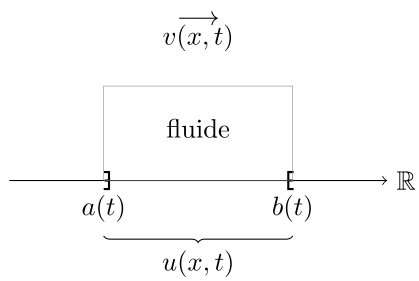
Equations aux dérivées partielles : Equation de transport

Mohamed NASSIRI

Introduction :

Donnons un exemple introductif pour mieux comprendre l'origine de l'équation de transport.
On considère un fluide en mouvement le long de l'axe des réels. On note $u(x,t)$ son "profil densité" et $v(x,t)$ son "profil vitesse". On travaille dans un domaine $]a(t);b(t)[$, d'extrémités régulières, dans son mouvement.



S'il n'y a pas de création de matière dans l'intervalle, on a

$$M(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} u(x,t)\mathrm{d}x = \text{constante}$$

Ainsi, $\forall t > 0$, on a $M'(t) = 0$. Mais d'autre part :

$$M'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mathrm{d}x + b'(t)u(b(t),t) - a'(t)u(a(t),t)$$

Or comme le domaine est en mouvement avec le fluide, on a une relation entre $a'(t), b'(t)$ et $v(x,t)$ qui est : $a'(t) = v(a(t),t)$ et $b'(t) = v(b(t),t)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
0 = M'(t) &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mathrm{d}x + v(b(t),t)u(b(t),t) - v(a(t),t)u(a(t),t) \\
&= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mathrm{d}x + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)v(x,t))\mathrm{d}x \\
&= \int_{a(t)}^{b(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)v(x,t))\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Cette relation étant vérifiée pour tout intervalle $]a(t);b(t)[\subset \mathbb{R}$, on a donc

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x,t)v(x,t)) = 0$$

Dans le cas d'une vitesse constante $v(x,t) = c$, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0.$$

Théorème : L'équation de transport (à vitesse constante c) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a pour solution $u(x,t) = u_0(x - ct)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour la démonstration, on va introduire la notion de courbe caratéristique. L'idée est un peu étrange mais efficace comme on va le voir : on cherche les domaines où u est constante.

Considérons la courbe paramétrique pour $\xi \in \mathbb{R}$ donné :

$$C_\xi = \{(x(t),t),\ t \in \mathbb{R} \mid x'(t) = c,\ x(0) = \xi\}$$

C_ξ est dite courbe caratéristique de pied ξ. Posons $f(t) = u(x(t),t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On a alors :

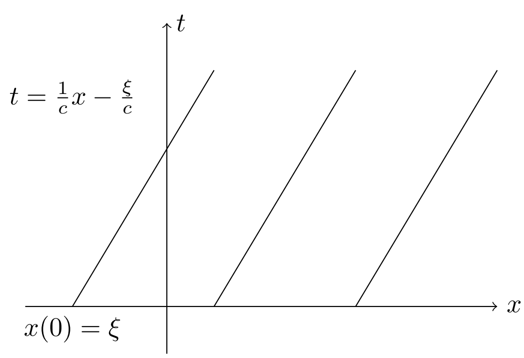
$$f'(t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + \underbrace{x'(t)}_{=c}\frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t) = \frac{\partial}{\partial t}u(x(t),t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x(t),t) = 0$$

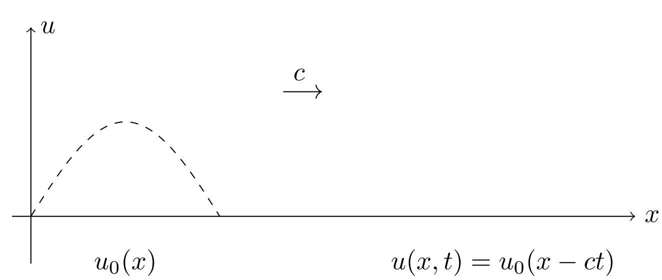
Par conséquent, f est constante et donc elle est égale, en particulier, à sa valeur en 0. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) = f(0) \quad &\Leftrightarrow \quad u(x(t),t) = u(x(0),0) \\ &\Leftrightarrow \quad u(x(t),t) = u(\xi,0) \\ &\Leftrightarrow \quad u(x(t),t) = u_0(\xi) \end{aligned}$$

Par suite, pour $(x,t) \in C_\xi$, $u(x,t) = u_0(\xi)$ et comme $x'(t) = c$, on a $x(t) = ct + \xi$ et donc $\xi = x(t) - ct$.
Par conséquent, $u(x,t) = u_0(x - ct)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\square$

Illustrons à présent ces fameuses courbes caractéristiques et les solutions. Deuxième chose étrange avec les courbes caractéristiques : on répésente t en fonction de x alors que l'on a directement une formule de x en fonction de t (c'est $x(t) = ct + \xi$).



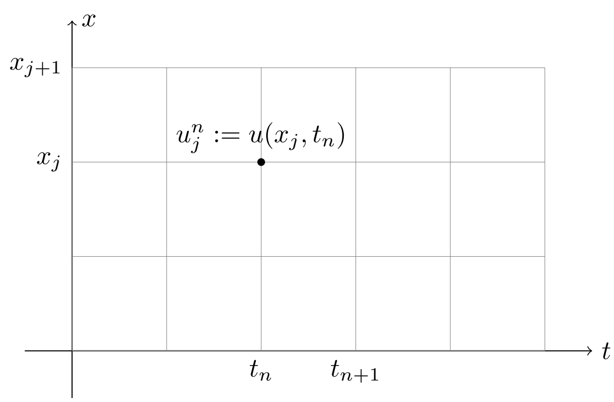


Graphiquement, on voit donc bien que, à vitesse constante, le flux se déplace de façon uniforme en se translatant à vitesse c sans modifier l'allure de la condition initiale.

<u>Illustration:</u>

Pour la partie algorithmique, c'est une autre paire de manches. On va devoir introduire la notion de <u>discrétisation</u> et de <u>schéma aux différences finies</u>.

<u>Idée n°1 :</u> On va discrétiser en espace et en temps. On se donne donc un pas d'espace Δx et pas de temps Δt.
On pose $x_j = j\Delta x$ pour $j \in \mathbb{Z}$ et $t_n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Le but de jeu sera de trouver une approximation de $u(x_j, t_n)$.



<u>Idée n°2 :</u> On remplace les dérivées partielles par des taux d'accroissement. Par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \text{ ou } \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \text{ ou } \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Pour $n = 0$, on fait $u_j^0 = u_0(x_j)$. On rappelle que l'on connait $u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Le choix d'un certain "type de taux d'accroissement" nous donnera plusieurs schémas :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{Euler explicite}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \quad \text{Euler implicite}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \text{décentré à droite}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad \text{décentré à gauche}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{centré}$$

On se propose d'illuster la méthode du schéma "Euler explicite décentré à gauche". On a donc :

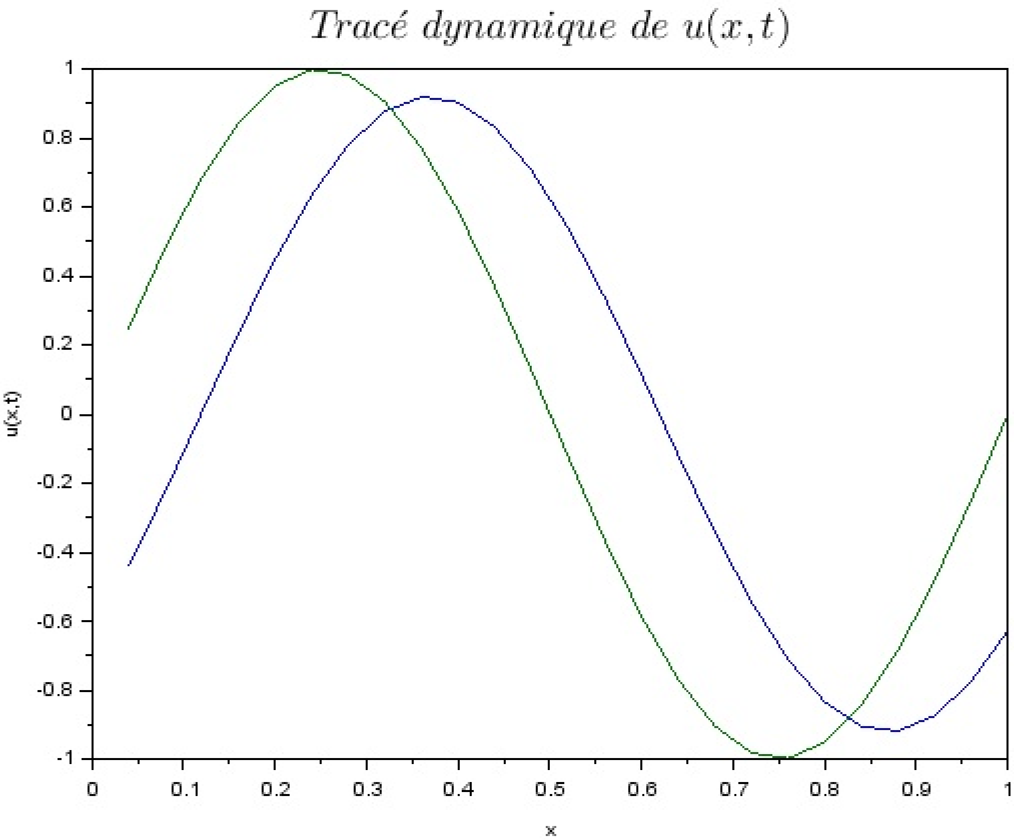
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_j^{n+1} = \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) u_j^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x} u_{j-1}^n$$

Algorithme:

```
clear; close;
da=gda(); da.auto_clear = 'on';

D=x_mdialog('Choix de la discrétisation',['En espace';'En temps'],['25';'100'])
J=evstr(D(1)) //pour le pas en espace
N=evstr(D(2)) // pour le pas en temps

for n=1:N
    h=1/J // pas en espace (on travaille sur [0,1])
    x=[1:J]*h; // discrétisation en espace
    u0=sin(2*%pi*x) // choix de u0(x) pour tout x
    V=0.5; // choix d'une vitesse arbitraire valant 0.5
    T=1; d=T/N // pas en temps
    cfl=(V*d)/h;
    u=u0;
    for n=1:N
        u=(1-cfl)*u+cfl*u([J,1:J-1]) //Euler explicite décentré à gauche
        plot(x,u,x,u0);
        xtitle('$\huge Tracé\ dynamique\ de\ u(x,t)$', 'x', 'u(x,t)');
    end
end;
```



Remarques :

- Comme l'indique le titre du graphe, il s'agit d'un tracé dynamique. Il ne s'agit ici que de la représentation à un instant. L'algorithme permet de faire une animation en fonction du temps.
- On peut également s'intéresser à l'équation de transport avec une vitesse non constante et constater que l'on peut avoir quelque chose de très différent.

Théorème : L'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \frac{x}{1+t^2}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x > 0 \end{cases}$$

a pour solution $u(x,t) = u_0(xe^{-\arctan t})$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Considérons la courbe paramétrique pour $\xi > 0$ donné :

$$C_\xi = \left\{(x(t),t),\ t > 0 \mid x'(t) = \frac{x(t)}{1+t^2},\ x(0) = \xi\right\}$$

et posons $f(t) = u(x(t), t)$ pour $t > 0$. Comme précédemment, on a :

$$f'(t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(t), t) + \underbrace{x'(t)}_{= \frac{x(t)}{1+t^2}} \frac{\partial}{\partial x} u(x(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x(t), t) + = \frac{x(t)}{1+t^2} \frac{\partial}{\partial x} u(x(t), t) = 0$$

Par conséquent, f est constante et donc elle est égale, en particulier, à sa valeur en 0. Ainsi, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} f(t) = f(0) \quad &\Leftrightarrow \quad u(x(t), t) = u(x(0), 0) \\ &\Leftrightarrow \quad u(x(t), t) = u(\xi, 0) \\ &\Leftrightarrow \quad u(x(t), t) = u_0(\xi) \end{aligned}$$

Par suite, pour $(x, t) \in C_\xi$, $u(x, t) = u_0(\xi)$ et comme $x'(t) = \frac{x(t)}{1+t^2}$, on a $x(t) = \xi e^{\text{arctan} t}$ et donc $\xi = x(t) e^{-\text{arctan} t}$.
Par conséquent, $u(x, t) = u_0(x e^{-\text{arctan} t})$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. $\square$

Cet exemple nous montre que les courbes caractéristiques ne sont pas toujours des droites (donc attention !). N'oublions pas que l'on réprésente t en fonction de x et non x en fonction de t. Ici, ce sont donc les tracés de $t = x \mapsto \tan\left(\ln\left(\frac{x}{\xi}\right)\right)$ à ξ fixé.