Coquillages & Poincaré

Bestiaire de sujets de baccalauréat - Année 2021

Terminale Spécialité Mathématiques (Alphas)

NASSIRI Mohamed

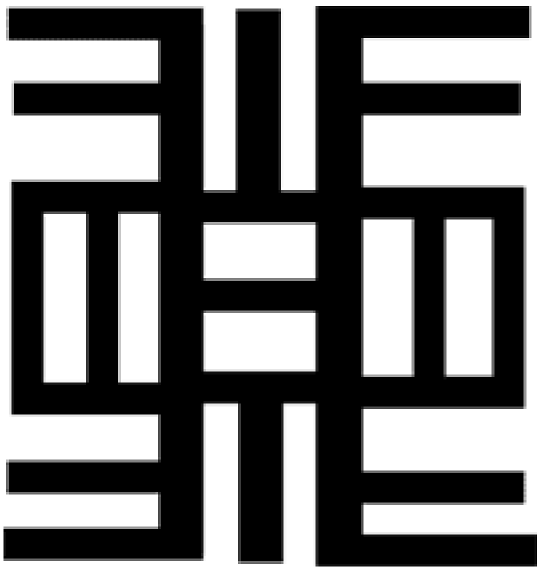
Bestiaire de sujets de baccalauréat - Année 2021
Terminale Spécialité Mathématiques (Alphas)

Mohamed NASSIRI

Table des matières

La rédaction de ce bestiaire m'a été facilité par le travail de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP).
Qu'ils·elles en soient grandement remerciés ici !

Ad astra per aspera



« *Nea onnim no sua a, ohu*[1] »

1. « *Celui qui ne sait pas peut savoir en apprenant* », Adinkra (symbole originaire du Ghana) du savoir, de l'éducation permanente et de la quête continue du savoir

1 Exercices sur les suites numériques

Exercice 1 *Baccalauréat 2021 Métropole (Voir la solution)*
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

1. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
   (c) Démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 2 *Baccalauréat 2021 Asie (Voir la solution)*
En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1500$.

(b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. Ecrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.

   Déterminer cette année.

Exercice 3 *Baccalauréat 2021 Centres étrangers (Voir la solution)*

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 4 *Baccalauréat 2021 Polynésie (Voir la solution)*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9415$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4000.$$

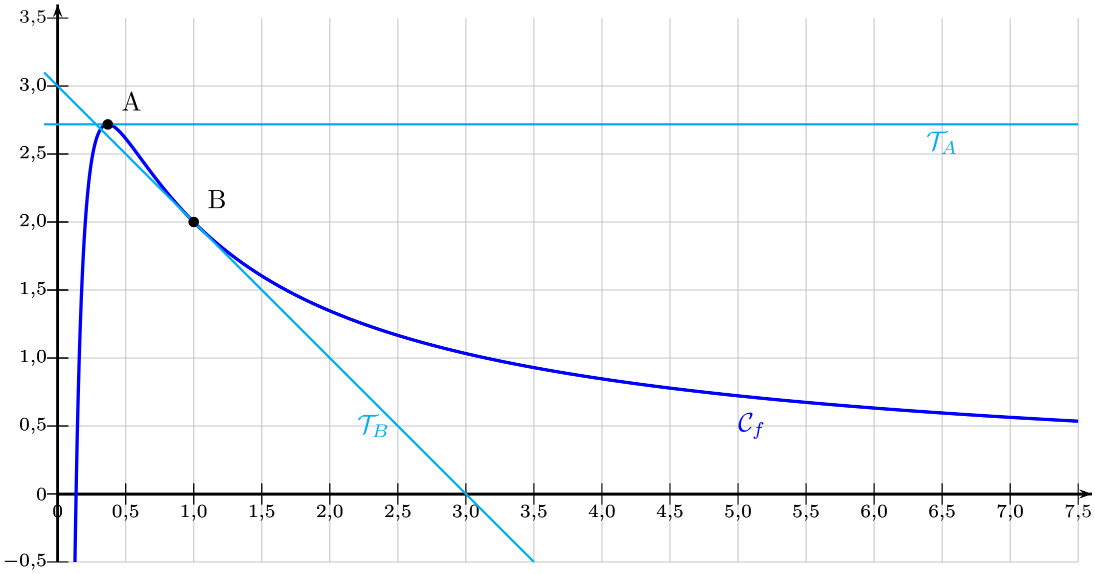
   (b) On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

2 Exercice sur les études de fonctions

Exercice 5 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Voir la solution)*
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :
— la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$;
— la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;\ e\right)$;
— la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.
La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}_B$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0\ ;\ \infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$
$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 6 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Voir la solution*)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

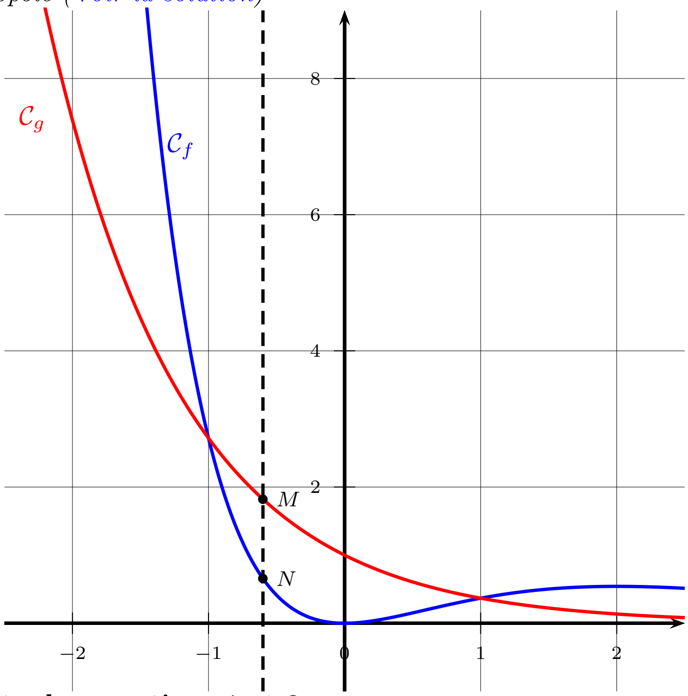
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   (a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 7 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Voir la solution*)

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$



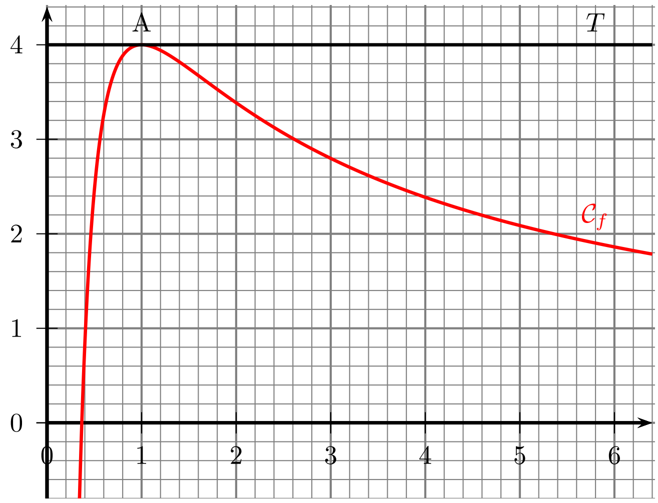
La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   (b) Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que : $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.
   On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   (c) Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d\left(x_0\right)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance M_0N_0.
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.
   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Exercice 8 *Baccalauréat 2021 Amérique du Nord* (*Voir la solution*)
Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $\mathrm{A}(1\,;\,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

1. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ \ln x}{x^2}.$$

2. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

3 Exercice sur les probabilités

Exercice 9 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* (*Voir la solution*)
Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée* ;
— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;
R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;
R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.
   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.
2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.
   (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.
   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?
3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
   Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   (a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 10 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Voir la solution*)
Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?
   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
   (b) A partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 11 *Baccalauréat 2021 Polynésie* (*Voir la solution*)
Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
   Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
   On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Exercice 12 *Baccalauréat 2021 Amérique du Nord* (*Voir la solution*)
Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :
- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.
On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».
On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.
   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question **1.** on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

4 Les QCM

Voici la consigne donnée pour ce type d'exercice :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée

Exercice 13 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Voir la solution)*
On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

Exercice 14 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Voir la solution)*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$
d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

Exercice 15 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Voir la solution)*
On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

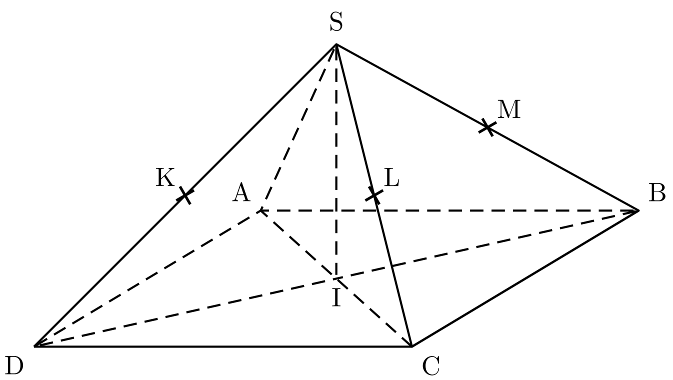
On peut affirmer que :

1. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
2. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
3. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
4. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

Exercice 16 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Voir la solution)*
Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\dfrac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

Exercice 17 *Baccalauréat 2021 Métropole (Voir la solution)*



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\text{I}\ ;\ \overrightarrow{\text{IC}},\ \overrightarrow{\text{IB}},\ \overrightarrow{\text{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\text{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \text{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \text{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) ; \text{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \text{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

1. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AS}}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

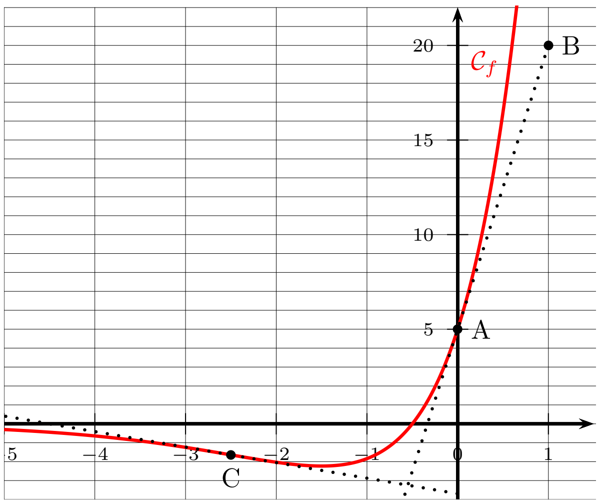
3. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t\\ y & = & t\\ z & = & -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1+2t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & t\\ y & = & 0\\ z & = & 1+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -1-t\\ y & = & 1+t\\ z & = & 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

4. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

   a. $y+z-1=0$ **b.** $x+y+z-1=0$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

Exercice 18 *Baccalauréat 2021 Métropole Septembre (Voir la solution)*



Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0 ; 5)$ et B de coordonnées $(1 ; 20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonction f.

1. On peut affirmer que :
   (a) $f'(-0,5) = 0$
   (b) si $x \in]-\infty\ ;\ -0,5[$, alors $f'(x) < 0$
   (c) $f'(0) = 15$
   (d) la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par
   $f(x) = (ax+b)\text{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\ ;\ 0)$.
   On peut affirmer que :

(a) $a = 10$ et $b = 5$
(b) $a = 2,5$ et $b = -0,5$
(c) $a = -1,5$ et $b = 5$
(d) $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur par :

$$f''(x) = (10x + 25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

(a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$
(b) La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$
(c) Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$
(d) $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
   - pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

(a) la suite (U_n) converge
(b) pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$
(c) la suite (U_n) diverge
(d) la suite (U_n) est majorée

Exercice 19 *Baccalauréat 2021 Métropole* *(Voir la solution)*

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** $0,24$ **d.** $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
   c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

   a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ **b.** $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

1. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

   a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{4}{7}$ **c.** $\dfrac{5}{14}$ **d.** $\dfrac{20}{56}$

2. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

   a. $\dfrac{5}{8}$ **b.** $\dfrac{5}{7}$ **c.** $\dfrac{3}{28}$ **d.** $\dfrac{9}{7}$

5 Les corrigés

Corrigé 1 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Retour à l'énoncé*)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \dfrac{3}{4}u_0 + \dfrac{1}{4} \times 0 + 1 = \dfrac{3}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{7}{4}$.

   Pour $n = 1$, $u_1 = u_{1+1} = \dfrac{3}{4}u_1 + \dfrac{1}{4} \times 1 + 1 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

1. (a) La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
   = 3/4 * B2 + 1/4 * A2 +1.

   (b) La suite (u_n) semble croissante.

2. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leqslant 1 \leqslant 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$ (hypothèse de récurrence).

     $$\begin{aligned} n \leqslant u_n \leqslant n+1 &\iff \frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) \\ &\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n \\ &\iff n \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leqslant n + \frac{3}{4} \\ &\iff n+1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant n + \frac{3}{4} + 1 \iff n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

     donc $n + 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + 2$.
     On a démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$.

   (b) D'après la question précédente :

   - Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$ donc $n + 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + 2$ donc $n \leqslant u_n \leqslant n + 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + 2$ d'où on tire $u_n \leqslant u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
   - Pour tout n, $n \leqslant u_n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (c) Pour tout n, $n \leqslant u_n \leqslant n + 1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$ c'est-à-dire : $1 \leqslant \dfrac{u_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

   Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   (a) Pour tout n, $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$
   $v_0 = u_0 - 0 = 1$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
   (b) On en déduit que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
   Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Corrigé 2 *Baccalauréat 2021 Asie* *(Retour à l'énoncé)*

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. On a donc $u_1 = 1000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1150$.
2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.
   Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite haque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :
   $$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$
3. u(10) donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $/approx 1977$.
4. (a) Initialisation : on a $u_0 = 1000 \leqslant 2500$: la relation est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2500$.
   La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2500$ ou $0,9u_n \leqslant 2250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
   $0,9u_n + 250 \leqslant 2250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant 2500$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.
   Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.
   On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.
   (c) La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2500.
5. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9u_n + 250 - 2500$, soit
   $v_{n+1} = 0,9u_n - 2250 = 0,9(u_n - 2500) = 0,9v_n$.
   L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.
   (b) On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0 \times 0,9^n = -1500 \times 0,9^n$.
   Or $v_n = u_n - 2500 \iff u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0,9^n$.
   (c) Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ et par suite par produit de limites $\lim\limits_{n\to+\infty} -1500 \times 0,9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2500$.
6. Ecrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.
   Déterminer cette année.

```
n = 0
u = 1000
  while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

Le programme s'arrêtera la 16e année.

Corrigé 3 *Baccalauréat 2021 Centres étrangers* (*Retour à l'énoncé*)
En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $0,85$; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.
   (a) • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85\,(v_n + 3000) - 2550$
   $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
   • $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.
   (b) On en déduit que, pour tout n, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.
   (c) Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n, $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :
$$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \frac{500}{2800} > 0,85^n$$
$$\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln\left(0;85^n\right) \iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln\left(0;85\right) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln\left(0,85\right)} < n$$
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln\left(0,85\right)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500 est 11.

Partie B

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$
où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

   f est une fonction rationnelle définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $f'(x) = \dfrac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{5x+10-5x-4) \times 1}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{(x+2)^2}$

   $f'(x) > 0$ sur $[0\ ,\ +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Soit $\mathcal{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   - **Initialisation**

     $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0+1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$

     $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

   - **Hérédité**

     On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

     La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sur $[0\ ;\ 4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

     $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$; $f(u_n) = u_{n+1}$; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

     On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

   - **Conclusion**

     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   On a donc démontré que pour tout n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

   (b)
   - Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
   - Pour tout n, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite (u_n) est majorée.

   La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   La suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

   D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

   Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5000 que compte l'entreprise.

Corrigé 4 *Baccalauréat 2021 Polynésie* (*Retour à l'énoncé*)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. - $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9500 + 200 = 9700$.
   - $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9215 + 200 = 9415$.

2. (a) On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4000$.

   Initialisation : $u_0 = 10000 > 4000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4000$, soit :

   $0,95u_n > 3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

   $0,95u_n + 200 > 3800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4000$ quel que soit le naturel n.

   (b) On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4000$.

3. (a) Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

(b) Au choix :
<u>Méthode</u> 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3800}{0,95}\right) = 0,95\left(u_n - 4000\right) = 0,95v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

<u>Méthode</u> 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - 4000\right)}{u_n - 4000} = 0,95$.

Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

(c) D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.
Or $v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$.

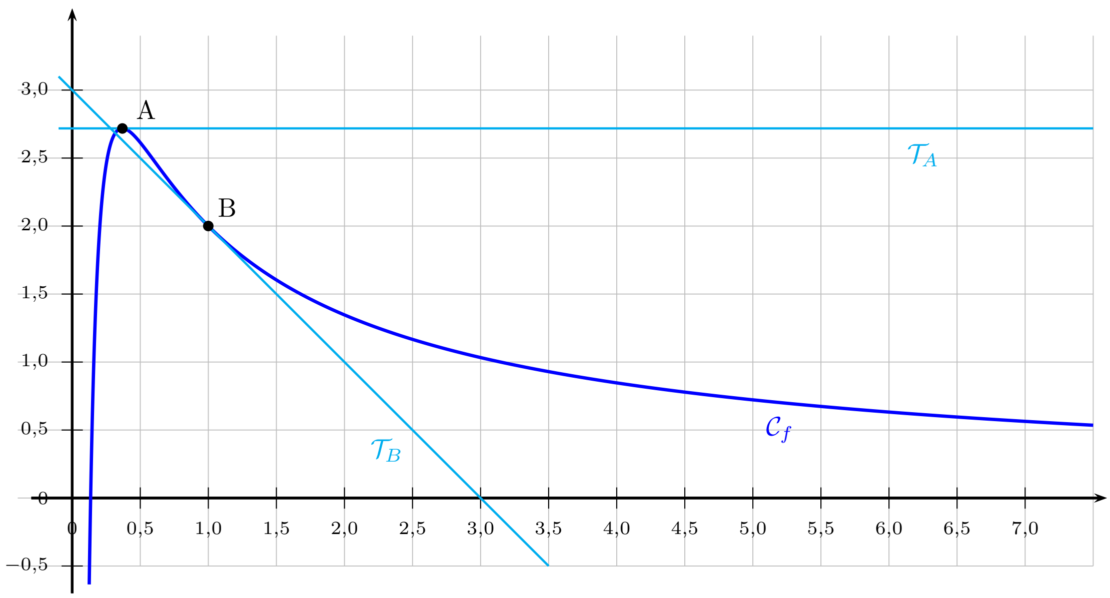
(d) Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

Corrigé 5 *Baccalauréat 2021 Sujet 0 (Retour à l'énoncé)*
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}\ ;\ e\right)$;
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.
Partie I

1. • La droite $\mathcal{T}_A$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\dfrac{1}{e}\ ;\ e\right)$; elle a donc comme coefficient directeur $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$.
   La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul.
   On peut donc déduire que $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$.
   • La droite $\mathcal{T}_B$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;\,2)$, donc elle a pour coefficient directeur $f'(1)$.
   La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,3)$, donc on peut en déduire que son coefficient directeur est $\dfrac{3-0}{0-3} = -1$.
   On a donc $f'(1) = -1$.
2. La droite $\mathcal{T}_B$ a pour coefficient directeur -1 et 3 pour ordonnée à l'origine, donc elle a pour équation : $y = -x + 3$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2+\ln(x)}{x}$.

1. • $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = e\,(2-\ln(e)) == e\,(2-1) = e$ donc $\text{A} \in \mathcal{C}_f$.
   • $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$ donc $\text{B} \in \mathcal{C}_f$.
   • La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point dont l'abscisse est solution de l'équation $f(x) = 0$. On résout dans $]0\ ;\ +\infty[$ cette équation.
   $f(x) = 0 \iff \dfrac{2+\ln(x)}{x} = 0 \iff 2+\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -2 \iff x = e^{-2}$
   Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un point unique de coordonnées $\left(e^{-2}\ ;\ 0\right)$.
2. Calculs des limites.
$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (2+\ln(x)) \times \frac{1}{x} = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$$
$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
3. Pour $x \in]0\ ;\ \infty[$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - (2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln(x)$; $-1-\ln(x) > 0 \iff -1 > \ln(x) \iff x < e^{-1}$
   On dresse le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$.
   La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.
   Sur $]0\ ;\ +\infty$, $x^3 > 0$ donc
   $f''(x) \geqslant 0 \iff \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff 1+2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2} \iff x \geqslant e^{-\frac{1}{2}}$
   Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[e^{-\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$.

Corrigé 6 *Baccalauréat 2021 Métropole (Retour à l'énoncé)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) D'après le cours, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

   (b) On cherche la limite de f en 0 :

   $$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0} e^x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$$

   Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

   Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

   D'après le tableau de variations :

   - si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
   - si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
   - si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   (a) La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$.

   $$f'(a) = -1 \iff \frac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff e^a(x-1) = -a^2 \iff e^a(x-1) + a^2 = 0$$

   ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

   On note g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.

   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   (a) $g'(x) = e^x \times (x-1) + e^x \times 1 + 2x = xe^x + 2x$

   Sur $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc sur $[0\ ;\ +\infty[$, $xe^x + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$g(0) = e^0(0-1)+0 = -1$

On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On complète le tableau de variations de g :

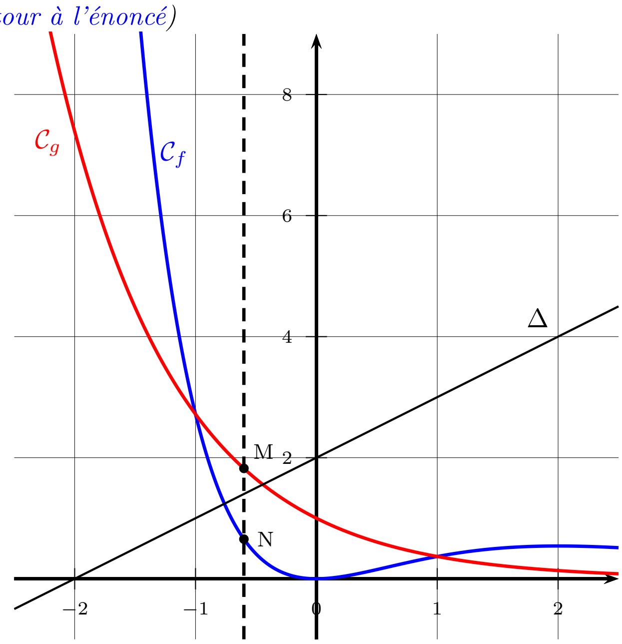
x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\ ;\ +\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Corrigé 7 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Retour à l'énoncé*)

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$



1. (a) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$. On résout cette équation :
$f(x) = g(x) \iff x^2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \iff (x^2-1)\mathrm{e}^{-x} = 0$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$.
$f(x) = g(x) \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$.
Pour $x = -1$, $g(x) = \mathrm{e}$, et pour $x = 1$, $g(x) = \mathrm{e}^{-1}$.
Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont donc $(-1\ ;\ \mathrm{e})$ et $(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1})$.

(b) Pour étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$, c'est-à-dire de $(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$(x^2-1)\mathrm{e}^{-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc sur les intervalles $]-\infty\ ;\ -1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$, et sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$,

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN.
   On admet que : $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.
   On admet que la fonction d est dérivable sur $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
   (a) $d'(x) = (-1)\mathrm{e}^{-x} - \left(2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-1)\mathrm{e}^{-x}\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-1-2x+x^2\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-2x-1\right)$
   (b) $x^2-2x-1 = x^2-2x+1-2 = (x-1)^2-2 = \left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right)$

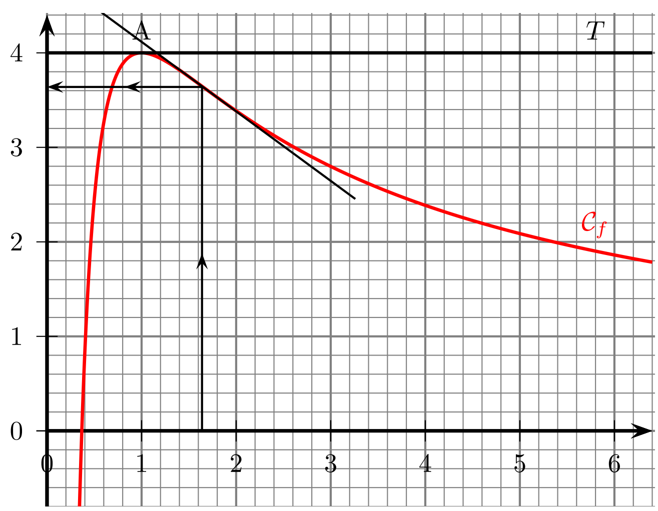
x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-1-\sqrt{2}$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1+\sqrt{2}$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
e^{-x}		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\mathrm{e}^{-x}\left(x^2-2x-1\right)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	

   - Sur l'intervalle $\left[-1\ ;\ 1-\sqrt{2}\right[$, $d'(x) > 0$ donc d est strictement croissante.
   - Sur l'intervalle $\left]1-\sqrt{2}\ ;\ 1\right]$, $d'(x) < 0$ donc d est strictement décroissante.

   (c) D'après la question précédente, la distance $d(x)$ est maximale pour $x_0 = 1-\sqrt{2}$.
   Elle vaut $d\left(1-\sqrt{2}\right) = \left(1-\left(1+2-2\sqrt{2}\right)\right)\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\mathrm{e}^{-1+\sqrt{2}} \approx 1,254$, soit 1,3 au dixième près..
3. Soit Δ la droite d'équation $y = x+2$.
   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.
   Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, on étudie la fonction h.
   $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 1$ donc $h'(x) < 0$; la fonction h est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   - $h(-1) = \mathrm{e}^1 + 1 - 2 = \mathrm{e} - 1 > 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) > 0$ pour $x < -1$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.
   - $h(0) = \mathrm{e}^0 - 2 = -1 < 0$; comme h est strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour $x > 0$, donc h ne s'annule pas sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction h est continue et strictement décroissante, et on sait que $h(-1) > 0$ et $h(0) < 0$; donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique.

   La droite Δ et la courbe $\mathcal{C}_g$ ont donc un unique point d'intersection dont l'abscisse est comprise entre -1 et 0.

Corrigé 8 *Baccalauréat 2021 Amérique du Nord* (*Retour à l'énoncé*)



1. Par lecture graphique : $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

1. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{b - a - b\ln x}{x^2}$.
2. En utilisant les lectures du **1.** :
   $f(1) = \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4$;
   $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;
   • On a $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln x}{x}$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites :
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. On a donc sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.
   On sait que sur $]0\ ;\ 1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ 1[$;
   Par contre sur $]1\ ;\ +\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ 1[$;
   $f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1\ ;\ 4)$ est le maximum de la fonction sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   La fonction f est donc croissante sur $]0\ ;\ 1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.
3. f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
   $f''(x) = \dfrac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4\ln x)}{x^4} = \dfrac{-4x + 8x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3}$.
4. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :
   $f''(x) = 0 \iff \dfrac{-4 + 8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8\ln x = 0 \iff -1 + 2\ln x = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$ (ou $\sqrt{\mathrm{e}}$).
   L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639$.
   Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

Corrigé 9 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* *(Retour à l'énoncé)*

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée* ;

— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

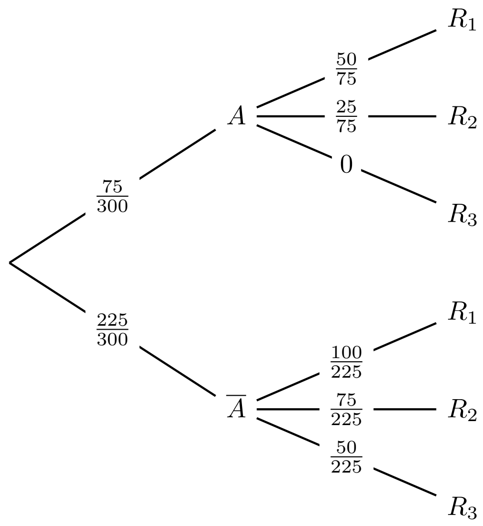
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;
R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. (a) La probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation est :
$P\left(A \cap R_2\right) = P(A) \times P_A\left(R_2\right) = \frac{75}{300} \times \frac{25}{75} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}$.

   (b) La probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $P\left(R_2\right)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$P\left(R_2\right) = P\left(A \cap R_2\right) + P\left(\overline{A} \cap R_2\right) = \dfrac{25}{300} + \dfrac{125}{300} \times \dfrac{75}{125} = \dfrac{25}{300} + \dfrac{75}{300} = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$.

   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. La probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* est :
$P_{R_2}(A) = \dfrac{P\left(A \cap R_2\right)}{P\left(R_2\right)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

   (a) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$P(R_1)$	$P(R_2)$	$P(R_3)$

   - $P\left(R_1\right) = P\left(A \cap R_1\right) + P\left(\overline{A} \cap R_1\right) = \dfrac{75}{300} \times \dfrac{50}{75} + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{100}{225} = \dfrac{50}{300} + \dfrac{100}{300} = \dfrac{150}{300} = \dfrac{1}{2}$
   - $P\left(R_2\right) = \dfrac{1}{3}$
   - $P\left(R_3\right) = P\left(A \cap R_3\right) + P\left(\overline{A} \cap R_3\right) = 0 + \dfrac{225}{300} \times \dfrac{50}{225} = \dfrac{50}{300} = \dfrac{1}{6}$

   Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	1	2	3
$p_i = P(X = x_i)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

   (b) L'espérance de cette variable aléatoire est : $E(X) = \sum(x_i \times p_i) = 1 \times \dfrac{1}{2} + 2 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67$.
Cela veut dire que le nombre de passages pour réussir l'examen est en moyenne de $1,67$.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.
   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.
   (a) On cherche un évènement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   $P(R_3)=\frac{1}{6}$ donc $P\left(\overline{R_3}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Le nombre $\frac{5}{6}$ est donc la probabilité de l'événement « R_1 ou R_2 », c'est-à-dire la probabilité qu'une personne prise au hasard réussisse l'examen à la première tentative ou à la deuxième.
   La probabilité que n personnes réussissent l'examen à la première ou à la deuxième tentative est de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.
   L'événement de probabilité $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$ est l'événement contraire du précédent, donc correspond à l'événement « au moins une personne n'a pas réussi l'examen à la première ou à la deuxième tentative », c'est-à-dire « au moins une personne a réussi l'examen à la troisième tentative ».

   On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1−(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

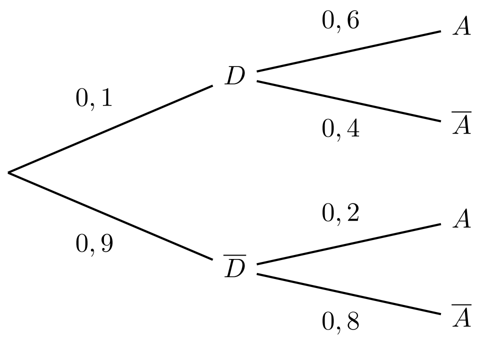
   (b) La valeur renvoyée par **seuil**(0.9) est la première valeur de n pour laquelle $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,9$.
   On résout cette inéquation :
   $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0,9 \iff 0,1>\left(\frac{5}{6}\right)^n \iff \ln(0,1)>\ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \iff \ln(0,1)>n\ln\left(\frac{5}{6}\right) \iff \dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}<n$
   $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\approx 12,6$ donc la commande **seuil**(0.9) renvoie la valeur 13.
   Il faut donc prendre $n=13$ personnes sur les 300 pour que la probabilité d'en avoir une qui a réussi l'examen à sa troisième tentative soit supérieure à $0,9$.

Corrigé 10 *Baccalauréat 2021 Métropole* *(Retour à l'énoncé)*
Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :
- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènement D et A respectivement.

1. On traduit la situation par un arbre pondéré :



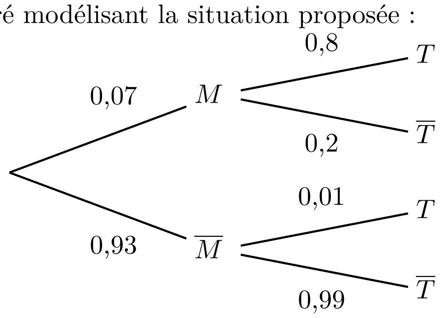
2. La probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école est : $P(D \cap A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.
3. La probabilité de l'évènement A est $P(A)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,9 \times 0,2 = 0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. La probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné est :
   $P_A(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,18}{0,24} = 0,75$.

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.
   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.
   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   La probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $p = 0,24$, et on choisit un échantillon de 7 candidats donc $n = 7$.
   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(7\,;\,0,24)$.
   (b) La probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école est :
   $P(X = 1) = \dbinom{7}{1} \times 0,24^1 \times (1 - 0,24)^{7-1} \approx 0,32$.
   (c) La probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école est : $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0,47 = 0,53$.
2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.
   (a) La variable aléatoire Y qui donne le nombre d'admis parmi les n candidats présentés suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,0,24)$.
   La probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école est :
   $P(Y = 0) = \dbinom{n}{0} \times 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.
   (b) On cherche à partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.
   On veut donc que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,99$ c'est-à-dire $1 - P(Y = 0) \geqslant 0,99$ ou encore $P(Y = 0) \leqslant 0,01$. On résout l'inéquation d'inconnue n : $0,76^n \leqslant 0,01$:
   $0,76^n \leqslant 0,01 \iff \ln(0,76^n) \leqslant \ln(0,01) \iff n \times \ln(0,76) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)}$
   Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,76)} \approx 16,8$ donc c'est à partir de 17 élèves que la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est supérieure ou égale à $0,99$.

Corrigé 11 *Baccalauréat 2021 Polynésie* (*Retour à l'énoncé*)

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. (a) On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

   (b) On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.

3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.

4. (a) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.

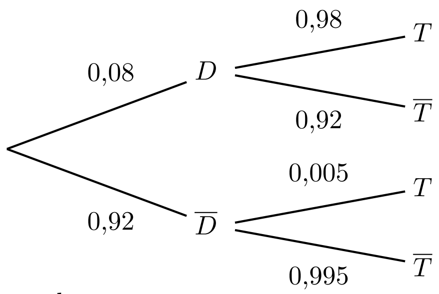
   (b) On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 =$
   $45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.

5. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que :
   $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en prenant le logarithme népérien :
   $\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$.
   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$.
   Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

Corrigé 12 *Baccalauréat 2021 Amérique du Nord (Retour à l'énoncé)*

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right)$: or
   $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784$ et
   $P\left(\overline{D} \cap T\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460$. Donc :
   $P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083$.

3. (a) La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(T)} = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millième près.

   (b) D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. (a) Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est $0,103$.
   La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

   (b) On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

   (c) La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :
   $0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millième près.
   Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :
   $1 - 0,581$, soit 0,419 au millième près.

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X=0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.
Il faut donc trouver n tel que :
$1 - 0,897^n \geqslant 0,75 \iff 1 - 0,75 \geqslant 0,897^n \iff 0,25 \geqslant 0,897^n$.
La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.
Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

Corrigé 13 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* (*Retour à l'énoncé*)
On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. | $\boxed{\textbf{b. } \text{La suite } (w_n) \text{ converge vers } 1.}$
c. La suite (u_n) est minorée par 1. | **d.** La suite (w_n) est croissante.

|| Application directe du théorème dit « des gendarmes ».

Corrigé 14 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* (*Retour à l'énoncé*)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$ | **b.** $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
$\boxed{\textbf{c. } f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}}$ | **d.** $f'(x) = (2+x^2)e^{x^2}$.

|| $f'(x) = 1 \times e^{x^2} + x \times 2xe^{x^2} = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$

Corrigé 15 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* (*Retour à l'énoncé*)
On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
$\boxed{\textbf{c. } \text{Il existe au moins un nombre réel } a \text{ dans l'intervalle } [0\,;\,1] \text{ tel que } h(a) = 1.}$
d. l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

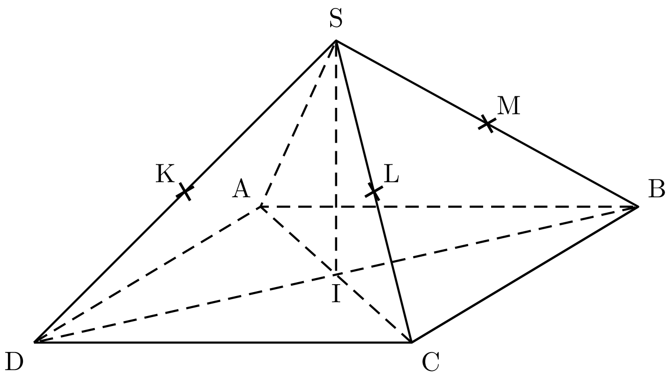
|| Application du théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé 16 *Baccalauréat 2021 Sujet 0* (*Retour à l'énoncé*)
Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 | **b.** 0 | $\boxed{\textbf{c. } \dfrac{1}{2}}$ | **d.** $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

Corrigé 17 *Baccalauréat 2021 Métropole* (*Retour à l'énoncé*)



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c.}\ \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

> On procède par élimination.
> - Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires ; on élimine **a.**
> - Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires ; on élimine **b.**
> - Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles ; elles sont donc coplanaires ; on élimine **d.**
>
> **Réponse c.**

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0) ; \mathrm{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

1. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b.}\ \left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

> - Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
> - Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
>
> **Réponse b.**

2. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b.}\ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

> **Réponse b.**

3. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{l c r}x&=&-1-t\\y&=&t\\z&=&-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\left\{\begin{array}{l c r}x&=&-1+2t\\y&=&0\\z&=&1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$ $\boxed{\textbf{c.}\ \left\{\begin{array}{l c r}x&=&t\\y&=&0\\z&=&1+t\end{array}\right.\ (t \in \mathbb{R})}$ **d.** $\left\{\begin{array}{l c r}x&=&-1-t\\y&=&1+t\\z&=&1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$; la seule représentation qui convienne est la c.

Réponse c.

4. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

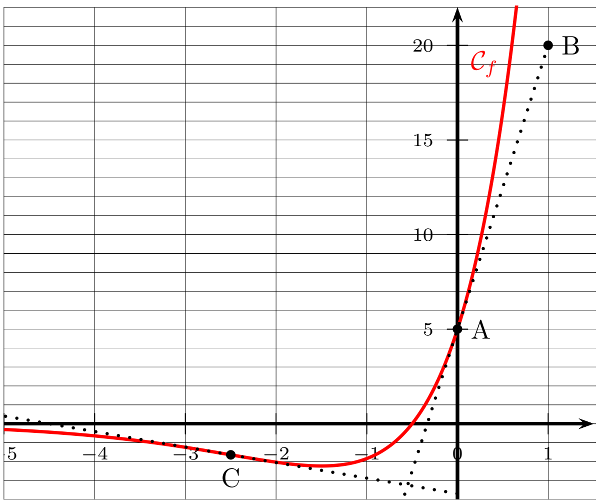
a. $y+z-1=0$ $\boxed{\textbf{b. } x+y+z-1=0}$ **c.** $x-y+z=0$ **d.** $x+z-1=0$

On procède par élimination.

- Le plan d'équation $y+z-1=0$ ne contient pas $\mathrm{C}\,(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$; on élimine **a.**
- Le plan d'équation $x-y+z=0$ ne contient pas $\mathrm{S}\,(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$; on élimine **c.**
- Le plan d'équation $x+z-1=0$ ne contient pas $\mathrm{B}\,(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$; on élimine **d.**

Réponse b.

Corrigé 18 *Baccalauréat 2021 Métropole Septembre* *(Retour à l'énoncé)*



1. On peut affirmer que :
   (a) $f'(-0,5)=0$
   Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $-0,5$ est manifestement positif Faux
   (b) si $x\in]-\infty\ ;\ -0,5[$, alors $f'(x)<0$
   Le nombre dérivé s'annule en à peu près en $x=-1,5$ Faux
   (c) $f'(0)=15$
   Graphiquement $f'(0)=\dfrac{20-5}{1-0}=15$ Vrai
   (d) la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$
   f' est négative sur $]-\infty\ ;\ -1,5[$ et positive sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ Faux
2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5\ ;\ 0)$.
   On peut affirmer que :
   (a) $a=10$ et $b=5$
   (b) $a=2,5$ et $b=-0,5$
   (c) $a=-1,5$ et $b=5$
   (d) $a=0$ et $b=5$
   Graphiquement $f(0)=5 \iff b\mathrm{e}^0=5 \iff b=5$;
   D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x)=a\mathrm{e}^x+(ax+b)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(ax+a+b)$.
   On a vu que $f'(0)=15 \iff a+b=15 \iff a+5=15 \iff a=10$: la **réponse a.** est vraie.

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

On peut affirmer que :

(a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

(b) La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

(c) Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

(d) $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

$f''(x) = 0 \iff (10x+25)\mathrm{e}^x = 0 \iff 10x+25 = 0$ (car $\mathrm{e}^x > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$) ; donc $f''(x) = 0 \iff x = -2,5$: C est donc l'unique point d'inflexion. **Réponse c.**

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
   - pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

   On peut affirmer que :

   (a) la suite (U_n) converge

   Non car par exemple si $U_n = -n$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ ces deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) diverge ;

   (b) pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

   Non avec $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ on a $V_n \geqslant 2$;

   (c) la suite (U_n) diverge

   Non avec par exemple $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, les deux suites vérifient l'énoncé et la suite (U_n) converge ;

   (d) la suite (U_n) est majorée

   On sait, d'après le cours que toute suite convergente est bornée ; donc la suite (V_n) est majorée et donc il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n \leqslant M$.

   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leqslant V_n$; on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \leqslant M$ et donc que la suite (U_n) est majorée. **Réponse d.**

Corrigé 19 *Baccalauréat 2021 Métropole* *(Retour à l'énoncé)*

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97 % des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.

Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a. 0 **b.** 1 **c.** 0,24 $\boxed{\textbf{d. } 0,76}$

   On cherche $P(X=0)$ qui vaut $\dbinom{9}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^9 \approx 0,76$.

   Réponse d.

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a. $\dbinom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ **b.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

   $\boxed{\textbf{c. } \dbinom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2}$ **d.** $\dbinom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

On cherche $P(X=2)$ qui vaut $\binom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7$.

Réponse c.

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X<1)$ **b.** $P(X \leqslant 1)$ **c.** $P(X \geqslant 2)$ $\boxed{\textbf{b.}\ 1-P(X=0)}$

On cherche $P(X \geqslant 1)$ qui vaut $1-P(X=0)$.

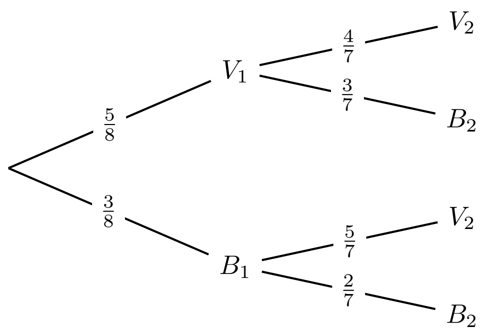
Réponse d.

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

Au départ, il y a 8 boules dans l'urne.
Après le premier tirage, il en reste 7. Si la boule du 1[er] tirage est verte, il reste 4 boules vertes et 3 boules blanches ; si la boule du 1[er] tirage est blanche, il reste 5 boules vertes et 2 boules blanches.
On construit un arbre de probabilités résumant la situation :



1. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ $\boxed{\textbf{b.}\ \frac{4}{7}}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

D'après l'arbre, $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$.

Réponse b.

2. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

$\boxed{\textbf{a.}\ \frac{5}{8}}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

D'après la formule des probabilités totales :
$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$

Réponse a.

6 Annexes

6.1 Annexe 1 : Quelques fautes d'orthographe en mathématiques courantes et à éviter !

A

Abscisses et non absices ou abcices ou abcisses ou absisses.
Algorithme et non algorythme ou algoritme.
B

Bernoulli et non Bernouilli.
C

Convergent et non convergeante.
Corollaire et non corrolaire.
D

Dichotomie et non dicothomie.
E

Exponentielle et non exponnentielle.
H

Hypoténuse avec <u>un</u> "h" et non hypothénuse.
Hypothèse avec <u>deux</u> "h" et non hypotèse.
I

Inclus et exclu Inclure et exclure se conjuguent de la même manière, sauf pour le participe passé et les adjectifs qui en dérivent. En cette affaire la difficulté est incluse et l'erreur n'est pas exclue..

Intercalaire et non intercallaire.
Intervalle et non interval.
L

Logarithme et non logarythme.
P

Parallélogramme et non... parrallélogramme ou paralélogramme.
Pythagore et non Pytagore.
Q

Quel que soit epsilon....
Quelles que soient les constantes A et B....
R

Résoudre je <u>résous</u> la question, elle <u>résout</u> le problème..
S

s'annule et non s'annulle.
T

Tangente et non tangeante.
Terme et non therme.
Thalès et non Talès.
Théorème et non téorème.

Traditionnellement, la *confiture de groseilles* prend un *s* à *groseilles* parce qu'en gros, on aperçoit la forme des fruits.

Alors que la *gelée de groseille*, qui est une masse informe, ne prend pas de *s* à *groseille*.

Donc la présence du *s* dépend du temps de cuisson.

6.2 Annexe 2 : Conseils, méthodes et astuces pour réviser une épreuve de mathématiques

6.2.1 Les prérequis

1. Faire des **fiches de cours**, une page A4 par chapitre, deux au max ;

2. Attention, les fiches sont destinées à être un résumé du cours et certains élèves résument un cours de 10 pages en 20 fiches. Si le fait de recopier peut aider à apprendre c'est certain, l'utilisation ultérieure des fiches est alors peu aisée. L'idée est tout de même de retrouver une définition ou un théorème rapidement.

3. Apprendre les **théorèmes** avec les hypothèses et surtout avec des **exemples** et **contre-exemples** associés. C'est essentiel en général et capital pour les exercices du bac type Vrai/Faux. Cela vous donne un argument rapide pour prouver qu'une assertion est fausse, le contre-exemple est votre ami ! Par exemple si vous cherchez une suite, ni croissante, ni décroissante, majorée, minorée, bornée, mais pas convergente, pensez à la suite numérique définie pour tout entier n par :

$$u_n = (-1)^n$$

6.2.2 Les révisions

1. Réviser c'est faire des mathématiques, pas recopier des mathématiques !
Réviser c'est chercher, se tromper, recommencer, butter, recommencer encore ... Ce n'est en aucun cas recopier une correction ! L'étape de vérification avec les corrections par exemple, devra intervenir après un temps conséquent de travail sur l'exercice. On apprend bien plus de ses erreurs !
Soyez heureux de vous être trompé sur une question et de voir ensuite la correction. Vous vous en rappellerez bien plus que d'un exercice réussi à condition d'y avoir passé du temps. L'idée étant de ne plus reproduire la même erreur !

2. Refaire quelques devoirs sur table.

3. Faire des **séances de révisions** sur des thèmes ciblés.

4. Pour se mettre en condition d'examen, se bloquer 3 ou 4 heures un matin et faire une des épreuves tombées lors des sessions antérieures.

5. Se ménager des pauses, faire du sport, sortir (pas le soir !), s'aérer ... ça c'est facile !

6.2.3 Pour le jour de l'épreuve

1. Ne surtout pas se surcharger en révisions la veille de l'épreuve.

2. Préparer sa calculatrice : piles neuves, piles de rechange... On peut prévoir une deuxième calculatrice, au cas où, mais elle ne doit pas être posée sur la table le jour de l'épreuve.

3. Préparer son matériel de géométrie.

4. Préparer sa trousse ! (encre et crayons ...)

5. Prévoir de la boisson, des barres de céréales, des bonbons ...

6.2.4 Pendant l'épreuve et après

1. Ne pas paniquer si le sujet semble difficile.
Dans ce cas, le barème est souvent très largement revu, il arrive parfois qu'une épreuve du bac ait un barème sur plus de 20 points. Nous avons déjà corrigé une épreuve comportant 24 points !

2. Lire au moins une fois le sujet dans son intégralité et commencez par l'exercice qui vous semble le plus simple.

3. Prendre une copie double par exercice est une astuce qui vous permet facilement de revenir sur une question non traitée.

4. Faire quelques pauses de 1 ou 2 minutes pour boire et manger !

5. Vérifier que vous rendez toutes vos copies.
En fin d'épreuve il arrive parfois qu'un élève range par inadvertance une copie avec ses brouillons dans son sac et ne la rende pas. Cela arrive tous les ans alors attention !

6.2.5 La copie

1. Une copie est faite pour être lue !
Ceci est rappelé dans la plupart des épreuves de mathématiques de concours, à juste titre.

2. Encadrez ou soulignez proprement TOUS les résultats.
C'est capital car cela va permettre de vous y retrouver rapidement lorsque vous devez réutiliser un résultat démontré quelques questions avant. En outre, la correction est bien plus aisée, le correcteur passera moins de temps à lire votre copie, il vous en sera reconnaissant et, cela arrive, il aura plus de chance de ne pas voir une énorme bêtise que vous aviez écrite dans la démonstration ... ! C'est du vécu, croyez-nous !

3. Utilisez le rouge avec parcimonie.
De façon générale, on écrit en noir ou en bleu sur sa copie, rien au crayon à papier (pas comme aux US) sauf pour les graphiques ou schémas. On peut écrire le numéro des questions en rouge, mais pas de phrases. Vous pouvez encadrer en rouge à la limite ou souligner mais éviter l'abondance de rouge ou de vert. Ces couleurs sont généralement réservées au correcteur. Le professeur de mathématiques a ses habitudes, il n'aime pas en changer, ne le contrariez pas !

4. C'est capital, il faut **numéroter avec soin chaque question** (1.a. ..) sans jamais la réécrire.
Les corrigés proposés sur le site sont très détaillés, avec des rappels de cours et les questions sont réécrites juste pour vous faciliter la lecture. Il ne faut pas faire cela le jour de l'épreuve, c'est trop de temps perdu !

5. Facilitez le travail du correcteur pour votre intérêt !
Le point précédent est essentiel car un correcteur déteste se perdre sur une copie. Il arrive parfois que l'on ne sache même plus à quelle question l'élève répond. Evitez de mettre en colère le correcteur, vous n'avez rien à y gagner !
Rappelez-vous cette maxime : *Si vous ne faites pas d'effort pour le correcteur, il n'en fera certainement pas pour vous !*
Il y a évidemment une part de subjectivité dans l'attribution des points, même si le barème est très détaillé.

6. Numérotez vos pages.
C'est obligatoire au bac, et bien plus long qu'il n'y parait surtout en fin d'épreuve, avec le stress. Un conseil, pendant le temps qui précède la distribution du sujet, numérotez déjà vos feuilles.

7. La note est arrondie à l'entier supérieur !
Garder à l'esprit qu'au bac, il n'y a pas de demi-point, on arrondit tout à l'entier supérieur. De ce fait, des quarts de points grappillés par-ci, par-là peuvent faire la différence pour une mention. Ne négligez donc aucune petite question et essayez de commencer les questions délicates.

8. Les consignes données aux correcteurs.
Les consignes données aux correcteurs sont claires : « *Toute recherche même partielle doit être valorisée. Le correcteur doit toujours se dire que même une réponse mal rédigée doit être plus valorisée qu'une absence de réponse.* »
Pour faire simple, essayez, même si le résultat ne vous semble pas bon, écrivez votre raisonnement sur la copie, lancez-vous, n'ayez pas peur. Un petit quelque chose est mieux que rien du tout !

9. Le brouillon oui mais avec mesure !
On a vu des élèves rédiger presque intégralement des questions, voir même des exercices entiers au brouillon, ce n'est pas possible ! Si vous faites cela, il vous sera impossible de finir l'épreuve en temps et en heure ! Le brouillon est fait pour effectuer quelques calculs, des bribes de démonstrations, c'est tout !

Un correcteur a généralement aussi passé beaucoup d'épreuves de mathématiques, il s'est sans doute aussi trompé sur sa copie, il a barré ses calculs proprement ... Même "le meilleur mathématicien de monde 2010", notre célèbre médaillé Fields Cédric Villani fait des erreurs en mathématiques. Il précise même qu'elles lui apprennent plus que ses réussites !
On ne vous sanctionnera jamais si vous barrez proprement (à la règle) une partie de vos calculs !

10. Ne jamais écrire dans la marge.
La marge, c'est l'endroit où le correcteur écrit généralement les points attribués à la question. Si vous écrivez dans la marge, les points sont écrits à un autre endroit et on a une probabilité importante de les oublier lors du compte final !

11. Répondez aux questions posées par une phrase.
Certaines copies ne comportent presque aucune rédaction, c'est horrible à lire !

12. Faites la différence !
Un schéma (les professeurs de mathématiques adorent ça), une belle rédaction, une copie propre vont permettre de vous distinguer des autres copies bâclées. Aérez la copie, sautez des lignes entre les questions, soignez l'orthographe !

13. Commencez toujours une question par un mot, une petite phrase d'introduction du style : *« On a .. ; Soit ... ; Pour tout réel x... ; Pour tout entier n ... ; On a montré que ... ; »*

14. Evitez d'écrire sur une même ligne "des mathématiques" et du "français".
Les corrigés types proposés sur le site respectent la plupart du temps cette règle qui est imposée dans le supérieur pour les écrits mathématiques, autant s'y préparer et c'est bien plus agréable à lire.
<u>Par exemple ne pas écrire :</u>
On a montré que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; u_{n+1} = 3 \times u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3. Son premier terme étant $u_0 = 5$, son terme général s'exprime sous la forme $\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; u_n = 5 \times 3^n$.
<u>Ecrivez plutôt :</u>
On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; u_{n+1} = 3 \times u_n$$

De ce fait, suite (u_n) est une suite géométrique de raison 3. Son premier terme étant $u_0 = 5$, son terme général s'exprime sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; u_n = 5 \times 3^n$$

6.2.6 Les exercices de mathématiques au baccalauréat

1. Dépendance des questions.
Les questions d'un exercice ou d'un problème sont souvent liées les unes aux autres. Pensez en particulier qu'une question commençant par « *En déduire que...* » doit utiliser le résultat de la question précédente.

2. Repérez si l'une des questions ne donne pas la réponse à une question située plus haut dans le texte. C'est très souvent le cas par exemple lors d'un calcul de dérivée.

3. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, ne vous obstinez pas. Laissez donc un espace et continuez, en supposant le résultat acquis. Vous pourrez revenir sur la question plus tard, surtout si vous avez pensé à utiliser l'astuce "une copie par exercice".

4. Attention à l'ordre des questions.
Vous ne pouvez pas utiliser à la question 2°) par exemple un résultat de la question 3°).
Si, en répondant à une question, vous trouvez un résultat qui vous est demandé dans une question suivante, c'est que vous n'avez pas fait appel à la bonne méthode. Ainsi, si pour prouver que le maximum de $f(x)$ est 5, vous êtes amené à calculer la dérivée $f'(x)$ alors que ceci est demandé plus loin, c'est qu'il y avait un moyen plus simple de répondre à la question.

4. Méthode imposée.
Vérifiez que le texte n'impose pas une méthode. Ainsi, si on vous demande de démontrer une inégalité par récurrence, utilisez un raisonnement par récurrence, même s'il existe une méthode plus rapide.

5. Quand vous appliquez un théorème, **vérifiez que les hypothèses sont réunies**. De même, vous devez adapter une formule en fonction des données de l'énoncé.
Par exemple pour calculer des distances avec les formules usuelles dans un répère du plan ou de l'espace, il faut que ce repère soit orthonormé.

6. Cohérence des résultats.
Vérifiez que vos résultats sont vraisemblables : une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, une aire est un nombre positif, une fonction numérique ne peut décroître vers l'infini, une fonction ne peut pas croître de 1 à -2 etc.

« Happy Hunger Games, and may the odds be ever in your favor. »
Effie Trinket, Hunger Games, 2012.