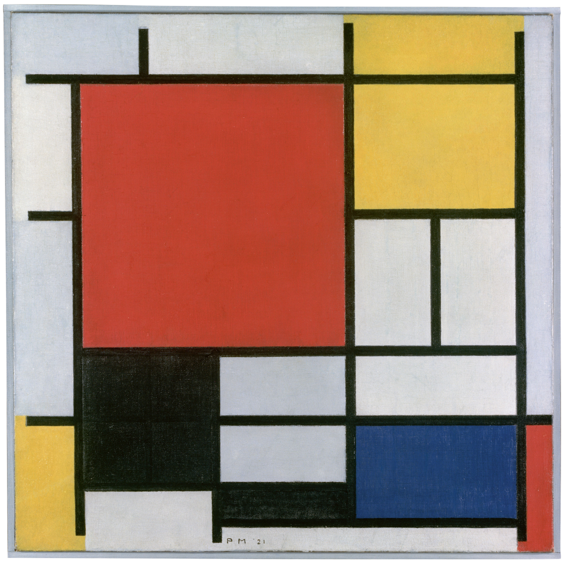


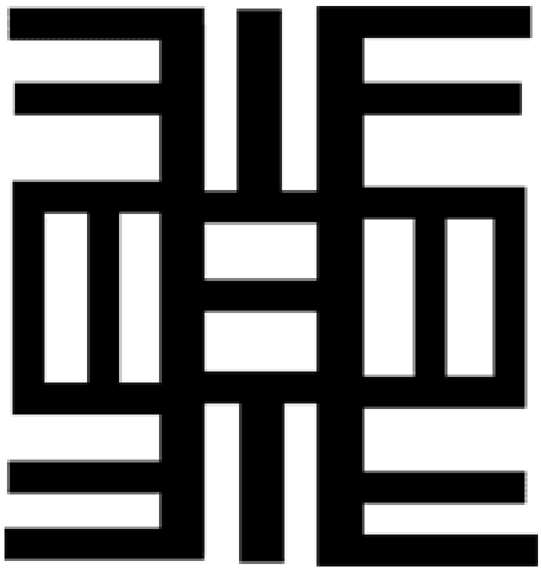
Composition en rouge, jaune, bleu et noir, 1921,
huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm, Gemeentemuseum.

Colorier à la manière de Mondrian
(Notes complémentaires)

« Éduquer le regard : croisements entre art et mathématiques »
Journées académiques de l'IREM de Lille - 2022

M. Mohamed Nassiri

2022



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

1 Un peu de théorie

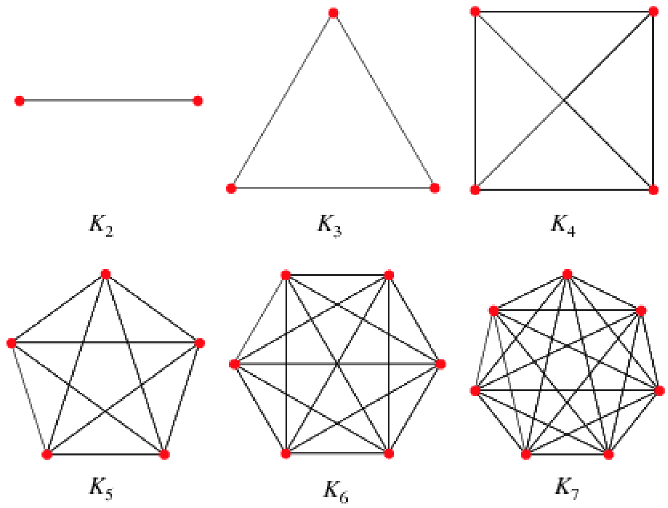
1.1 Premières définitions et exemples

Définitions
Un graphe simple G est un couple formé de deux ensembles :
- un ensemble $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et
- un ensemble $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$, partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des parties à deux éléments de X, dont les éléments sont appelés arêtes. On notera $G = (X; A)$.
Lorsque $a = \{x; y\} \in A$, on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y, ou que a joint x et y, ou encore que a passe par x et y. Les sommets x et y sont dits adjacents dans G.
Le degré de x, noté $d(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x ; c'est–à-dire contenant x.

Exemples :
1. Le graphe d'un tournoi $T = (X; A)$ où :
- X est l'ensemble des participants au tournoi
- A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

2. La carte routière de la France $F = (X; A)$ où
- X est l'ensemble des villes de la France.
- $A = \{x; y\}$ il y a au moins une route directe reliant les villes x et y :

3. Le graphe complet d'ordre n, K_n ; où $X = \{1; 2; ...; n\}$ et $A = \mathcal{P}_2(X)$



Un graphe G est **connexe** s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G.
Un **cycle eulérien** (respectivement une chaîne eulérienne) dans un graphe G est un cycle (respectivement une chaîne) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

Proposition
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

1.2 Coloriage des sommets d'un graphe

Définitions
Soit $G = (X; A)$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble S de X est stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
Le cardinal de la plus grande partie stable est le nombre de stabilité de G ; on le note $\alpha(G)$.
La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter tous les sommets de ce graphe d'une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
Une coloration avec k couleurs (ou k-coloration) est donc une partition de l'ensemble des sommets en k parties stables. Le nombre chromatique, noté $\gamma(G)$; du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de X en k sous-ensembles stables.

Proposition
Soit $G = (X; A)$ un graphe simple d'ordre n. On a l'encadrement suivant :

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leqslant \gamma(G) \leqslant r + 1$$

où r est le degré maximal des sommets du graphe G.

Démonstration
On renvoie le lecteur à "Eric Sigward, « *Introduction à la théorie des graphes* », 2012". □

Proposition
Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre n, alors :

$$\gamma(G) + \alpha(G) \leqslant n + 1$$

Démonstration
Considérons S, une partie stable de X de cardinal $\alpha(G)$.
Une coloration possible des sommets consiste à colorier les sommets de S d'une même couleur et les $n - \alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que :

$$\gamma(G) \leqslant 1 + (n - \alpha(G))$$

□

2 D'autres problèmes avec le "regard" de la théorie des graphes

2.1 Le problème du voyageur de commerce (*Traveling-Salesman Problem – TSP*)

Le problème du voyageur de commerce est un problème très connu en mathématiques car d'apparence simple il s'avère qu'il est impossible de calculer la meilleure solution à partir d'un certain nombre de villes dans tous les cas. L'idée est qu'une personne doit parcourir un certain nombre de villes tout en minimisant la distance totale parcourue.
Il est possible de « s'amuser un peu » avec des villes françaises sur le site

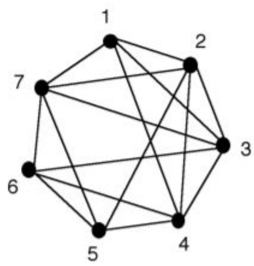
https://www.datavis.fr/index.php?page=salesman-problem

Situation de départ générée aléatoirement avec le territoire des Alpes-Maritimes (163 communes)

2.2 Fini les problèmes d'emploi du temps !

> « *Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée miminale ?* »

Solution :
Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs :



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une $k-$coloration de G, avec $k = \gamma(G)$.
G possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc $\gamma(G) \geqslant 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1, 6\} \qquad S_2 = \{2\} \qquad S_3 = \{3, 5\} \qquad S_4 = \{4, 7\}$$

d'où $\gamma(G) \leqslant 4$, et finalement $\gamma(G) = 4$.
Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :
- $1^{\text{ère}}$ période : épreuves des cours 1 et 6
- 2^{e} période, épreuve du cours 2
- 3^{e} période, épreuves des cours 3 et 5
- 4^{e} période, épreuves des cours 4 et 7.

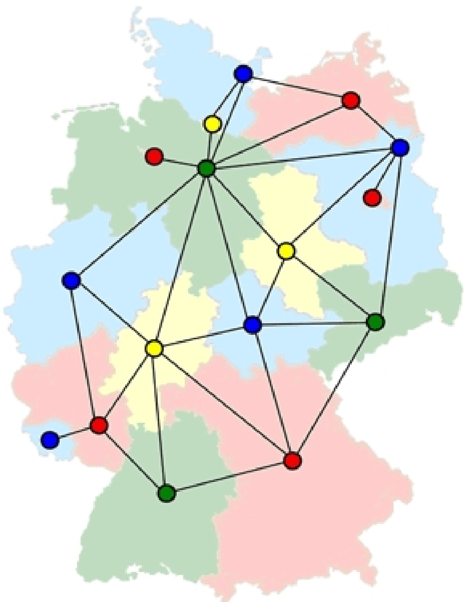
2.3 Colorier une carte

Durant les études, essentiellement pendant un cours de géographie, nous avons sûrement tous coloré une carte géographique. Nous sommes confrontés au problème suivant : nous devons colorer cette carte de telle manière à ce que deux provinces limitrophes aient des couleurs différentes. Étant étudiant, nous n'avons que peu de crayons de couleurs dans notre trousse. Dès lors, nous nous sommes demandés : avons-nous suffisamment de couleurs différentes pour colorer la carte ? Est-ce que nous devrons emprunter un crayon à notre voisin ? Nous pouvons, à la main, montrer qu'il faut au minimum 4 couleurs pour une carte (*Théorème des quatre couleurs*).

Définition

Colorer un graphe signifie assigner une couleur à chaque sommet de telle sorte que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes.

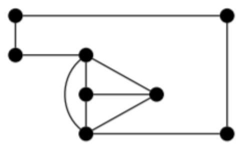
Le but dans la coloration de graphe est de trouver le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer le graphe. Ce nombre s'appelle *nombre chromatique*.
Si le graphe peut être coloré avec k couleurs, nous dirons qu'il est *k-coloriable* ou qu'il possède une *k-coloration*.



Applications

Nous avons vu que la coloration d'un graphe est utile dans la coloration des cartes géographiques mais ce n'est pas là son unique domaine d'application. En effet, la coloration de graphe a de nombreuses utilités :
– les problèmes d'incompatiblité : le stockage de produits chimiques qui peuvent exploser s'ils entrent en contact, désignation d'un endroit pour des personnes ou des animaux en tenant compte des relations,
– l'allocation de fréquences, par exemple dans un réseau de téléphone mobile GSM,
– la confection d'horaires,

	Math	Latin	Grec	Sciences Sociales
Classe A	X			X
Classe B	X	X		
Classe C		X	X	
Classe D		X		X



– la résolution du Sudoku,
– ...

3 Un peu de culture générale...

3.1 Théorie du « Petit Monde » et les six degrés de séparation

L'expérience de Stanley Milgram en 1967 a mis en lumière qu'il fallait en moyenne 6 liens de connaissance pour relier deux américains qui ne se connaissent pas : c'est la **théorie des six degrés de séparation**. Des études sur les réseaux sociaux ont confirmé cette théorie et ont montré que les réseaux sociaux ont encore diminué ce degré de séparation moyen entre deux individus dans le monde.

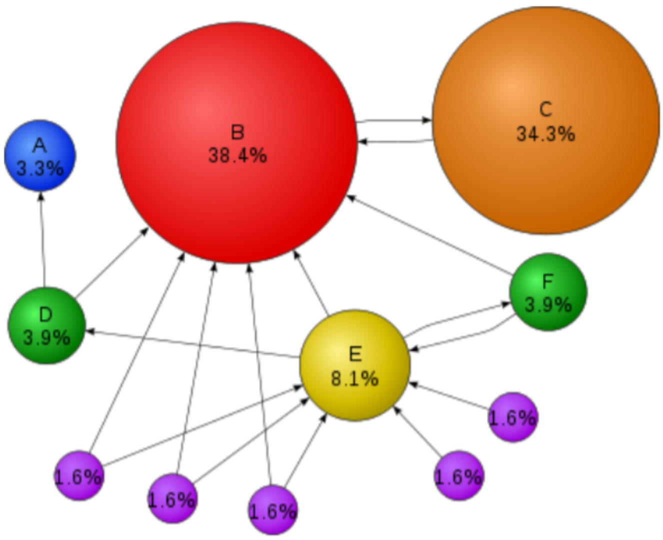
3.2 Nombre de Bacon

The Bacon number (le « nombre de Bacon ») d'un acteur est le chiffre caractérisé par le degré de séparation qu'il a avec Kevin Bacon. C'est une application du nombre d'Erdős au secteur du cinéma. Plus le chiffre est grand, plus l'acteur en question est éloigné de Bacon. Le calcul du Bacon number pour un acteur A est basé sur l'algorithme appelé « problèmes de cheminement » (shortest path problem).

D'après le site The Oracle of Bacon, une base de données permettant en un clic de relier un acteur à Kevin Bacon, le plus grand nombre de Bacon est 10.

3.3 Moteur de recherche Google : PageRank

Le Web peut être représenté par un énorme graphe dans lequel chaque page est un sommet et chaque lien entre deux pages est une arête. Un des premiers principes du moteur de recherche Google est d'affecter à chaque page web une note proportionnelle au nombre de passages sur cette page d'un utilisateur explorant le graphe du Web en cliquant au hasard sur un des liens figurant sur chaque page.
Cette note est appelée *PageRank*. Par conséquent, la PageRank d'une page web augmente en fonction de la somme des PageRanks des pages référant cette page.
Langville et Meyer (dans *Google page rank and beyond.*) expliquent comment la théorie des graphes et celle des chaînes de Markov (probabilité) permettent de gérer le moteur de recherche Google.



Références

- Eglantine Camby, « *Différents problèmes en théorie des graphes*, 2012, ULB.
- Eric Sigward, « *Introduction à la théorie des graphes* », 2012
- Amy Langville et Carl Meyer, « *Google page rank and beyond* », Princeton Univ Pr, 2006.
- Marc Timme, Frank van Bussel, Denny Fliegner, and Sebastian Stolzenberg, « *Counting Complex Disordered States by Effiecient Pattern Matching : Chromatic Polynomials and Potts Partition Functions* », New Journal of Physics 11 (2009), 023001, February 4th, 2009