Dérivation des fonctions - Première

Mohamed NASSIRI

1 Nombre dérivé en a dune fonction

Définition 1

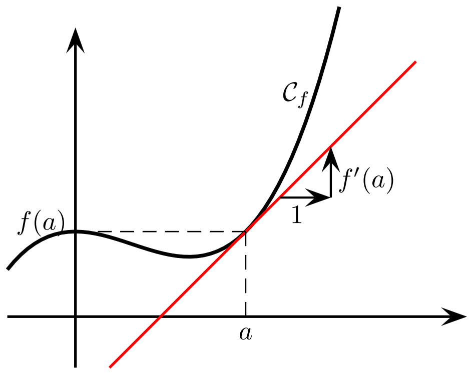
• *On appelle* **taux d'accroissement***, ou* **taux de variation***, en a de la fonction f le nombre*

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• *On appelle* **nombre dérivé en a** *la limite, lorsqu'elle existe, de $\tau_a(h)$ quand h tend vers 0.*
On note ce nombre, lorsqu'il existe, $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

• *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*

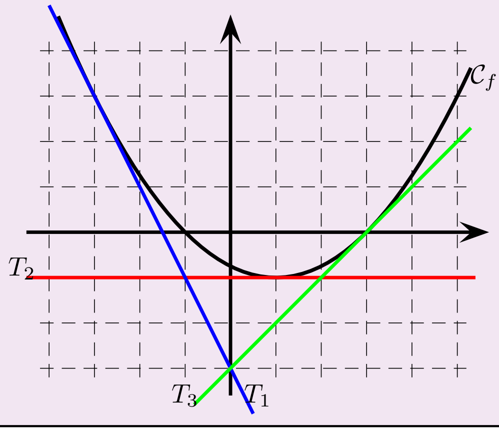


Exemple

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f. T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses respectives -3, 1 et 3.

Par conséquent, on a donc :

$$f'(-3) = -2$$
$$f'(1) = 0$$
$$f'(3) = 1$$



Exercice. Représenter - Calculer

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3$.

1. Tracer dans un repère orthogonal $\mathcal{C}_f$ et sa tangente au point d'abscisse $a = 1$.
Déterminer alors graphiquement $f'(1)$.

2.a. Pour $h > 0$, on pose $m_h = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Compléter le tableau :

h	1	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
m_h						

Vers quelle valeur tend le nombre a_h lorsque le nombre h tend vers 0 ?

b. Démontrer ce résultat algébriquement à partir de l'expression de m_h et de celle de f.

Visionner la notion

- Le nombre dérivé - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Calculer le nombre dérivé (1) - Première - m@ths et tiques
- Calculer le nombre dérivé (2) - Première - m@ths et tiques
- Déterminer graphiquement le nombre dérivé - Première - m@ths et tiques (début de la vidéo)

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

- Exercice n°38 page 120. *Calculer.*
- Exercice n°39 page 120. *Calculer.*
- Exercice n°40 page 120. *Calculer.*
- Exercice n°41 page 120. *Calculer.*
- Exercice n°43 page 121. *Calculer.*
- Exercice n°45 page 121. *Chercher* ♣.
- Exercice n°46 page 121. *Raisonner.*
- Exercice n°47 page 121. *Chercher* ♣.
- Exercice n°50 page 122. *Chercher.*
- Exercice n°52 page 122. *Représenter.*

2 Fonction dérivée

Définition 2 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *On dit que f est* **<u>dérivable sur I</u>** *si f admet un nombre dérivé en tout point de I, c'est-à-dire si pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.*
- *On appelle* **<u>fonction dérivée</u>** *de f la fonction notée f' qui, à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.*

Proposition 3 Ce tableau est à apprendre par coeur !

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	*Dérivée*	*f est définie sur*	*f est dérivable sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$	$\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	

Opérations sur les dérivées

Fonction	*Dérivée*
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$

Composées de fonctions

Fonction	*Dérivée*
u^2	$2u'u$
u^n	$u'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Exercice corrigé - Calculer

Calculer les fonctions dérivées $f'(x)$ dans tous les cas suivants.
Écrire la fonction dérivée sous la forme la plus "simplifiée" possible : une seule fraction au plus (même dénominateur ...), et le plus factorisé possible.

$f_1(x)=x^3-5x^7+\dfrac{3}{x}$	$f_2(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x\sqrt{3}+3\sqrt{x}$	$f_3(x)=(x^2+3)x^5$	$f_4(x)=(3x-2)^2$
$f_5(x)=x^2\sqrt{x}$	$f_6(x)=(x+3)x^2\sqrt{x}$	$f_7(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)x$	$f_8(x)=\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)x$
$f_9(x)=\dfrac{3}{x+1}$	$f_{10}(x)=-2\dfrac{5}{x^2+3}$	$f_{11}(x)=\dfrac{5x}{x^2+3}$	$f_{12}(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$
$f_{13}(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$	$f_{14}(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}$	$f_{15}(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$	$f_{16}(x)=\dfrac{x^2+\frac{3}{x}}{x^2+\frac{x}{3}}$
$f_{17}(x)=\dfrac{5\sqrt{x}}{1+\frac{2}{x}}$	$f_{18}(x)=x\dfrac{1+\frac{1}{x}}{3+\frac{3}{x}}$	$f_{19}(x)=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$f_{20}(x)=\dfrac{1}{3}x\dfrac{3+\frac{9}{x}}{x^2+2}$

$f'_1(x)=\dfrac{3x^4-35x^8-3}{x^2}$	$f'_2(x)=\dfrac{4x^3\sqrt{x}-2\sqrt{3x}+3}{2\sqrt{x}}$	$f'_3(x)=x^4\left(7x^2+15\right)$
$f'_4(x)=6(3x-2)$	$f'_5(x)=\dfrac{5}{2}x\sqrt{x}$	$f'_6(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x}(7x+15)$
$f'_7(x)=2x$	$f'_8(x)=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}$	$f'_9(x)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$
$f'_{10}(x)=\dfrac{20x}{(x^2+3)^2}$	$f'_{11}(x)=5\dfrac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$	$f'_{12}(x)=\dfrac{1}{(x+3)^2}$
$f'_{13}(x)=\dfrac{-x(x^3+3x-2)}{(x^3+1)^2}$	$f'_{14}(x)=-3\dfrac{(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2}$	$f'_{15}(x)=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$
$f'_{16}(x)=3\dfrac{x^3-27x-6}{x(3x^2+x)^2}$	$f'_{18}(x)=\dfrac{1}{3}$	$f'_{19}(x)=\dfrac{1}{x^2}$
$f'_{17}(x)=\dfrac{5\sqrt{x}(x+6)}{2(x+2)^2}$		
$f'_{20}(x)=\dfrac{-x^2-6x+2}{(x^2+2)^2}$		

Visionner la notion

- Dériver les fonctions usuelles - Première - m@ths et tiques
- Les dérivées usuelles - Dérivation - Maths 1ère - Les Bons Profs

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

- Exercice n°74→86 page 126. *Calculer.*
- Exercice n°89 page 127. *Calculer.*
- Exercice n°87 page 126. *Calculer* .
- Exercice n°90 page 127. *Raisonner.*
- Exercice n°88 page 126. *Calculer* ♣.
- Exercice n°91 page 127. *Calculer.*

3 Sens de variation dune fonction

Proposition 4 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Remarque

Lorsque l'on étudie les variations d'une fonction, on synthétise cette étude dans un **tableau de variations** comme dans l'exemple suivant.

Exemple

Etudions les variations de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 4$.

- Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = 3 \times x^2 - 3 \times 1 - 0 = 3x^2 - 3$$

- Détermination des "zéros" de la dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \\ &\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \Leftrightarrow \quad x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque

Il ne faut pas oublier de calculer les images des zéros de la dérivée par la fonction f (dans notre exemple, on a bien déterminé $f(-1)$ et $f(1)$) !

Méthode
- Dériver la fonction à l'aide des formules usuelles
- Déterminer le(s) valeur(s) de x pour le(s)quelle(s) la dérivée s'annule.
- Déterminer le signe de la dérivée sur l'intervalle de définition.
- Associer les variations associées à chaque signe dans un tableau de variations.

Exercice. Calculer

Dresser le tableau de variation des fonctions de l'exercice précédent de a) à l) et des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$ **c)** $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{(x+1)^2}$ **e)** $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 1$

Visionner la notion

- Signe de la dérivée et variations - Maths 1ère - Les Bons Profs
- Etudier les variations d'une fonction - Première - m@ths et tiques

Pour s'entraîner

Exercices sur lelivrescolaire.fr :

Exercice n°29 page 144. *Chercher* ♣.
Exercice n°30 page 144. *Chercher.*
Exercice n°32 page 145. *Calculer* ♣.
Exercice n°33 page 145. *Représenter.*
Exercice n°35 page 145 *Représenter* ♣.
Exercice n°36 page 145. *Chercher.*
Exercice n°37 page 147. *Chercher.*
Exercice n°42→50 page 147 *Calculer.*
Exercice n°51 page 147. *Calculer.*
Exercice n°52 page 147. *Calculer.*
Exercice n°56 page 147. *Calculer* ♣.