ARITHMÉTIQUE

1

Numération

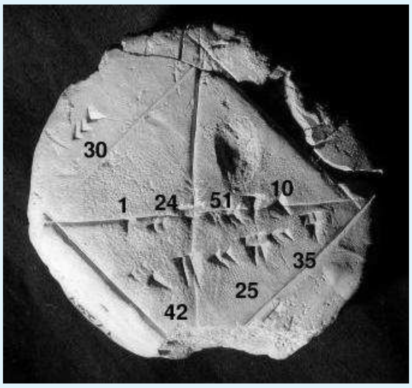
« - Dieu crée les dinosaures. Dieu détruit les dinosaures. Dieu crée l'homme. L'homme détruit Dieu. L'homme crée les dinosaures...
- Les dinosaures mangent l'homme. Et la femme hérite de la Terre. »

Ian Malcolm et Ellie Sattler, Jurassic Park, 1993.

Introduction

Un chiffre est un élément d'écriture. Pour *dire* un nombre, on n'utilise pas de chiffres. On dit le nom du nombre, que l'on peut aussi écrire « *en toutes lettres* ». Le nom d'un nombre peut être simple, comme « seize » ou composé, comme « dix-sept » ou « mille deux cent quatre-vingt cinq ». Les chiffres jouent par rapport aux nombres un rôle similaire à celui des lettres par rapport aux mots. À l'écrit, les nombres sont représentés par une juxtaposition de chiffres, de même que les mots sont représentés par une juxtaposition de lettres. Par contre, les arrangements de lettres ne forment pas forcément un mot, alors que dans les *systèmes de numération positionnelle*, toute suite de chiffres peut s'interpréter valablement comme un nombre entier

Pour effectuer des opérations sur les nombres, on a inventé des *systèmes de numération* qui permettent de les écrire rapidement, en chiffres.

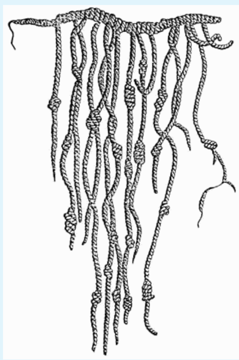


Tablette YBC 7289 (XVIIe siècle av. J.-C.) avec l'écriture en numération sexagésimale de $1/2$ et des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}/2$ précises jusqu'à la 6e décimale !

Le système de numération le plus ancien, dit unaire (base 1), s'avère peu pratique, notamment lorsqu'il s'agit de manier des quantités importantes. Pour remédier à cette lacune, la solution consiste à grouper les unités par paquets chaque fois qu'est atteinte une même valeur, qu'on appelle *base de numération*. De même, on regroupe ces paquets en paquets d'ordre supérieur, et ainsi de suite. Généralement, le nombre d'éléments de chaque paquet est identique. Il existe toutefois des exceptions, par exemple dans notre notation des heures : soixante secondes pour une minute, soixante minutes pour une heure, vingt-quatre heures pour un jour, vingt-huit à trente-et-un jours pour un mois. De même, la numération maya, de caractère vigésimale est irrégulière afin d'approcher le calendrier. La numération babylonienne, de caractère sexagésimal, se présente comme une combinaison de systèmes.

Parmi les *instruments de numération*, on en trouve principalement deux : les bâtons de comptage et les quipu.
Un bâton de comptage est un système mnémonique destiné à enregistrer un nombre grâce à des marques de dénombrement portées sur un bâton. Le plus souvent, ces marques sont des entailles, sur un bâton en bois ou en os. L'origine de cette technique remonte à la Préhistoire, et l'os d'Ishango (20 000 ans avant notre ère) est l'exemple le plus connu. Les entailles retrouvées sur l'os d'Ishango (antérieur à l'apparition de l'écriture), semblent isoler quatre nombres premiers 11, 13, 17 et 19. Certains archéologues l'interprètent comme la preuve de la connaissance des nombres premiers...

Un quipu (« noeud » et « compte » en quechua) désigne aujourd'hui les objets qu'utilisait l'administration inca pour le recensement des données statistiques concernant l'économie et la société de l'empire. En l'absence d'écriture, l'administration figurait les entiers naturels à l'aide de successions de nœuds le long de cordelettes de diverses couleurs fixées à une corde : l'ensemble constituait un quipu. Les quipus constituent un système original de consignation de données qui a été développé très tôt dans le Pérou ancien (comme ceux découverts sur le site de la civilisation de Caral remontant à 4 500 ans).



Auto-évaluation diagnotisque

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) / remarque(s).

1 Que veut dire « D » en chiffre romain ?

(a) 10 (b) 500 (c) 1000

2 Combien existe-t-il de système de numération ?

(a) 3 (b) 5 (c) Plus de 10

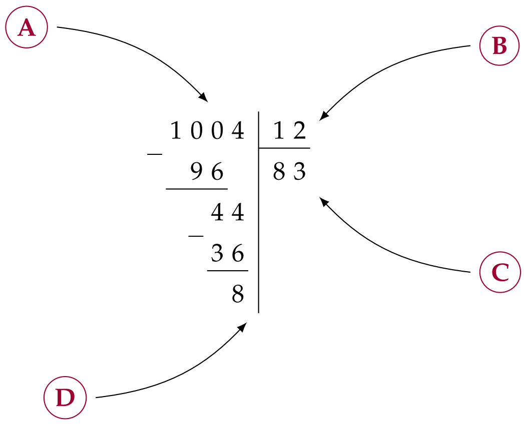
3 Notre système de numération est dit

(a) latin (b) binaire (c) décimal

4 Le chiffre des centaines du nombre 9053 est

(a) 0 (b) 90 (c) 053

Pour les questions 5 à 8, on considère la division euclidienne suivante :



5 Quel est le terme en (A) à indiquer l'extrémité de la flèche ?

(a) Quotient (b) Dividende (c) Diviseur

6 Quel est le terme en (B) à indiquer l'extrémité de la flèche ?

(a) Quotient (b) Dividende (c) Diviseur

7 Quel est le terme en (C) à indiquer l'extrémité de la flèche ?

(a) Quotient (b) Dividende (c) Diviseur

8 Quel est le terme en (D) à indiquer l'extrémité de la flèche ?

(a) Quotient (b) Résidu (c) Reste

Voir solutions p. 19

Cours

1. Différents types de numération

A. Définitions

Les nombres peuvent être représentés par des signes, par des mots ou par des gestes. Un ensemble de règles d'utilisation des signes, des mots ou des gestes représentant les nombres définit un système de numération.

DÉFINITION

On appelle **numération**, tout code permettant de représenter un nombre.

REMARQUE : Il existe trois familles principales de systèmes de numération : additif, hybride et positionnel.

DÉFINITION : **Système de numération additif, hybride et positionnel**

- On appelle **système de numération positionnel** un système de numération dont la valeur des symboles ne dépend pas seulement de la forme des chiffres mais également de leur position dans le nombre.
- On appelle **système de numération additif** un système de numération qui utilise des signes qui représentent chacun une valeur et lorsque, pour connaître la valeur du nombre ainsi représenté, il faut additionner les valeurs des différents signes.
- On appelle **système de numération hybride** un système de numération qui utilise des symboles différents pour les puissances de la base et pour les nombres inférieurs à la base écrits devant le symbole. Les nombres sont ainsi représentés par addition de multiples de puissances de la base.

Exemple

- **Système de numération positionnel :**
  C'est le cas des systèmes de numération maya et babylonien, ainsi que les systèmes de numération indien et arabe, qui sont à l'origine des mathématiques modernes, celles-ci permettant désormais d'écrire les nombres simplement quelle qu'en soit la base, à l'aide du zéro positionnel.
- **Système de numération additif :**
  C'est le cas des systèmes de numération grec, égyptien, gotique, ou plus simplement du système unaire ou de la numération forestière. C'est aussi le cas avec une variante soustractive pour le système de numération romain.
- **Système de numération hybride :**
  C'est le cas des systèmes de numération chinois et japonais. On peut remarquer qu'un tel système de notation comporte une forte analogie avec le système d'énonciation des nombres dans une majorité de langues. (Par exemple, en français, le nombre *deux-mille-huit-cent-dix-sept*, est aussi formé par addition de multiples de puissances de la base 10 : $2 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 7$.)

REMARQUE : Les plus anciens systèmes de numérations connus sont additifs.

PRENONS DE LA HAUTEUR :

- Dans *Formal Languages, Automata and Numeration Systems : Applications to Recognizability and Decidability* du mathématicien Michel Rigo définit rigoureusement un système de numération comme un triplet (X, I, ϕ), où X est l'ensemble à énumérer, I est un ensemble fini ou dénombrable de chiffres et ϕ est une application injective dans les suites de chiffres

$$\phi : X \hookrightarrow I^{\mathbb{N}}, x \mapsto (\epsilon_n(x))_{n \geqslant 1}$$

En notation décimale, X est l'ensemble des entiers naturels, $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ est l'ensemble des chiffres décimaux et la suite associée à un nombre entier est la suite de ses chiffres décimaux.
ϕ est appelée application de représentation, et $\phi(x)$ est la représentation de $x \in X$.

- Quant à Georg Cantor, dans son article « *Ueber die einfachen Zahlensysteme* » pour la revue *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, il définit un système de numération comme la donnée d'une suite d'entiers naturels a_n rangés par ordre croissant (dans le cas du système décimal : $a_n = 10^n$) et pour chacun, d'une valeur maximum m_n du coefficient par lequel on s'autorise à le multiplier (dans le cas du système décimal : $m_n = 9$). Il appelle représentation d'un entier naturel N toute suite finie de coefficients c_k, chaque c_k étant un entier naturel au plus égal à m_k, telle que la somme des $c_k a_k$ soit égale à N.
Il démontre qu'un tel système est « simple », c'est-à-dire représente chaque entier N de façon unique, si et seulement si $a_0 = 1$ et pour tout $n, a_{n+1} = (1 + m_n)\, a_n$, puis étend dans ce cas les représentations d'entiers en des représentations de réels (positifs), en leur ajoutant des séries infinies de la forme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{a_k}, \quad d_k \in \{0, 1, \ldots, m_{k-1}\}.$$

B. Système de numération de l'ancienne Égypte

Les Égyptiens de l'Antiquité utilisaient un système de numération décimal, mais dans lequel zéro n'existait pas. Chaque ordre de grandeur (unités, dizaines, centaines, etc.) possédait un signe répété le nombre de fois nécessaire. Autrement dit, il s'agit d'un système additif et non pas d'un système de position.

Symbole	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Valeur	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000

REMARQUE : Les deux derniers signes du têtard et du dieu Heh peuvent également être utilisés pour signifier « un grand nombre » sans notion quantitative spécifique.

Quand les nombres sont écrits en hiéroglyphes — c'est le cas par exemple lorsqu'ils sont gravés sur les parois des temples ou monuments — les nombres se notent donc par la répétition de signes figurant les différentes puissances de 10 nécessaires qui se regroupent par ordres de grandeur (unités, dizaines, centaines, etc.). Pour des questions esthétiques et d'occupation d'espace, les signes peuvent être superposés ou non mais ce n'est pas une règle, certains signes hiéroglyhiques étant plus long ou moins long que d'autres.

Exemple

- 𓎆𓏺𓏺 et 𓏺𓏺𓎆 et 𓏺𓎆𓏺 sont trois écritures différentes du nombre 12 $(10 + 1 + 1)$.
- 𓆼 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺 représente $1 \times 1\,000 + 7 \times 10 + 6 \times 1 = 1\,076$.

C. Système de numération romain

La **numération romaine** est un système de numération additive utilisé par les anciens Romains.

Les nombres sont représentés à l'aide de symboles combinés entre eux, notamment par les signes I, V, X, L, C, D et M, appelés **chiffres romains**.

Symbole	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
Valeur	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1 000

Un nombre écrit en chiffres romains se lit de gauche à droite. En première approximation, sa valeur se détermine en faisant la somme des valeurs individuelles de chaque symbole, sauf quand l'un des symboles précède un symbole de valeur supérieure ; dans ce cas, on soustrait la valeur du premier symbole au deuxième.

Remarque : Il s'agit d'un système additif, mais aussi soustractif car il permet des écritures plus courtes.

PROPOSITION : Principes de la numération romaine

Les nombres romains sont majoritairement représentés selon les principes suivants :

- Un nombre en chiffres romains se lit de gauche à droite.
- Un même symbole n'est pas employé quatre fois de suite (sauf M).
- Tout symbole qui suit un symbole de valeur supérieure ou égale s'ajoute à celui-ci (exemple : 6 s'écrit VI).
- Tout symbole qui précède un symbole de valeur supérieure se soustrait à ce dernier :
  - I doit être retranché à V ou à X quand I est devant V ou X (ex. : 4 s'écrit IV),
  - X doit être retranché à L ou à C quand X est devant L ou C (ex. : 40 s'écrit XL),
  - C doit être retranché à D ou à M quand C est devant D ou M (ex. : 900 s'écrit CM),
  - en revanche, ôter I de L ou de C n'est pas pratiqué (49 s'écrit XLIX et non IL ; 99 s'écrit XCIX et pas IC).
- Les symboles sont groupés par ordre décroissant, sauf pour les valeurs à retrancher selon la règle précédente (ex. : 1 030 s'écrit MXXX et non XXXM qui est une des façons de représenter 970).

Exemple

- MDXV $=$ M $+$ D $+$ X $+$ V $= 1000 + 500 + 10 + 5 = 1515$
- MMII $=$ MM $+$ II $= 1000 + 1000 + 1 + 1 = 2002$
- DCLXVI $=$ D $+$ C $+$ L $+$ X $+$ V $+$ I $= 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 666$
- DIX $=$ D $+$ IX $= 500 + (10 - 1) = 509$
- XV $=$ X $+$ V $= 10 + 5 = 15$
- XIV $=$ X $+$ I $+$ V $= 10 + (5 - 1) = 14$
- XIII $=$ X $+$ III $= 10 + 1 + 1 + 1 = 13$
- XII $=$ X $+$ II $= 10 + 1 + 1 = 12$
- XI $=$ X $+$ I $= 10 + 1 = 11$

Prenons de la hauteur : Extensions de la notation classique
Une barre horizontale similaire à un macron suscrit, appelée *vinculum* ou *virgula* en latin, indique un facteur multiplicatif de 1 000. Ces traits peuvent s'étendre sur plusieurs nombres et ainsi multiplier un ensemble de chiffres :

Symbole	$\overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{L}}$	$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{D}}$	$\overline{\mathrm{M}}$ ou $\overline{\overline{\mathrm{I}}}$	$\overline{\overline{\mathrm{V}}}$
Valeur	1 000	5 000	10 000	50 000	100 000	500 000	1 000 000	5 000 000

On obtient donc le genre de nombre suivant

$$\overline{\overline{\mathrm{XLI}}\mathrm{CLVI}}\mathrm{DCV} = 41156605 = 41(\mathrm{XLI}) \times 1000000 + 156(\mathrm{CLVI}) \times 1000 + 605(\mathrm{DCV})$$

Cette notation peut être utilisée conjointement à deux traits verticaux à gauche et à droite du nombre, indiquant quant à eux un facteur multiplicatif de 100.

D. Système de numération chinois

La numération chinoise sert à écrire des nombres en chinois. Elle est constituée de caractères chinois et remonte donc à la naissance de l'écriture chinoise, au IIIe millénaire av. J.-C. C'est une numération qui se rapproche d'un système positionnel à base 10, où les principes de position et d'addition sont utilisés.

Bien que la numération indo-arabe soit devenue d'usage courant en Chine, cette numération est encore utilisée.

Symbole	零 / 〇	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万 / 萬
Valeur	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000

Exemple

9018 s'écrit
九
千
零
十
八

En effet, avec le système utilisé pour la numération chinoise (décimale), on a bien

$$\underbrace{\text{九}}_{9} \otimes \underbrace{\text{千}}_{1000} \oplus \underbrace{\text{零}}_{0(\times 100)} \oplus \underbrace{\text{十}}_{(1\times)10} \oplus \underbrace{\text{八}}_{8}$$

E. Système de numération babylonien

La numération babylonienne utilise un système de numération positionnelle sexagésimale, et deux signes représentant 10 et 60. Elle permet d'écrire les entiers et des fractions (à partir des inverses des diviseurs de 60). Il n'y a pas de symbole pour le 0. Un même symbole peut représenter plusieurs nombres suivant le contexte. Les multiplications sont effectuées à partir de tables et de tables réciproques pour les divisions.

Symbole	𒁹	𒈫	𒐈	…	𒌋	𒌋𒁹	𒌋𒈫	…	𒐐𒐝
Valeur	1	2	3	…	10	11	12	…	59

Remarque : Rappelons que les mathématiques babyloniennes sont les mathématiques des peuples de la Mésopotamie, dont le centre principal était Babylone, à partir de 5000 ans avant J.C et jusqu'à la chute de Babylone en 539 avant J.C.

Exemple

Pour écrire 10 000 en babylonien, on effectue les divisions euclidiennes par 60 :

$$10000_{10}:\quad \left.\begin{array}{r|l} 60\underline{|\,10000} & 40 \\ 60\underline{|\,166} & 46 \\ 60\underline{|\,2} & 2 \end{array}\right\} = 2.46.40_{60}$$

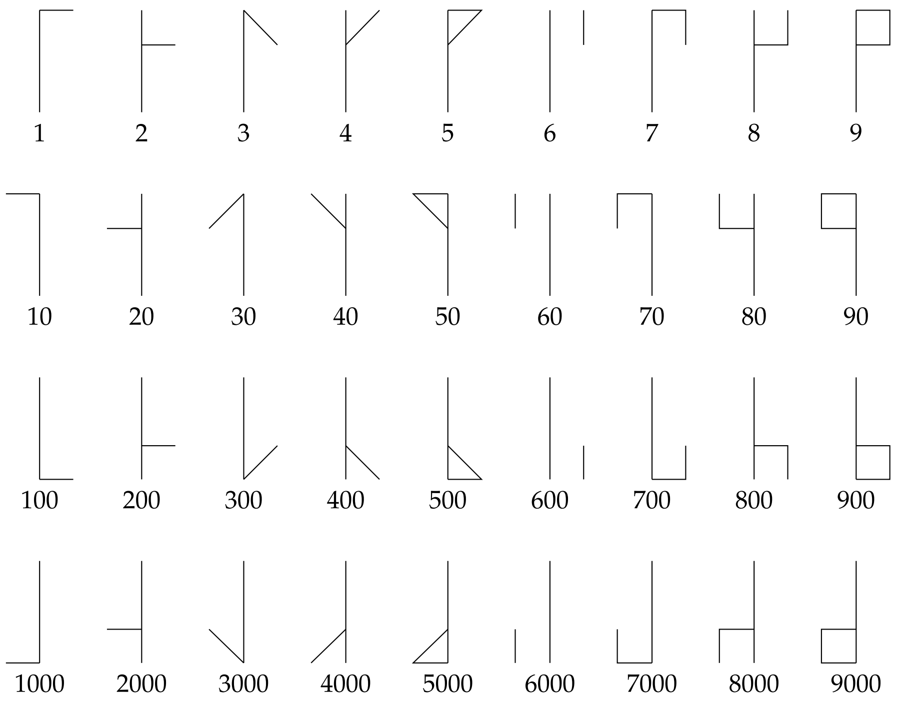
Puis on écrit de droite à gauche les restes successifs des divisions : 2 46 40, que l'on « transcrit » en babylonien :

On peut également décomposer 10 000 selon les puissances décroissantes de 60 :

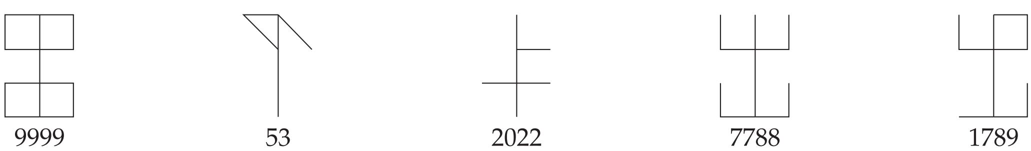
$$10\,000 = 2 \times 60^2 + 46 \times 60 + 40$$

F. Système de numération cistercien

Le système cistercien de notation numérique, ou « *Notae Elegantissimae* » d'Agrippa, est un système de numération qui aurait été utilisé couramment par les moines européens du Moyen Âge. Il permet de coder les nombres de 1 à 9 999 sur un seul symbole. Ce système a été décrit dans le livre *The Ciphers of the Monks : a Forgotten Number-notation of the Middle Ages* de David A. King paru en 2001.



Exemple



2. Les bases

A. Notre système de numération

Notre système de numération est un système positionnel de base dix. Cela signifie que nous utilisons dix symboles ou chiffres ; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans un nombre. Ainsi, dans le nombre 534, chaque symbole ou chiffre a une valeur qui dépend de sa position

$$534 = 500 + 30 + 4 \qquad \text{ou encore} \qquad 534 = 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Cette dernière expression est appelée la représentation polynomiale du nombre 534.

Prenons de la hauteur : Dans un système positionnel,les nombres fractionnaires s'expriment également comme somme de puissances successives de la base, cependant les exposants sont négatifs. Ainsi, le nombre $0,752$ sous forme polynomiale donne :

$$\begin{aligned} 0,752 &= 0,7 + 0,05 + 0,002 \\ &= 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

On peut également exprimer ce nombre sous la forme équivalente suivante :

$$0,752 = \frac{7}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3}$$

En faisant la somme du développement de la partie entière et du développement de la partie fractionnaire on obtient la représentation polynomiale de n'importe quel nombre réel. Ainsi, la représentation polynomiale du nombre 253,67 est :

$$253,67 = 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2}.$$

Remarque : Quand doit travailler avec les chiffres d'un nombre, il y a une notation usuelle pour écrire, par exemple, un nombre N à quatre chiffre est $N = \overline{abcd}$ avec a le chiffre des milliers, b celui des centaines, c celui des dizaines et d celui des unités.
On a donc

$$N = \overline{abcd} = d + 10 \times c + 100 \times b + 1000 \times a$$

a, b, c et d sont parfois respectivement remplacé par m, c, d et u (pour **m**illiers, **c**entaines, **d**izaines et **u**nités).

Attention : Il ne faut pas confondre l'écriture $\overline{cdu}$ (avec la « barre » au dessus) qui exprime l'écriture du nombre avec le nombre « cdu » qui pourrait exprimer implicitement un nombre c multiplié par d multiplié par u !

Remarque : Pour faciliter la position des chiffres, on utilise couramment un tableau.

Centaines de milliards	Dizaines de milliards	Milliards	Centaines de millions	Dizaines de millions	Millions	Centaines de milliers	Dizaines de milliers	Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes

B. Numération en base b

DÉFINITION

La **base** d'un système de numération positionnel est lenombre de symboles (ou de chiffres) utilisés pour repré-senter les nombres dans ce système de numération.

DÉFINITION

Le **système décimal** est un système de numération utilisant la base dix. Dans ce système, les puissances de dix et leurs multiples bénéficient d'une représentation privilégiée.

Exemple

Le système décimal est le plus répandu, comme, par exemple, les numérations :

- indo-arabe,
- arménienne,
- chinoise,
- égyptienne,
- gotique,
- grecque,
- hébraïque,
- indienne,
- japonaise,
- mongole,
- romaine,
- tchouvache.

PROPOSITION : Passage de la base 10 à la base b

On peut utiliser la méthode des divisions successives : on divise le nombre par b, puis le quotient obtenu par b, puis le nouveau quotient par b, et ainsi de suite jusqu'à ce que le quotient soit égal à 0.
On écrit alors côte à côte et de droite à gauche les restes successifs de toutes ces divisions.

Exemple

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 2\lfloor\underline{1000} & 0 \\ 2\lfloor\underline{500} & 0 \\ 2\lfloor\underline{250} & 0 \\ 2\lfloor\underline{125} & 1 \\ 2\lfloor\underline{62} & 0 \\ 2\lfloor\underline{31} & 1 \\ 2\lfloor\underline{15} & 1 \\ 2\lfloor\underline{7} & 1 \\ 2\lfloor\underline{3} & 1 \\ 2\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 1111101000_2$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 3\lfloor\underline{1000} & 1 \\ 3\lfloor\underline{333} & 0 \\ 3\lfloor\underline{111} & 0 \\ 3\lfloor\underline{37} & 1 \\ 3\lfloor\underline{12} & 0 \\ 3\lfloor\underline{4} & 1 \\ 3\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 1101001_3$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 4\lfloor\underline{1000} & 0 \\ 4\lfloor\underline{250} & 2 \\ 4\lfloor\underline{62} & 2 \\ 4\lfloor\underline{15} & 3 \\ 4\lfloor\underline{3} & 3 \end{array}\right\} = 33220_4$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 5\lfloor\underline{1000} & 0 \\ 5\lfloor\underline{200} & 0 \\ 5\lfloor\underline{40} & 0 \\ 5\lfloor\underline{8} & 3 \\ 5\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 13000_5$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 6\lfloor\underline{1000} & 4 \\ 6\lfloor\underline{166} & 4 \\ 6\lfloor\underline{27} & 3 \\ 6\lfloor\underline{4} & 4 \end{array}\right\} = 4344_6$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 7\lfloor\underline{1000} & 6 \\ 7\lfloor\underline{142} & 2 \\ 7\lfloor\underline{20} & 6 \\ 7\lfloor\underline{2} & 2 \end{array}\right\} = 2626_7$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 8\lfloor\underline{1000} & 0 \\ 8\lfloor\underline{125} & 5 \\ 8\lfloor\underline{15} & 7 \\ 8\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 1750_8$$

1000_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 9\lfloor\underline{1000} & 1 \\ 9\lfloor\underline{111} & 3 \\ 9\lfloor\underline{12} & 3 \\ 9\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 1331_9$$

6561_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l} 8\lfloor\underline{6561} & 1 \\ 8\lfloor\underline{820} & 4 \\ 8\lfloor\underline{102} & 6 \\ 8\lfloor\underline{12} & 4 \\ 8\lfloor\underline{1} & 1 \end{array}\right\} = 14641_8$$

Remarque : Le nombre 271828182845904523536 comme suit en binaire :

$$1110101111100010111111101101000001011101000110000100100001000100010000$$

PROPOSITION : Passage de la base b à la base 10

On utilise la formule suivante $\overline{a_n \dots a_1 a_0}_b = a_n \times b^n + \cdots + a_1 \times b^1 + a_0 \times b^0$.

Exemple

$$\begin{aligned} 123456789_9 &= 1 \times 9^7 + 2 \times 9^6 + 3 \times 9^5 + 4 \times 9^4 + 5 \times 9^3 + 6 \times 9^2 + 7 \times 9^1 + 8 \times 9^0 \\ &= 4782969 + 1062882 + 177147 + 26244 + 3645 + 486 + 63 + 8 \\ &= 6053444 \end{aligned}$$

Remarque : Le passage de la base b à la base 10 est plus facile que le passage de la base 10 à la base b.

PÉDAGOGIE 1 Visualisation du passage de la base b à la base 10

Il peut être intéressant d'avoir de bonnes images mentales pour les conversions, notamment de pour le passage de la base b à la base 10.

Heuristique

Je vous donne une illustration que j'apprécie beaucoup.
L'idée est d'écrire le nombre que l'on souhaite convertir, et dessiner des flèches en partant de la fin du nombre afin de créer une colonne.
Au bout des susdites flèches, on écrit la multiplication de son chiffre avec la base élevé à la puissance correspondante.
L'avantage de cette visualisation est que l'on identifie mieux la position de chiffres.

$$\begin{array}{l} 12345678_9 \\ \begin{array}{rcr} 8 \cdot 9^0 &=& 8 \\ 7 \cdot 9^1 &=& 63 \\ 6 \cdot 9^2 &=& 486 \\ 5 \cdot 9^3 &=& 3645 \\ 4 \cdot 9^4 &=& 26244 \\ 3 \cdot 9^5 &=& 177147 \\ 2 \cdot 9^6 &=& 1062882 \\ 1 \cdot 9^7 &=& 4782969 \\ \hline & & 6053444 \end{array} \end{array}$$

Et cela peut donner de « *belles lianes* » que je vous conseille d'aller voir dans la partie « *Récréation, énigmes* ».

Prenons de la hauteur : Certaines bases demandent plus de caractères que les simples chiffres traditionnels. Pour les bases strictement supérieures à dix, on a besoin de l'adjonction de nouveaux chiffres, généralement les lettres de A à Z (pour des bases $N \leqslant 36$...).

1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 11\lfloor\underline{1000} & 10\\ 11\lfloor\underline{90} & 2\\ 11\lfloor\underline{8} & 8\end{array}\right\} = \mathtt{82A}_{11}$$

1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 12\lfloor\underline{1000} & 4\\ 12\lfloor\underline{83} & 11\\ 12\lfloor\underline{6} & 6\end{array}\right\} = \mathtt{6B4}_{12}$$

1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 13\lfloor\underline{1000} & 12\\ 13\lfloor\underline{76} & 11\\ 13\lfloor\underline{5} & 5\end{array}\right\} = \mathtt{5BC}_{13}$$

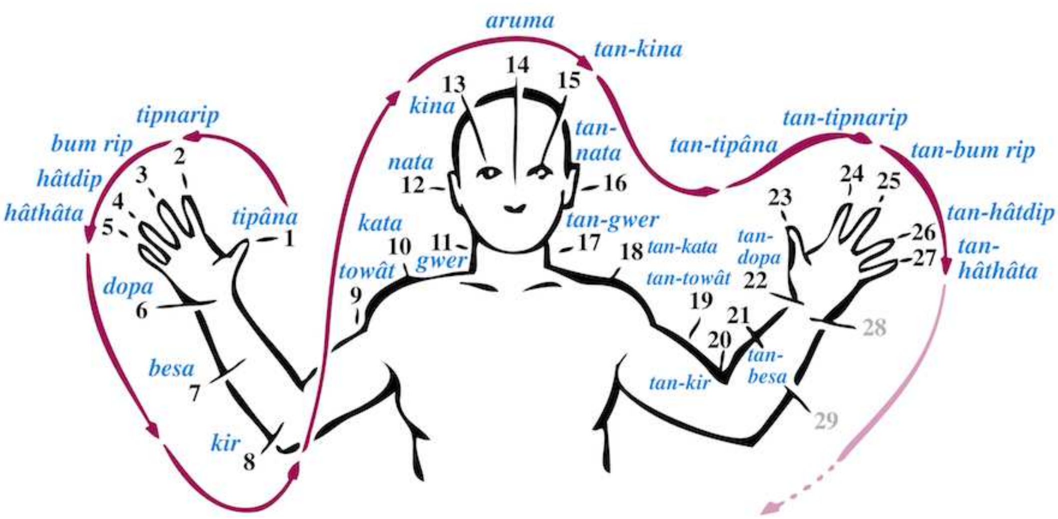
1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 14\lfloor\underline{1000} & 6\\ 14\lfloor\underline{71} & 1\\ 14\lfloor\underline{5} & 5\end{array}\right\} = \mathtt{516}_{14}$$

1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 15\lfloor\underline{1000} & 10\\ 15\lfloor\underline{66} & 6\\ 15\lfloor\underline{4} & 4\end{array}\right\} = \mathtt{46A}_{15}$$

1000_{10} :
$$\left.\begin{array}{r|l} 16\lfloor\underline{1000} & 8\\ 16\lfloor\underline{62} & 14\\ 16\lfloor\underline{3} & 3\end{array}\right\} = \mathtt{3E8}_{16}$$

Certaines bases sont couramment employées :

- La base seize (système hexadécimal), en informatique, facilitant les conversions en base deux en regroupant des chiffres binaires, 16 étant une puissance de 2 ;
- La base soixante-quatre, utilisée en informatique par l'encodage Base64 ; celui-ci permet de représenter des informations binaires en texte imprimable. Il est notamment utilisé pour transférer des données binaires sur un canal de communication pensé pour des données textuelles, tel que l'e-mail, le code HTML des pages web ou les feuilles de style CSS.
- Le peuple Oksapmin de la Nouvelle-Guinée dispose d'un système de numération à base 27. Lors de comptages, chaque nombre porte le nom d'une des 27 parties du corps, en commençant par le pouce de la main droite, allant jusqu'au nez, puis descendant vers la partie opposée du corps jusqu'au petit doigt de la main, comme indiqué dans le dessin.



PROPOSITION : Quelques propriétés intéressantes

- Zéro s'écrit 0 dans toutes les bases.
- De la même manière, le nombre un s'écrit 1 dans toutes les bases, puisque quelle que soit la base, $base^0$ égale 1.
- L'égalité « $121 = 11^2$ » est vraie dans toutes les bases naturelles strictement supérieures à 2.
- La base s'écrit 10 dans toutes les bases. Par exemple, $10_2 = 2$, $10_{16} = 16$, $10_{60} = 60$.

C. Système de numération binaire (ou de base 2)

Il existe différentes méthodes pour convertir des nombres décimaux en binaires (et inversement). Lorsque nous convertissons des nombres décimaux en binaires (et inversement), la base du nombre passe de 10 à 2 (et inversement). Il convient de noter que tous les nombres décimaux ont leurs nombres binaires équivalents. Le tableau suivant vous donne les équivalences des 11 premiers nombres entiers.

Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010
Décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Exemple

- **Convertir un nombre binaire en décimal**

Prenons un nombre au hasard, tel que 00111011 . Il s'étale sur 8 rangs, et chaque rang correspond à une puissance de deux.
Le premier rang (en partant de la droite) est le rang 0, le second est le 1, etc.
Pour convertir le tout en décimal, on procède de la manière suivante : on multiplie par 2^0 la valeur du rang 0, par 2^1 la valeur du rang 1, par 2^2 la valeur du rang 2, [...], par 2^{10} la valeur du rang 10, etc.
Après ça, il ne reste plus qu'à remplacer les puissances de 2 par leurs valeurs et de calculer la somme : (**en partant de la droite !**)

$$00111011_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^7 = 59_{10}$$

Avec l'illustration « *en lianes* », cela donne :

$$00111011_2$$

$$\begin{array}{rcr}
1 \cdot 2^0 & = & 1 \\
1 \cdot 2^1 & = & 2 \\
0 \cdot 2^2 & = & 0 \\
1 \cdot 2^3 & = & 8 \\
1 \cdot 2^4 & = & 16 \\
1 \cdot 2^5 & = & 32 \\
0 \cdot 2^6 & = & 0 \\
0 \cdot 2^7 & = & 0 \\
\hline
 & & 59
\end{array}$$

- **Convertir un nombre décimal en binaire**

42_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l}
2\lfloor 42 & 0 \\
2\lfloor 21 & 1 \\
2\lfloor 10 & 0 \\
2\lfloor 5 & 1 \\
2\lfloor 2 & 0 \\
2\lfloor 1 & 1
\end{array}\right\} = 101010_2$$

123_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l}
2\lfloor 123 & 1 \\
2\lfloor 61 & 1 \\
2\lfloor 30 & 0 \\
2\lfloor 15 & 1 \\
2\lfloor 7 & 1 \\
2\lfloor 3 & 1 \\
2\lfloor 1 & 1
\end{array}\right\} = 1111011_2$$

314_{10} :

$$\left.\begin{array}{r|l}
2\lfloor 314 & 0 \\
2\lfloor 157 & 1 \\
2\lfloor 78 & 0 \\
2\lfloor 39 & 1 \\
2\lfloor 19 & 1 \\
2\lfloor 9 & 1 \\
2\lfloor 4 & 0 \\
2\lfloor 2 & 0 \\
2\lfloor 1 & 1
\end{array}\right\} = 100111010_2$$

REMARQUE :

- Le nombre 2022 en binaire s'écrit 11111100110.
- Maintenant, vous pourrez dire que vous avez 1010 doigts

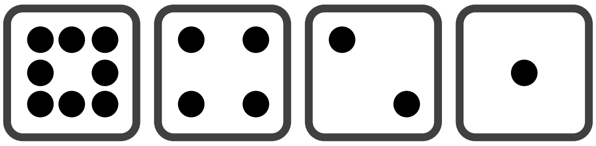
PÉDAGOGIE 2 Le binaire en « informatique débranchée »

L'informatique débranchée (en anglais « *Computer Science unplugged* ») consiste à transmettre quelques notions de base de façon ludique, et sans aucun recours à l'ordinateur : on utilise des cartes, des balles, du papier... L'objectif est de saisir le sens même de la pensée informatique avec les concepts fondamentaux qui la constitue :
- Qu'est-ce qu'un algorithme ?
- Qu'est-ce qui fait qu'un algorithme est meilleur qu'un autre ?
- Comment coder et transmettre une information ?

Le document libre de droit : « L'informatique sans ordinateur » décrit avec précision la philosophie de cette démarche et propose toute une série d'activités pour les élèves à partir de l'école primaire.
Je vous en propose une sur les nombres binaires.

Heuristique

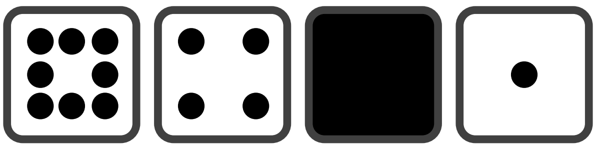
Pour cette activité, vous avez besoin de quatre cartes, comme montré ci-dessous, avec des points sur le recto mais rien sur le verso (idéalement colorié tout en noir).
Les cartes doivent être (affichées au tableau) dans l'ordre suivant :



Il faut remarquer que chaque carte a deux fois plus de points que la carte située à sa droite).

Nous pouvons utiliser ces cartes pour représenter des nombres : il faut en retourner certaines et additionner les points qui restent visibles. Pour afficher 6 (cartes 4 points et 2 points), puis 15 (cartes 8, 4, 2 et 1 points), puis 21 (16, 4 et 1), etc.

Lorsqu'une carte d'un nombre binaire n'est pas visible, elle est représentée par un 0. Lorsqu'elle est visible, elle est représentée par un 1. C'est le système de numération binaire (l'écriture des nombres dans ce système se fera uniquement avec les caractères 0 et 1, contrairement à l'écriture des nombres du système décimal qui utilise les chiffres de 0 à 9).



1 1 0 1

En additionnant les points sur les cartes, on obtient 13, qui correspond à son écriture dans le système décimal. Pour obtenir son écriture en binaire, on a juste à lire la liste de 0 et 1 dessous les cartes. Ici, on a donc 1011.
Pour rappel, on peut toujours vérifier le résultat grâce à l'opération suivante :

$$1011_2 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 13_{10}$$

Maintenant, il ne vous reste plus qu'à poser des questions du type *Quel nombre « 01001 » représente-t-il dans le système décimal ?*, *Comment écrirait-on 17 en binaire ?*, etc.

La conversion de 10001001001000111100000101010101001110101 en décimal

$$\begin{aligned}
&10001001001000111100000101010101001110101_2\\
1\cdot 2^{0} &= 1\\
0\cdot 2^{1} &= 0\\
1\cdot 2^{2} &= 4\\
0\cdot 2^{3} &= 0\\
1\cdot 2^{4} &= 16\\
1\cdot 2^{5} &= 32\\
1\cdot 2^{6} &= 64\\
0\cdot 2^{7} &= 0\\
0\cdot 2^{8} &= 0\\
1\cdot 2^{9} &= 512\\
0\cdot 2^{10} &= 0\\
1\cdot 2^{11} &= 2048\\
0\cdot 2^{12} &= 0\\
1\cdot 2^{13} &= 8192\\
0\cdot 2^{14} &= 0\\
1\cdot 2^{15} &= 32768\\
0\cdot 2^{16} &= 0\\
1\cdot 2^{17} &= 131072\\
0\cdot 2^{18} &= 0\\
0\cdot 2^{19} &= 0\\
0\cdot 2^{20} &= 0\\
0\cdot 2^{21} &= 0\\
0\cdot 2^{22} &= 0\\
1\cdot 2^{23} &= 8388608\\
1\cdot 2^{24} &= 16777216\\
1\cdot 2^{25} &= 33554432\\
1\cdot 2^{26} &= 67108864\\
0\cdot 2^{27} &= 0\\
0\cdot 2^{28} &= 0\\
0\cdot 2^{29} &= 0\\
1\cdot 2^{30} &= 1073741824\\
0\cdot 2^{31} &= 0\\
0\cdot 2^{32} &= 0\\
1\cdot 2^{33} &= 8589934592\\
0\cdot 2^{34} &= 0\\
0\cdot 2^{35} &= 0\\
1\cdot 2^{36} &= 68719476736\\
0\cdot 2^{37} &= 0\\
0\cdot 2^{38} &= 0\\
0\cdot 2^{39} &= 0\\
1\cdot 2^{40} &= 1099511627776\\
\hline
& 1178020784757
\end{aligned}$$

Je teste mes connaissances

À la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Définir un système de numération.
- Connaître les trois familles de système de numération.
- Citer et classer des exemples de systèmes de numération.
- Transcrire un nombre dans un système de numération.
- Connaître les propriétés de notre système de numération.
- Définir la base d'une numération en base.
- Donner au moins 5 exemples de systèmes décimaux.
- Passer de la base 10 à n'importe quelle base.
- Passer de n'importe quelle base à la base 10.
- Connaître les propriétés classiques sur les bases.

QCM d'auto-évaluation

coucou@coquillagesetpoincare.fr
pour toute(s) question(s) / remarque(s).

Voici un QCM d'auto-évaluation pour vous tester. Vous avez quelques questions reprenant l'ensemble des notions abordées dans ce cours.

1 Que veut dire «  » en notation égyptienne ?
(a) 1 000 (b) 100 000 (c) 1 000 000

2 Que veut dire « DIX » en chiffre romain ?
(a) 10 (b) 509 (c) 511

3 Que veut dire « 十七 » en chiffre choix ?
(a) 8 (b) 17 (c) 70

4 La notation usuelle pour écrire un nombre à trois chiffre
(a) $\overline{cdu}$ (b) $\underline{cdu}$ (c) $\overrightarrow{cdu}$

5 Le nombre 303 s'écrit en base 4
(a) 303_4 (b) 1233_4 (c) 10233_4

6 Le nombre 1234_5 (donc écrit en base 5) s'écrit en base 10
(a) 16 (b) 1234 (c) 194

7 Le nombre 165 s'écrit en binaire
(a) 10100101_2 (b) 10101111_2 (c) 10100100_2

8 Le nombre 10111_5 (donc écrit en base 2) s'écrit en base 10
(a) 42 (b) 23 (c) 10111

Différents types de numération

9 Avec tout le monde ! CORRIGÉ

Compléter le tableau suivant en considérant la numération maya comme une numération de base 20.

	12					
Égyptien	∩||	∩∩∩∩				
Romain	XII		CCXLVIII			
Chinois	十二			三千十九		
Maya	| :|| |				: || :	
Binaire						1111101011

Les bases

10 Pour démarrer CORRIGÉ

Les nombres $(40)_6$ et $(1105)_6$ sont écrits en base 6. Exprimer leur écriture en base dix.

11 En base 4 et 5 CORRIGÉ

1) Écrire en base 4 le nombre dont l'écriture décimale est 53.
2) Les nombres $(13)_4$ et $(3221)_4$ sont écrits en base 4. Exprimer leur écriture en base dix.
3) Quel est le plus grand nombre à 4 chiffres que l'on peut écrire en base 5 ?
Comment s'écrit son successeur immédiat en base 5 ?
En déduire l'écriture en base dix de ces 2 nombres.

12 CRPE 2003 - Guadeloupe CRPE CORRIGÉ

On cherche à déterminer un nombre à trois chiffres dont la somme est 16. Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités il augmente de 198. Déterminer ce nombre.

13 En base 12 CORRIGÉ

Les symboles que l'on utilise en base 12 sont les dix chiffres habituels, la lettre A pour désigner 10 unités et la lettre B pour désigner 11 unités.

1) Écrire en base 12 le nombre 1 570.
2) Les nombre $(A2)_{12}$ et $(B78A)_{12}$ sont écrits en base 12. Donner leur écriture en base 10.
3) Les nombre $(1A)_{12}$ et $(1B1B)_{12}$ sont écrits en base 12. Donner leur écriture en base 10.
4) Écrire en base 12 le nombre 1 712.

Vu au CRPE

14 Sujet 0 - CRPE 2022 CRPE

Soit M un nombre entier naturel inférieur à 100. On note u le chiffre des unités du nombre M et d son chiffre des dizaines.

Soit N un nombre entier naturel inférieur à 100, ayant le même chiffre d des dizaines que M et tel que son chiffre v des unités vérifie $u + v = 10$.

Par exemple, pour $M = 34$, alors $N = 36$ vérifie ces conditions.

Pour M et N vérifiant les conditions ci-dessus, on propose d'utiliser l'algorithme ci-dessous pour calculer le produit $M \times N$.

> **Algorithme de calcul**
> – On calcule le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.
> – On calcule le produit de u et de v.
> – On ajoute au produit de u et de v, 100 fois le produit de d et de l'entier suivant $d + 1$.

1) Vérifier en détaillant les calculs que cet algorithme fonctionne pour 34×36.

2) Démontrer que cet algorithme de calcul donne effectivement le résultat escompté pour tous les couples de nombres M et N vérifiant les conditions mentionnées en début d'exercice.
On pourra utiliser les égalités $M = 10d + u$ et $N = 10d + v$.

3) Montrer comment on peut utiliser cet algorithme de calcul, en détaillant les calculs, pour calculer mentalement $4,2 \times 4,8$.

15 Groupement 2 - CRPE 2018 CRPE

Pour calculer de tête le carré d'un nombre entier se terminant par 5 :

- on prend le nombre de dizaines et on le multiplie par l'entier qui suit ce nombre de dizaines, cela donne le nombre de centaines du résultat ;
- on écrit ensuite 25 à droite du nombre de centaines pour obtenir le résultat.

Par exemple, 105 est composé de 10 dizaines et 5 unités, son carré. s'obtient :

- étape 1 : en calculant $10 \times 11 = 110$, ce qui donne le nombre de centaines du résultat ;
- étape 2 : on écrit ensuite 25 à droite de 110 pour obtenir le résultat.

On a donc $105^2 = 11\,025$.

1) Montrer comment calculer mentalement 45^2.

2) Soit n un nombre entier se terminant par 5, n peut s'écrire : $10d + 5$ avec d le nombre de dizaines.
Établir la relation : $n^2 = 100d(d + 1) + 25$.

3) Grâce au résultat de la question 2), justifier la technique de calcul mental présentée dans l'énoncé.

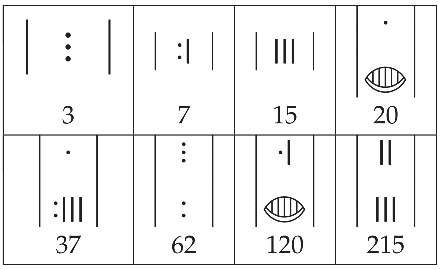
4) Comment, par extension de la technique de calcul mental présentée, calculer mentalement le carré de 3,5 ?

16 Groupement 2 - CRPE 2022 CRPE CORRIGÉ

En Amérique centrale, les Mayas utilisaient un système de numération comprenant trois signes.

Le point Le trait La coquille

Le signe « coquille » indique l'absence de quantité.
Quelques correspondances entre écriture Maya et écriture décimale sont données dans le tableau ci-dessous :

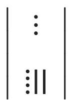
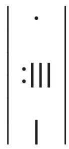


1) Donner la valeur du signe « point » et celle du signe « trait » dans l'écriture de 7 ?

2) Le système maya est un système vigésimal (il a pour base 20). Donner l'écriture maya du nombre 21.

3) Justifier l'écriture maya du nombre 37.

4) Donner l'écriture des deux nombres suivants dans notre système de numération.

a)  **b)** 

5) **a)** Donner l'écriture maya du nombre 25.
b) Donner l'écriture maya du nombre 101.
c) Le système de numération maya est qualifié, tout comme le système de numération que nous utilisons, de système positionnel. Expliquer pourquoi.

SOLUTIONS

Chapitre A1
Numération

Auto-évaluation diagnotisque

1 (b)

2 (c)

3 (c)

4 (a)

5 (b)

6 (c)

7 (a)

8 (c)

Auto-évaluation QCM

1 (b) 2 (b)
3 (b) 4 (a)
5 (c) 6 (c)
7 (a) 8 (b)

S'entraîner

9

	12	40	248	3 019	1 002	1 003
Égyptien	∩II	∩∩∩∩	𓍢𓍢 ∩∩∩∩ IIIIIIII	𓆼𓆼𓆼 ∩IIIIIIIII	𓆼II	𓆼III
Romain	XII	XL	CCXLVIII	MMMXIX	MII	MIII
Chinois	十二	四十	二百四十八	三千十九	千三	千二
Maya	:II	: 𝋠	:II :I	:I II ⁞III	: II :	: II :
Binaire	1100	101000	11111000	10111100101	1111101010	1111101011

10 $(40)_6 = 4 \times 6 + 0 = 24$

$(1105)_6 = 1 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 0 \times 6 + 5 = 257$

11 **1)** $53 = 4 \times 13 + 1$
$13 = 4 \times 3 + 1$
Finalement $53 = (311)_4$
2) $(13)_4 = 1 \times 4 + 3 = 7$
$(3221)_4 = 3 \times 4^3 + 2 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 233$
3) En base 5 les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4 donc le plus grand nombre à 4 chiffres est $(4444)_5$ et son successeur immédiat est $(10000)_5$.
$(10000)_5 = 1 \times 5^4 = 625$ donc $(4444)_5 = 625 - 1 = 624$.

12 Soit $\mathrm{N} = \overline{cdu}$ le nombre recherché.
- La somme de ses chiffres est 16 donc, $c + d + u = 16$. $\quad (1)$
- Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 :

$$\begin{aligned}\overline{dcu} = \overline{cdu} + 450 &\iff 100d + 10c + \cancel{u} = 100c + 10d + \cancel{u} + 450\\ &\iff 100d - 10d - 100c + 10c = 450\\ &\iff 90d - 90c = 450\\ &\iff 9d - 9c = 45\\ &\iff d - c = 5\\ &\iff d = c + 5 \quad (2)\end{aligned}$$

- Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités, il augmente de 198 :

$$\begin{aligned}\overline{udc} = \overline{cdu} + 198 &\iff 100u + \cancel{10d} + c = 100c + \cancel{10d} + u + 198\\ &\iff 100u - u - 100c + c = 198\\ &\iff 99u - 99c = 198\\ &\iff u - c = 2\\ &\iff u = c + 2 \quad (3)\end{aligned}$$

Dans (1), on remplace d et u obtenus en (2) et (3) :

$$\begin{aligned}c + (c+5) + (c+2) = 16 &\iff c + c + 5 + c + 2 = 16\\ &\iff 3c = 9\\ &\iff c = 3\end{aligned}$$

On a alors d'après (2) : $d = 3 + 5 = 8$ et d'après (3) : $u = 3 + 2 = 5$.
Le nombre recherché est $N = 385$.

13 **1)** $1\,570 = 12 \times 130 + \mathbf{10}$

$130 = 12 \times \mathbf{10} + \mathbf{10}$

Finalement $1\,570 = (AAA)_{12}$

2) $(A2)_{12} = 10 \times 12 + 2 = 122$

$(B78A)_{12} = 11 \times 12^3 + 7 \times 12^2 + 8 \times 12 + 10 = 20\,122$

3) $(1A)_{12} = 1 \times 12 + 10 = 22$

$(1B1B)_{12} = 1 \times 12^3 + 11 \times 12^2 + 1 \times 12 + 11 = 3\,335$

4) $1\,712 = 12 \times 142 + \mathbf{8}$

$142 = 12 \times \mathbf{11} + \mathbf{10}$

Finalement $1\,712 = (BA8)_{12}$

Vu au CRPE

16 **1)** On a $7 = (5 + 2 \times 1)$. Le point vaut 1 et le trait vaut 5.

2) $21 = (1) \times 20 + (1) \times 1$, le nombre s'écrit donc avec un point en haut et un point en bas : $\begin{array}{|c|}\cdot \\ \\ \cdot\end{array}$

3) $37 = (1) \times 20 + (3 \times 5 + 2) \times 1$, soit une vingtaine en haut et 17 unités (3 traits et 2 points) en bas.

4) **a)** $(3) \times 20 + (2 \times 5 + 4) \times 1 = 3 \times 20 + 14 \times 1 = 60 + 14 = 74$.

b) $(1) \times 20^2 + (3 \times 5 + 2) \times 20 + (5) \times 1 = 1 \times 400 + 17 \times 20 + 5 \times 1 = 400 + 340 + 5 = 745$.

5) **a)** $25 = (1) \times 20 + (5) \times 1$ s'écrit $\begin{array}{|c|}\cdot \\ \\ \mathbf{|}\end{array}$

b) $101 = (5) \times 20 + (1) \times 1$ s'écrit $\begin{array}{|c|}\mathbf{|} \\ \\ \cdot\end{array}$

c) Le système maya est un système positionnel, car la valeur de ses « chiffres » de 0 à 20 dépend de leur position dans leur écriture.