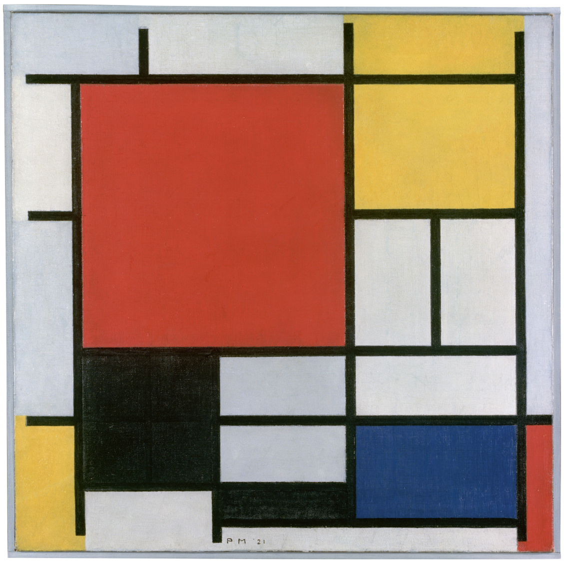


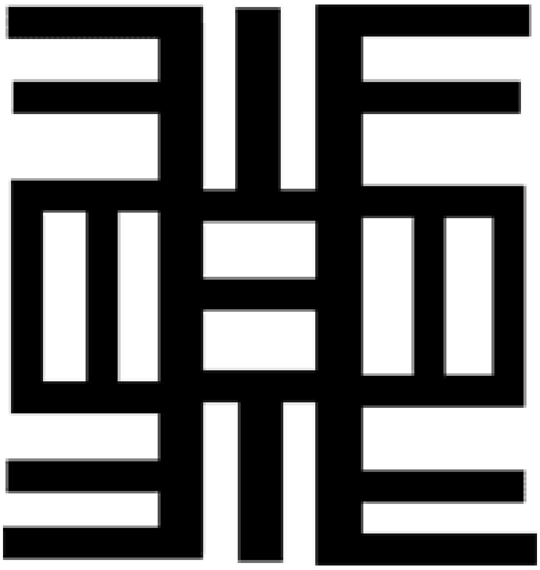
Composition en rouge, jaune, bleu et noir, 1921,
huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm, Gemeentemuseum.

Colorier à la manière de Mondrian

« Éduquer le regard : croisements entre art et mathématiques »
Journées académiques de l'IREM de Lille - 2022

M. Mohamed Nassiri

2021-2022



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

Table des matières

1 Présentation de l'IREM de Lille et du Groupe Informatique **3**

2 Regard & Informatique ? **4**
2.1 Qu'est-ce que l'informatique ? 4
2.2 La théorie des graphes 4

3 Colorier à la manière de Mondrian **5**
3.1 Piet Mondrian 5
3.2 Le théorème des quatre couleurs 5
3.3 Activité pratique : Colorier à la manière de Mondrian 5

4 Changer son regard sur le problème : Problème des sept ponts de Königsberg **6**
4.1 Le problème 6
4.2 Solution du problème 6

5 Introduction au coloriage de graphe **7**

6 Un peu de théorie **8**
6.1 Premières définitions et exemples 8
6.2 Coloriage des sommets d'un graphe 8

7 D'autres problèmes avec le "regard" de la théorie des graphes **10**
7.1 Le problème du voyageur de commerce (*Traveling-Salesman Problem – TSP)* 10
7.2 Fini les problèmes d'emploi du temps ! 10
7.3 Colorier une carte 11

8 Un peu de culture générale... **12**
8.1 Théorie du « Petit Monde » et les six degrés de séparation 12
8.2 Nombre de Bacon 12
8.3 Moteur de recherche Google : PageRank 12

1 Présentation de l'IREM de Lille et du Groupe Informatique

• L'IREM de Lille est un institut :
- de recherche sur l'enseignement des mathématiques et sur ses perspectives ;
- de formation des enseignants par des actions s'appuyant sur les recherches fondamentales et appliquées en didactique des mathématiques, en histoire et épistémologie des mathématiques, en sciences de l'éducation ;
- de production et de diffusion de supports éducatifs (articles, brochures, revues, documents pour les enseignants,...).

• Il y a plusieurs groupes de recherches :
- Groupe ArSIN (Activités Réalisées Collaborativement avec des Supports Informatiques)
- Groupe Astronomie
-Groupe EMTA (Enseignement des Mathématiques et Textes Anciens)
- Groupe GHLAM (Géographie – Histoire – Lettres Anciennes – Mathématiques)
- Groupe Jeux
- Groupe Labo'
- Groupe Regard
- Groupe Primaire
- Groupe Rallye
- **Groupe Informatique**

Le site de l'IREM de Lille fait peau neuve en 2021-2022 : https://irem.univ-lille.fr/site_wp/

• Objectifs du Groupe Informatique de l'IREM de Lille :
- Informatique sans ordinateur
- Former des enseignants à l'informatique
- Informatique au féminin
- Didactique de l'informatique

2 Regard & Informatique ?

2.1 Qu'est-ce que l'informatique ?

Il est légitime de se poser la question suivante :

Quel lien pourrait-il y avoir entre « le regard » et « l'informatique » ?

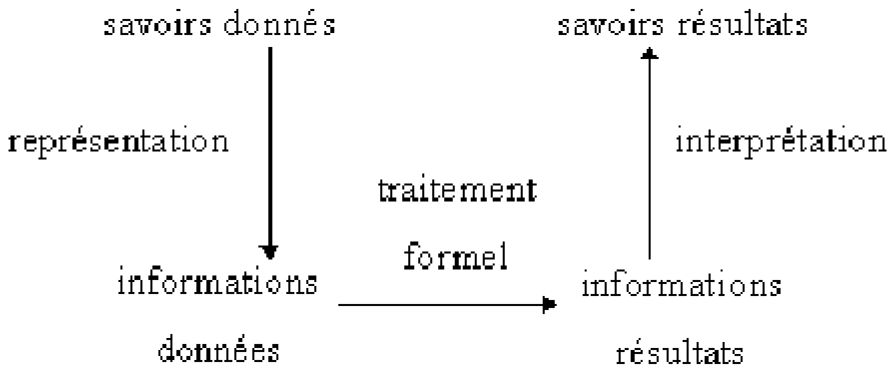
Avant de répondre à cette question, il est important de rappeler que le statut de l'informatique en tant que discipline est ambigu et mal compris : est-il à chercher du côté de la science ou du côté de la technique ? Quel est l'objet d'étude propre aux informaticiens ? Quelles sont leurs vraies compétences ?

Avant de nous engager sur ces points, commençons par éliminer les mauvaises réponses :
- l'informatique n'est pas la "science des ordinateurs" (ce que, pourtant, laisse croire sa traduction anglaise, "computer science") : non, les informaticiens ne savent pas nécessairement réparer un ordinateur en panne, diagnostiquer un problème électronique ou effectuer des branchements compliqués, ils ne sont pas toujours les meilleurs guides quand il s'agit d'acheter un nouveau modèle de scanner ou de modem ; oui l'informatique peut s'étudier avec un papier et un crayon, même en absence d'ordinateur...
- l'informatique n'est pas la "science des logiciels" : non, les informaticiens ne connaissent pas nécessairement toutes les nouvelles versions des programmes du commerce, ils ne savent pas toujours utiliser toutes leurs fonctions, ils ne passent pas (toujours) leurs journées à tester des jeux ou à chercher des bugs...

Le terme "informatique" lui-même a été proposé en 1962 par Philippe Dreyfus pour l'Académie Française. Ce mot est construit par contraction de "information" et "automatique" et sa définition officielle est "la science du traitement de l'information considérée comme le support formel des connaissances". Si on veut être encore plus précis, on peut définir l'informatique comme la science de tous les traitements effectifs applicables à des données discrètes.

Concrètement, cette discipline se décline suivant de nombreuses variantes, allant de la plus théorique (étudier la complexité d'un problème) à la plus ludique (programmer un jeu). Mais elle a une constante : la démarche d'un informaticien confronté à un problème donné se caractérise toujours par un effort de modélisation qui opère à deux niveaux :
- d'une part en trouvant un équivalent discret, numériques aux données réelles du problème, en cherchant pour elles un bon codage, une bonne représentation ;
- d'autre part en exprimant sous forme de règles formelles, d'algorithmes, les conditions de modifications de ces données permettant d'aboutir à un résultat.

Cette méthodologie est résumée dans le schéma de la figure suivante (dû à Jacques Arsac, un des pionniers de l'informatique en France).



2.2 La théorie des graphes

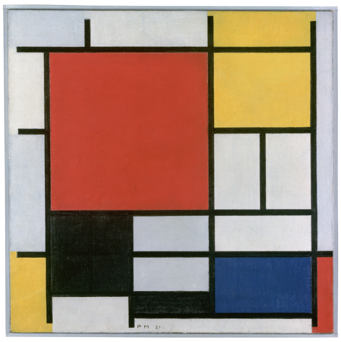
La théorie des graphes est un formidable pont entre les « Mathématiques pures », l'Informatique et les problèmes concrets de la vie courante.
Même si l'on se doute que certains domaines, comme les réseaux sociaux, les réseaux de transports, etc. sont facilement transcriptibles en graphe, pour certains, c'est plutôt inattendu, voir troublant.
L'optimisation de la réalisation d'un emploi du temps, le coloriage d'une carte avec conditions, etc. **Pour résoudre certains problèmes (très concrets parfois), il faut changer notre regard sur celui-ci.**

3 Colorier à la manière de Mondrian

3.1 Piet Mondrian

Pieter Cornelis Mondriaan, appelé Piet Mondrian à partir de 1912, né le 7 mars 1872 à Amersfoort aux Pays-Bas, et mort le 1er février 1944 à New York, est un peintre néerlandais reconnu comme l'un des pionniers de l'abstraction.

Mouvement : Art abstrait, néoplasticisme.
Influencé par : Cubisme, Société théosophique, anthroposophie, Bart van der Leck, Pablo Picasso.



Composition en rouge, jaune, bleu et noir, 1921,
huile sur toile, 59,5 × 59,5 cm, Gemeentemuseum.

3.2 Le théorème des quatre couleurs

> *« De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum pour colorier n'importe quelle carte géographique, avec la contrainte que deux pays partageant une frontière commune doivent être coloriés de couleur différente ? Le théorème des quatre couleurs affirme que quatre couleurs suffisent. Ce théorème a été prouvé en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken : à l'époque c'était le premier théorème prouvé à l'ordinateur. Et maintenant, au 21e siècle, il continue à fasciner les mathématiciens. »*

Remarque : Existe-t-il une preuve qui ne nécessite pas le recours à l'ordinateur ?

Un tel débat est lancé dans la communauté mathématique chaque fois qu'elle est confrontée à une preuve par l'ordinateur. Dans le cas du théorème des quatre couleurs, il existe d'autres preuves assistées par ordinateur et la communauté ne doute pas que le théorème est vraiment prouvé. Mais, beaucoup de mathématiciens continuent à croire qu'il doit être possible de donner une preuve « classique » du théorème des quatre couleurs, sans recours à l'ordinateur. Par contre, il faut une idée nouvelle. C'est ce qu'ont proposé Peter Kronheimer et Tomasz Mrowka dans leur conférence au Congrès international des mathématiciens de 2018 : soit d'utiliser leurs nouveaux théorèmes de topologie algébrique pour montrer que le problème équivalent de coloriage des arêtes d'un graphe avec trois couleurs est possible. Nous verrons si leur approche sera fructueuse.
Une autre preuve par ordinateur très célèbre est celle par Thomas Hales de la conjecture de Kepler sur l'empilement des sphères, affirmant que l'empilement le plus dense est celui qu'on observe sur les étals d'oranges.

3.3 Activité pratique : Colorier à la manière de Mondrian

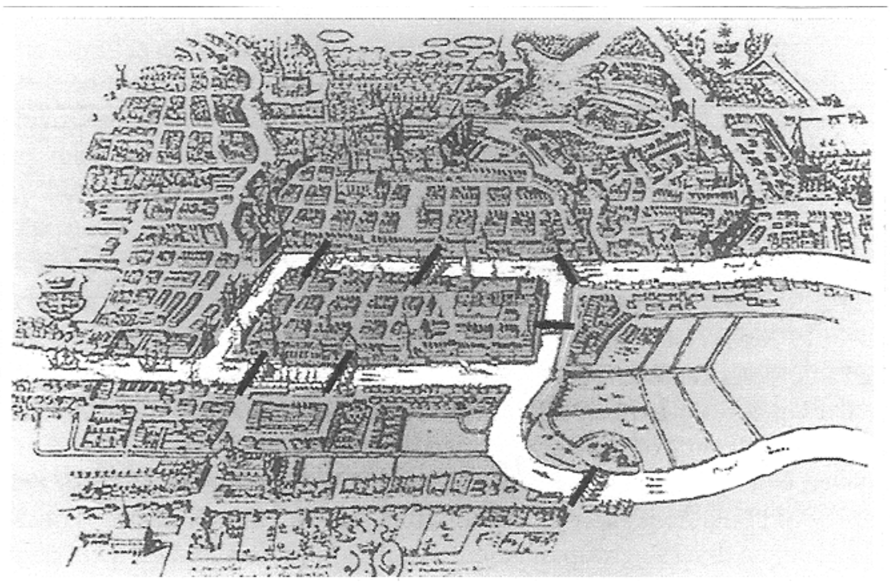
A l'aide des documents *« Tableau de Mondrian vierge (Débutant) »* et/ou *« Tableau de Mondrian vierge (Avancé) »*, colorier à la manière de Mondrian avec le minimun de couleurs possibles dans l'objectif d'avoir chaque case d'une couleur différente de sa voisine.

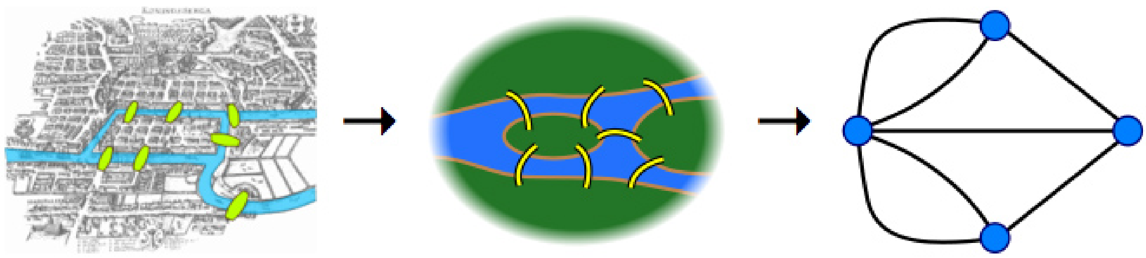
4 Changer son regard sur le problème : Problème des sept ponts de Königsberg

4.1 Le problème

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'origine de la topologie et de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler en 1735, ce problème mathématique se présente de la façon suivante :

> *« La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts. »*

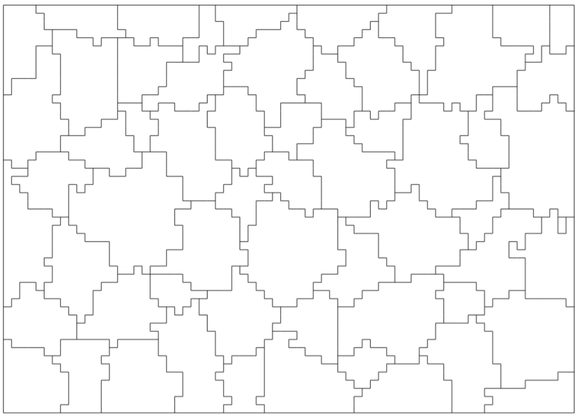




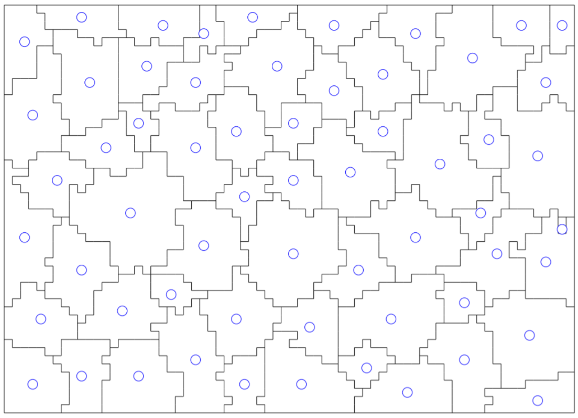
4.2 Solution du problème

Une telle promenade n'existe pas, et c'est Euler qui donna la solution de ce problème en caractérisant les graphes que l'on appelle aujourd'hui « eulériens » en référence à l'illustre mathématicien, à l'aide d'un théorème dont la démonstration rigoureuse ne fut en fait publiée qu'en 1873, par Carl Hierholzer.

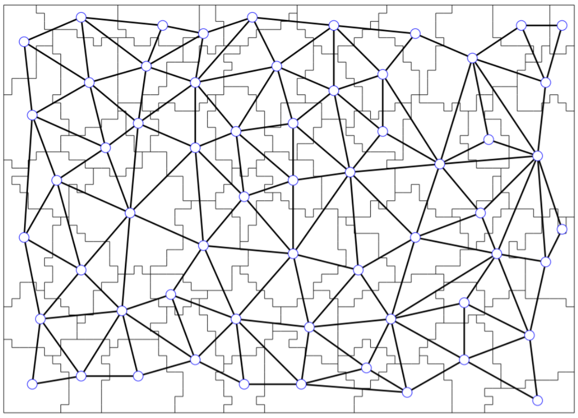
5 Introduction au coloriage de graphe



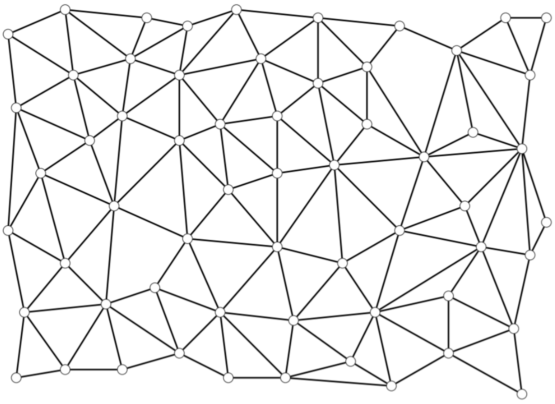
Etape 0



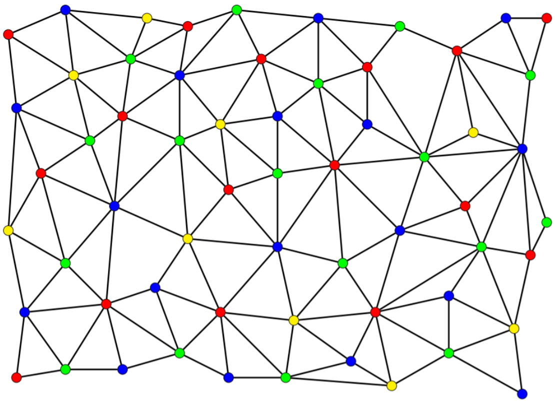
Etape 1



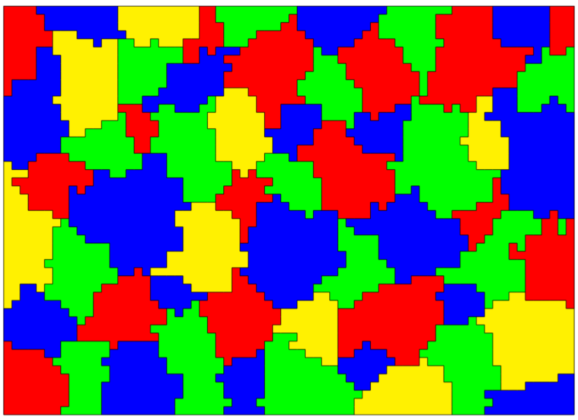
Etape 2



Etape 3



Etape 4



Etape 5

6 Un peu de théorie

6.1 Premières définitions et exemples

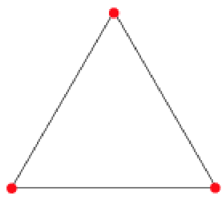
Définitions
Un graphe simple G est un couple formé de deux ensembles :
- un ensemble $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et
- un ensemble $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$, partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des parties à deux éléments de X, dont les éléments sont appelés arêtes. On notera $G = (X; A)$.
Lorsque $a = \{x; y\} \in A$, on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y, ou que a joint x et y, ou encore que a passe par x et y. Les sommets x et y sont dits adjacents dans G.
Le degré de x, noté $d(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x ; c'est–à-dire contenant x.

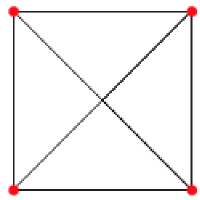
Exemples :
1. Le graphe d'un tournoi $T = (X; A)$ où :
- X est l'ensemble des participants au tournoi
- A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

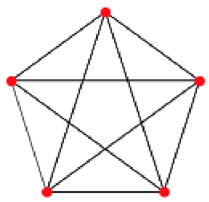
2. La carte routière de la France $F = (X; A)$ où
- X est l'ensemble des villes de la France.
- $A = \{x; y\}$ il y a au moins une route directe reliant les villes x et y :

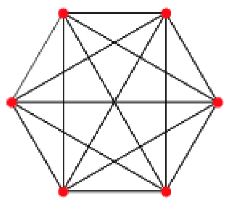
3. Le graphe complet d'ordre n, K_n ; où $X = \{1; 2; ...; n\}$ et $A = \mathcal{P}_2(X)$

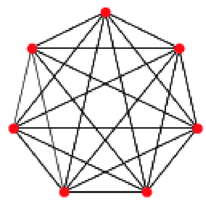
K_2


K_3


K_4


K_5


K_6


K_7

Un graphe G est **connexe** s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G.
Un **cycle eulérien** (respectivement une chaîne eulérienne) dans un graphe G est un cycle (respectivement une chaîne) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

Proposition
Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets ont un degré pair.

6.2 Coloriage des sommets d'un graphe

Définitions
Soit $G = (X; A)$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble S de X est stable s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.
Le cardinal de la plus grande partie stable est le nombre de stabilité de G ; on le note $\alpha(G)$.
La coloration des sommets d'un graphe consiste à affecter tous les sommets de ce graphe d'une couleur de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
Une coloration avec k couleurs (ou k-coloration) est donc une partition de l'ensemble des sommets en k parties stables. Le nombre chromatique, noté $\gamma(G)$; du graphe G est le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de X en k sous-ensembles stables.

Proposition
Soit $G = (X; A)$ un graphe simple d'ordre n. On a l'encadrement suivant :

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leqslant \gamma(G) \leqslant r + 1$$

où r est le degré maximal des sommets du graphe G.

Démonstration
On renvoie le lecteur à "Eric Sigward, « *Introduction à la théorie des graphes* », 2012". □

Proposition
Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre n, alors :

$$\gamma(G) + \alpha(G) \leqslant n + 1$$

Démonstration
Considérons S, une partie stable de X de cardinal $\alpha(G)$.
Une coloration possible des sommets consiste à colorier les sommets de S d'une même couleur et les $n - \alpha(G)$ autres sommets de couleurs toutes différentes. On en déduit que :

$$\gamma(G) \leqslant 1 + (n - \alpha(G))$$

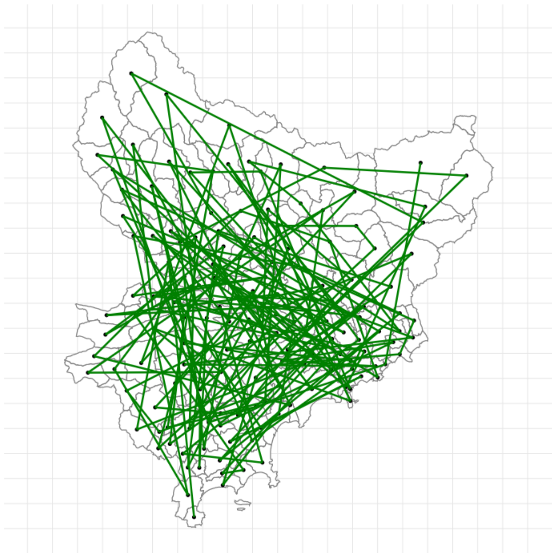
□

7 D'autres problèmes avec le "regard" de la théorie des graphes

7.1 Le problème du voyageur de commerce (*Traveling-Salesman Problem – TSP*)

Le problème du voyageur de commerce est un problème très connu en mathématiques car d'apparence simple il s'avère qu'il est impossible de calculer la meilleure solution à partir d'un certain nombre de villes dans tous les cas. L'idée est qu'une personne doit parcourir un certain nombre de villes tout en minimisant la distance totale parcourue.
Il est possible de « s'amuser un peu » avec des villes françaises sur le site

https://www.datavis.fr/index.php?page=salesman-problem

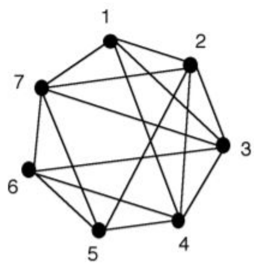


Situation de départ générée aléatoirement avec le territoire des Alpes-Maritimes (163 communes)

7.2 Fini les problèmes d'emploi du temps !

> « *Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7. Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée miminale ?* »

Solution :
Construisons le graphe G dont les sommets sont les épreuves numérotées de 1 à 7, une arête relie deux de ses sommets lorsque les deux cours correspondant possèdent des étudiants communs :



Planifier les examens en un temps minimal consiste à déterminer une $k-$coloration de G, avec $k = \gamma(G)$.
G possède un sous-graphe complet d'ordre 4 (de sommets 1,2,3,4), donc $\gamma(G) \geqslant 4$.
Déterminons une partition des sommets de G en sous-ensembles stables :

$$S_1 = \{1, 6\} \qquad S_2 = \{2\} \qquad S_3 = \{3, 5\} \qquad S_4 = \{4, 7\}$$

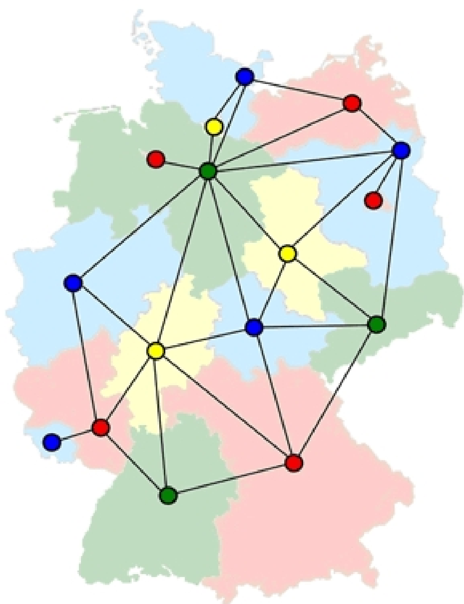
d'où $\gamma(G) \leqslant 4$, et finalement $\gamma(G) = 4$.
Les examens peuvent être répartis en 4 périodes, de la manière suivante :
- $1^{\text{ère}}$ période : épreuves des cours 1 et 6
- 2^{e} période, épreuve du cours 2
- 3^{e} période, épreuves des cours 3 et 5
- 4^{e} période, épreuves des cours 4 et 7.

7.3 Colorier une carte

Durant les études, essentiellement pendant un cours de géographie, nous avons sûrement tous coloré une carte géographique. Nous sommes confrontés au problème suivant : nous devons colorer cette carte de telle manière à ce que deux provinces limitrophes aient des couleurs différentes. Étant étudiant, nous n'avons que peu de crayons de couleurs dans notre trousse. Dès lors, nous nous sommes demandés : avons-nous suffisamment de couleurs différentes pour colorer la carte ? Est-ce que nous devrons emprunter un crayon à notre voisin ? Nous pouvons, à la main, montrer qu'il faut au minimum 4 couleurs pour une carte (*Théorème des quatre couleurs*).

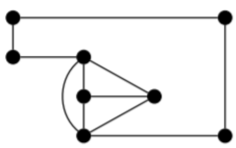
Définition
Colorer un graphe signifie assigner une couleur à chaque sommet de telle sorte que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes.

Le but dans la coloration de graphe est de trouver le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer le graphe. Ce nombre s'appelle *nombre chromatique*.
Si le graphe peut être coloré avec k couleurs, nous dirons qu'il est k*-coloriable* ou qu'il possède une k*-coloration*.



Applications
Nous avons vu que la coloration d'un graphe est utile dans la coloration des cartes géographiques mais ce n'est pas là son unique domaine d'application. En effet, la coloration de graphe a de nombreuses utilités :
– les problèmes d'incompatiblité : le stockage de produits chimiques qui peuvent exploser s'ils entrent en contact, désignation d'un endroit pour des personnes ou des animaux en tenant compte des relations,
– l'allocation de fréquences, par exemple dans un réseau de téléphone mobile GSM,
– la confection d'horaires,

	Math	Latin	Grec	Sciences Sociales
Classe A	X			X
Classe B	X	X		
Classe C		X	X	
Classe D		X		X



– la résolution du Sudoku,
– ...

8 Un peu de culture générale...

8.1 Théorie du « Petit Monde » et les six degrés de séparation

L'expérience de Stanley Milgram en 1967 a mis en lumière qu'il fallait en moyenne 6 liens de connaissance pour relier deux américains qui ne se connaissent pas : c'est la **théorie des six degrés de séparation**. Des études sur les réseaux sociaux ont confirmé cette théorie et ont montré que les réseaux sociaux ont encore diminué ce degré de séparation moyen entre deux individus dans le monde.

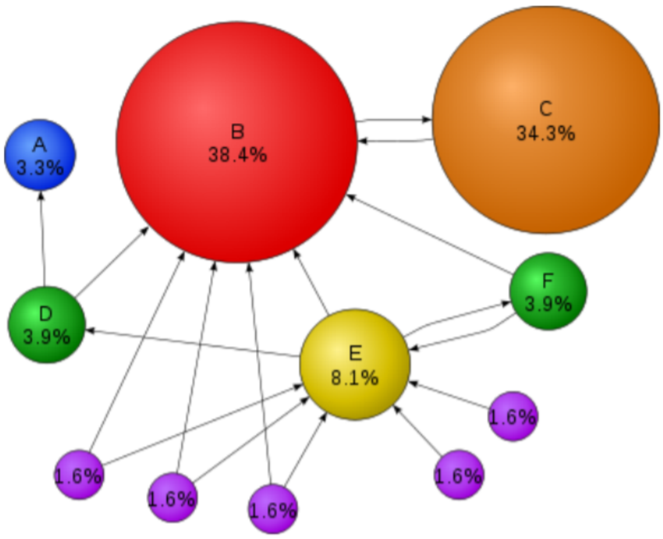
8.2 Nombre de Bacon

The Bacon number (le « nombre de Bacon ») d'un acteur est le chiffre caractérisé par le degré de séparation qu'il a avec Kevin Bacon. C'est une application du nombre d'Erdős au secteur du cinéma. Plus le chiffre est grand, plus l'acteur en question est éloigné de Bacon. Le calcul du Bacon number pour un acteur A est basé sur l'algorithme appelé « problèmes de cheminement » (shortest path problem).

D'après le site The Oracle of Bacon, une base de données permettant en un clic de relier un acteur à Kevin Bacon, le plus grand nombre de Bacon est 10.

8.3 Moteur de recherche Google : PageRank

Le Web peut être représenté par un énorme graphe dans lequel chaque page est un sommet et chaque lien entre deux pages est une arête. Un des premiers principes du moteur de recherche Google est d'affecter à chaque page web une note proportionnelle au nombre de passages sur cette page d'un utilisateur explorant le graphe du Web en cliquant au hasard sur un des liens figurant sur chaque page.
Cette note est appelée *PageRank*. Par conséquent, la PageRank d'une page web augmente en fonction de la somme des PageRanks des pages référant cette page.
Langville et Meyer (dans *Google page rank and beyond.*) expliquent comment la théorie des graphes et celle des chaînes de Markov (probabilité) permettent de gérer le moteur de recherche Google.



Références

- Isabelle Tellier, « *Qu'est-ce que l'informatique ?* », Université Paris 3 - Sorbonne Nouvelle - Laboratoire LaTTiCe, 2008.
- Eglantine Camby, « *Différents problèmes en théorie des graphes*, 2012, ULB.
- Eric Sigward, « *Introduction à la théorie des graphes* », 2012
- Amy Langville et Carl Meyer, « *Google page rank and beyond* », Princeton Univ Pr, 2006.
- Marc Timme, Frank van Bussel, Denny Fliegner, and Sebastian Stolzenberg, « *Counting Complex Disordered States by Effiecient Pattern Matching : Chromatic Polynomials and Potts Partition Functions* », New Journal of Physics 11 (2009), 023001, February 4th, 2009
- Michaël Rao, « *Théorème des 4 couleurs : preuve et démonstration(s) par ordinateur*, CNRS - ENS Lyon Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme, équipe MC2