BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2022

MATHÉMATIQUES

Epréuve de Spécialité - Sujet 1

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : **16**

Ce corrigé comporte sept pages numérotées de 1/10 à 10/10

Le candidat devait traiter **3 exercices parmi les 4** communs à tous les candidats.

Lusage de la calculatrice avec mode examen actif était autorisé.
Lusage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », était autorisé.

Le candidat était invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, quil aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements étaient prises en compte dans lappréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, étaient valorisées.

Aménagements 2022 :
• Chaque exercice était noté sur 7 points;
• La note finale est ramenée sur 20;
• Afin déclairer le candidat, le sujet indique au début de chaque exercice les principaux domaines abordés..

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 - 7 POINTS **THÈMES : FONCTION EXPONENTIELLE, SUITES.**

Dans le cadre dun essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement dune maladie. Lobjectif decet exercice est détudier, pour ces deux protocoles, lévolution de la quantité de médicament présente dans le sang dun patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient. On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur l' intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f'. Ainsi, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a :

$$f'(t) = 3 \times e^{-0,5t+1} + 3t \times (-0,5)e^{-0,5t+1} = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.
En remarquant que le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $-0,5t + 1$, on dresse le tableau de variations de f :

x	0		2		10
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f'	0	↗	6	↘	≃0.55

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?
Selon cette modélisation, la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale au bout de 2 heures. Cette quantité maximale sera de 6 mg.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$, notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
La fonction f est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$ et $5 \in [f(0) ; f(2)]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut dire que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α sur $[0 ; 2]$.
À l'aide de la calculatrice graphique (ou d'un algorithme de balayage), on trouve $\alpha \simeq 1,02$

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.
D'après les questions précédentes, on en déduit que la durée defficacité du médicament dans le cas de ce protocole est $\beta - \alpha = 3,46 - 1,02 = 2,44$ heures, soit 2 heures et 26 minutes.

Partie B : Étude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30% par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.
Selon cette modélisation, on a :

$$u_1 = \left(1 - \frac{30}{100}\right) \times u_0 + 1,8 = 0,7 \times 2 + 1,8 = 3,2$$

La quantité u_1 de médicament présente dans le sang du patient immédiatement après linjection de la première heure est de 3,2 mg

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
Puisque la quantité de médicament dans le sang diminue de 30 %, on multiplie par le coefficient $\left(1 - \frac{30}{100}\right) = 0,7$, et, il faut réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg. Donc, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.
Initialisation :
On a $u_0 = 2$, $u_1 = 3,2$.
Donc, $u_0 \leqslant u_1 < 6$. L'initialisation est donc vérifiée.

Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$.
Par suite,

$$\begin{aligned} u_k \leqslant u_{k+1} < 6 &\iff 0,7 \times u_k \leqslant 0,7 \times u_{k+1} < 0,7 \times 6 \\ &\iff 0,7 \times u_k \leqslant 0,7 \times u_{k+1} < 4,2 \\ &\iff 0,7 + 1,8 \times u_k \leqslant 0,7 + 1,8 \times u_{k+1} < 0,7 \times 4,2 + 1,8 \\ &\iff u_{k+1} \leqslant u_{k+2} < 6 \end{aligned}$$

On a donc montré, par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
Comme la suite (u_n) est croissante (pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée (pour tout entier naturel n, $u_n < 6$), alors d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge. vers une limite fixe ℓ.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
Comme la suite (u_n) converge. vers une limite fixe ℓ, d'après le théorème du point fixe, on a

$$\ell = 0,7\ell + 1,8$$

Donc $\ell = 6$.
Dans le contexte de lexercice, cela signifie que la quantité de médicament présente dans le sang du patient tend vers 6 mg.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.
Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 6 - u_{n+1} = 6 - (0.7u_n + 1.8) = 4.2 - 0.7u_n = 0.7(6 - u_n) = 0.7v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique, de raison $q = 0,7$ et de premier terme $v_0 = 6 - 2 = 4$.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = 4 \times 0,7^n$.
Comme $v_n = 6 - u_n$, on a donc $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0,7^n$.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à $5,5$mg.
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.
On cherche n tel que $u_n \geqslant 5,5$. D'où,

$$\begin{aligned} u_n \geqslant 5,5 \iff 6 - 4 \times 0,7^n \geqslant 5,5 &\iff 0,7^n \leqslant 0,125 \\ &\iff n\ln(0,7) \leqslant \ln(0,125) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,125)}{\ln(0,7)} \simeq 5,83 \end{aligned}$$

Le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole est de 7 (puisque que la première injection se fait au rang 0).

EXERCICE 2 - 7 POINTS **THÈMES : GÉOMÉTRIE DANS LESPACE**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1;1;3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

b. Montrer que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

On résout, en t, le système suivant :

$$\begin{cases} x_B & =1+2t \\ y_B & =2-t \\ z_B & =2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} -1 & =1+2t \\ 3 & =2-t \\ 0 & =2+2t \end{cases} \iff \begin{cases} -t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$$

On trouve la même valeur de t pour les trois équations. Donc le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}$.

On calcule d'abord les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-(-1)\\3-1\\0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=0\times2+2\times(-1)+(-3)\times2=-8$$

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x-y+2z-3=0$.

Comme $\mathscr{D}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$, le vecteur $\vec{u}$ (qui est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$) est normal au plan. On a donc

$$2x-y+2z+d=0$$

avec d à déterminer.

Or, $A\in\mathscr{P}$, d'où

$$2x_A-y_A+2z_A+d=0 \iff 2\times(-1)-1+2\times3+d=0 \iff d=3$$

Le plan $\mathscr{P}$ admet donc pour équation cartésienne $2x-y+2z-3=0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$.

Trouver l'intersection revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 2x-y+2z-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2+2t \\ 2(1+2t)-(2-t)+2(2+2t)-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{7}{9} \\ y=\frac{19}{9} \\ z=\frac{16}{9} \\ t=-\frac{1}{9} \end{cases}$$

Ainsi, $H\left(\frac{7}{9};\frac{19}{9};\frac{16}{9}\right)$ (projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$).

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{53}}{3} \end{aligned}$$

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.
On rappelle que le point $B(-1;3;0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
$B \in \mathscr{D}$ (droite orthogonale au plan $\mathscr{P}$, $H \in \mathscr{D}$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ donc il existe k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
On a $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$. Par suite,

$$\overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u} \iff \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = k\|\vec{u}\|^2 \iff k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$$

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.
$k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \dfrac{-8}{(\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2})^2} = \dfrac{-8}{9}$.

$\overrightarrow{HB} = k\vec{u} \iff \begin{pmatrix} -1 - x_H \\ 3 - y_H \\ 0 - z_H \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff H\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$. Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d' une base et h la hauteur relative à cette base.
En utilisant la formule du volume du tétraèdre, et en remarquant que BH est la hauteur de $ABCH$, on a

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ACH} \times BH \iff \mathscr{A}_{ACH} = \frac{3\mathscr{V}_{ABCH}}{BH} = \frac{3 \times \frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = 1$$

avec

$$\begin{aligned} BH &= \sqrt{(x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 + (z_H - z_B)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{9} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{19}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 0\right)^2} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Remarque : Pour calculer la longueur BH, on pouvait utiliser la propriété suivante :

Soient $\mathscr{P}$ le plan déquation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point. Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de $\mathscr{P}$, alors :

$$\mathrm{d}(A, \mathscr{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

EXERCICE 3 - 7 POINTS **THÈMES : PROBABILITÉS**

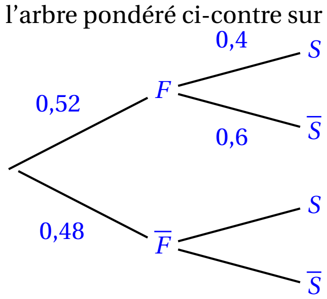
Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel. Ce stage a été suivi par 25% des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52% des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40% ont suivi le stage. On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :
- F : « le salarié interrogé est une femme",
- S : «e salarié interrogé a suivi le stage»".

$\bar{F}$ et $\bar{S}$ désignent respectivement les événements contraires des événements F et S.

a. Donner la probabilité de l'événement S.
$p(S) = 0,25$ car 25 % des salariés ont suivi le stage.

b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.



c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à 0,208.
La personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage correspond à l'événement $F \cap S$. D'où

$$p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,52 \times 0,4 = 0,208$$

d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
On cherche donc $p_S(F)$. Donc

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,208}{0,25} = 0,832$$

e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10% ont suivi le stage. Justifier l'affirmation du directeur.
On cherche ici $p_{\overline{F}}(S)$. Or,
$p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p(\overline{F} \cap S)}{p(\overline{F})}$, et
$p(S) = p(\overline{F} \cap S) + p(F \cap S)$.
D'où, $p(\overline{F} \cap S) = p(S) - p(F \cap S) = 0,25 - 0,208 = 0,042$.
Donc $p_{\overline{F}}(S) = \dfrac{p(\overline{F} \cap S)}{p(\overline{F})} = \dfrac{0,042}{0,48} = 0,088$.
Le directeur a donc bien raison, parmi les hommes salariés de lentreprise, moins de 10% ont suivi le stage (environ 8,8%).

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.
On répète $n = 20$ fois de manière indépendante une expérience n'ayant que deux issues dont la probabilité de succès est $p = p(S) = 0,25$
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès parmi ces 20 expériences alors X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,25$

b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
On cherche donc

$$p(X = 5) = \binom{20}{5} 0,25^5 (1 - 0,25)^{20-5} \approx 0,202$$

c. Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction binomiale $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$ créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k):
        P=0
        for i in range(0,k+1):
            P=P+binomiale(i,20,0.25)
        return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
La valeur renvoyée par ce programme lorsque lon saisit proba(5) dans la console Python est $0,617$.
L'algorithme renvoie donc la probabilité quau plus 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.
On cherche donc

$$p(X \geqslant 6) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - 0,617 \ \approx 0,383$$

3. Cette question est indépendante des questions 1 et 2.
Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% d'augmentation pour les salariés n′ ayant pas suivi le stage. Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?
Ce stage a été suivi par 25% des salariés, et donc n'a pas été suivi par 75% des salariés. Commme lentreprise a décidé daugmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% daugmentation pour les salariés nayant pas suivi le stage, le pourcentage moyen daugmentation des salaires de cette entreprise est

$$\left(\left(1+\frac{5}{100}\right)\times\frac{25}{100}+\left(1+\frac{2}{100}\right)\times\frac{75}{100}-1\right)\times 100 = 2,75$$

EXERCICE 4 - 7 POINTS **THÈMES : FONCTIONS NUMÉRIQUES**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification nest demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou labsence de réponse à une question ne rapporte ni nenlève de point.
Les six questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :
Réponse c. $y = -2$**.**

La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -2$ car en déterminant la limite de f en $+\infty$, on a :

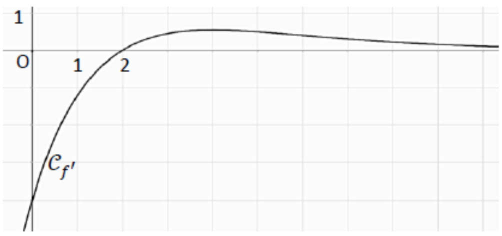
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :
Réponse d. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$**.**

La primitive F de f (la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$ et qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + \dfrac{1}{2}$ car

- $F'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x \times e^{x^2} = xe^{x^2}$, et
- $F(0) = \dfrac{1}{2}e^{0^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

3. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



On peut affirmer que la fonction f est :
Réponse c. convexe sur $[0;2]$**.**

D'après la représentation graphique $\mathscr{C}_{f'}$ de la fonction dérivée f' de f, on en déduit que f' est croissante sur l'intervalle $[0;2]$, donc $f''(x) \geqslant 0$ le même intervalle, et donc f est convexe sur $[0;2]$.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:
Réponse a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$**.**

Toutes les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :
Réponse d. 0

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à 0 car :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, et
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2+1) = +\infty$,

d'où le résultat, par croissances comparées.

6. L'équation $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

Réponse c. une seule solution.

L'équation $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution.
En effet, en effectuant le changement de variable $X = e^{x}$, on obtient l'équation polynômiale suivante :

$$X^2 + X - 12 = 0$$

de discrimant positif ($\Delta = 7$) et de racines $X_1 = -4$ et $X_2 = 3$.
Par conséquent, on obtient donc la solution $x = \ln 3$ pour l'équation $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$.