1}{50}$$

26

- 1) L'issue «Pile-bleue» peut être obtenue de 1 façon et l'issue «Pile-rouge» peut être obtenue de 2 façons. Voici un tableau à double entrée qui représente toutes les issues de cette expérience.

Pièce \ Boules	<i>bleue</i>	<i>rouge</i>	<i>verte</i>
Pile	1	2	3
Face	3	2	1

- 2) Comme on a fait Face», on va tirer une boule dans la deuxième urne où il y a 2 boules rouges sur 6 boules. La probabilité de cet événement est donc de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- 3) Il y a équiprobabilité entre toutes les issues du tableau car, d'une part, la pièce est équilibrée et, d'autre part, chaque urne contient 6 boules.

Il y a 4 issues avec une boule bleue sur 12 issues en tout. La probabilité de cet événement est donc de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

27

1) a) On ne s'intéresse ici qu'au tirage de la deuxième carte. En effet, pour réaliser l'événement, il faudra que cette carte soit de la même couleur que la première. Il y a deux couleurs (rouge et noire) et le nombre de cartes rouges est le même que le nombre de cartes noires : 16.

La probabilité que la deuxième carte soit de la même couleur que la première est donc : $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

b) Il y a 4 as dans le jeu sur 32 cartes possibles. La probabilité de tirer un as est donc de $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Comme la deuxième carte est tirée dans le jeu complet (après remise de la première), la probabilité de tirer un as est la même pour cette carte.

La probabilité de tirer 2 as est donc : $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$.

c) Il y a 8 cartes de carreau dans le jeu sur 32 cartes possibles. La probabilité de tirer un carreau est donc de $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Comme la deuxième carte est tirée dans le jeu complet (après remise de la première) la probabilité de tirer un carreau est la même pour cette carte.

La probabilité de tirer 2 carreaux est donc $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

1) a) On ne s'intéresse ici qu'au tirage de la deuxième carte. En effet, pour réaliser l'événement, il faudra que cette carte soit de la même couleur que la première. Il y a maintenant une carte en moins dans la couleur désirée, soit 15, et il y a une carte en moins dans le jeu, soit 31.

La probabilité que la deuxième carte soit de la même couleur que la première est donc : $\frac{15}{31}$.

b) Il y a 4 as dans le jeu sur 32 cartes possibles. La probabilité de tirer un as est donc de $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Pour que l'événement se réalise la deuxième carte est tirée dans les 31 cartes restantes dans lesquelles il manque un as.

La probabilité de tirer un deuxième as est donc : $\frac{3}{31}$.

La probabilité de tirer 2 as est donc : $\frac{1}{8} \times \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

c) Il y a 8 cartes de carreau dans le jeu sur 32 cartes possibles. La probabilité de tirer un carreau est donc de $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Pour que l'événement se réalise, la deuxième carte est tirée dans les 31 cartes restantes dans lesquelles il manque un carreau.

La probabilité de tirer un deuxième carreau est donc : $\frac{7}{31}$.

La probabilité de tirer 2 carreaux est donc $\frac{1}{4} \times \frac{7}{31} = \frac{7}{124}$.

28

1) Il y a 6 paires de chaussettes noires et il y a 23 paires de chaussettes possibles. La probabilité de choisir une paire de chaussettes noires est : $\frac{6}{23}$.

Il y a 6 T-shirt noirs et il y a 23 T-shirt possibles. La probabilité de choisir un des T-shirt noirs est : $\frac{6}{23}$.

Yazid a donc $\frac{6}{23}$ de 6 chances sur 23 de choisir des chaussettes et un T-shirt noirs.

$$\text{Soit } \frac{6}{23} \times \frac{6}{23} = \frac{6 \times 6}{23 \times 23} = \frac{36}{529}.$$

2) La probabilité de choisir une paire de chaussettes rouges est : $\frac{3}{23}$ et La probabilité de choisir l'un des T-shirt rouges est : $\frac{3}{23}$.

Donc la probabilité de choisir des chaussettes et un T-shirt rouges est : $\frac{3}{23} \times \frac{3}{23} = \frac{3 \times 3}{23 \times 23} = \frac{9}{529}$.

La probabilité de choisir une paire de chaussettes bleues est : $\frac{2}{23}$ et la probabilité de choisir l'un des T-shirt bleus est : $\frac{2}{23}$.

Donc la probabilité de choisir des chaussettes et un T-shirt bleus est : $\frac{2}{23} \times \frac{2}{23} = \frac{2 \times 2}{23 \times 23} = \frac{4}{529}$.

On en déduit que la probabilité de choisir des chaussettes et un T-shirt de la même couleur est :

$$\frac{36}{529} + \frac{9}{529} + \frac{4}{529} = \frac{36 + 9 + 4}{529} = \frac{49}{529}$$

3) L'événement "choisir des chaussettes et un T-shirt de couleurs différentes" est l'événement contraire de l'événement "choisir des chaussettes et un T-shirt de même couleur".

$$\text{Donc sa probabilité est : } 1 - \frac{49}{529} = \frac{529 - 49}{529} = \frac{480}{529}$$

Vu au CRPE

30