Coquillages & Poincaré

Recueil d'exercices - Annexe des Infinis

Terminale Option Mathématiques expertes

NASSIRI Mohamed

Recueil d'exercices (Annexe des Infinis)
Terminale Option Mathématiques expertes

Mohamed NASSIRI

Table des matières

Plusieurs exercices ont été repris et/ou inspirés des planches d'exercices de Yoann Morel, Paul Milan, David Delaunay et Jason Lapeyronnie.
Qu'ils en soient grandement remerciés ici !

Ad astra per aspera

1 Divisibilité

1.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1
1. Déterminer les diviseurs positifs de 38.
2. Déterminer les diviseurs positifs de 30.
3. En déduire les diviseurs positifs communs aux deux nombres.

Exercice 2
1. Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 35$.
2. Déterminer les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 - b^2 = 12$.

Exercice 3
Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient :
1. $x^2 = y^2 + 21$
2. $x^2 - 7xy = 17$

Exercice 4
Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :
1. $n^2 + n = 20$
2. $n^2 + 2n = 35$

Exercice 5
Déterminer les entiers relatifs n tel que :
1. $n + 3$ divise $n + 10$
2. $n + 1$ divise $3n - 4$

Exercice 6
Montrer que pour tout entier relatif a, 6 divise $a(a^2 - 1)$

Exercice 7
Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$
1. Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$
2. Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 8
Soient a, b et c trois entiers relatifs.
Supposons que b et c soient multiples de a, démontrer que $b + c$ est un multiple de a.

Exercice 9
1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminer tous les entiers n tels que $2n + 7$ divise $n - 3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer tous les entiers n tels que $2n + 5$ divise $n - 2$.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminer tous les entiers n tels que $4n + 1$ divise $n - 3$.

Exercice 11
On définit la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(n) = \frac{3n^2 + 2n - 1}{n + 4}$$

1. Déterminer les nombres a, b et c tels que :

$$f(n) = an + b + \frac{c}{n + 4}$$

2. Pour quelles valeurs de n l'image de n par la fonction f est-elle un entier ?

Exercice 12
Soit n un entier naturel.
1. Exprimer en fonction de n la somme S définie par $S = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{n-1}$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $7^n + 35$ est divisible par 6.

1.2 Division euclidienne

Exercice 13
Dans chacun des cas suivants, déterminer le quotient et le reste de de la division euclidienne de a par b :

1. $a = 67$ et $b = 4$ **2.** $a = -40$ et $b = 3$

3. $a = -51$ et $b = 3$ **4.** $a = -40$ et $b = 11$

Exercice 14
Soient a et b deux entiers tels que :
• Le reste de de la division euclidienne de a par 7 est 4.
• Le reste de de la division euclidienne de b par 7 est 6.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $a - b$ par 7.

Exercice 15
Soit n un entier naturel.
1. Démontrer que l'entier $A = n(n-2)(n+2)$ est divisible par 3.
2. Démontrer que l'entier $B = n(n+2)(n-5)(n+5)$ est divisible par 4.

Exercice 16
La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels

Exercice 17
1. Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.
2. Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes et les valeurs de x possibles ?

Exercice 18
Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.

Exercice 19
Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5.
Déterminer ce diviseur b.

Exercice 20
1. Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste dans division de a par 6 ?
2. Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles dans division de A par 18 ?

Exercice 21
1. On divise 439 par b, le quotient est 13.
Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?
2. Dans la division entre deux entiers positifs, le dividende est 857 et le quotient 32.
Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?

Exercice 22
La division de a par b donne $a = 625b + 8634$.
De quels naturels peut-on augmenter à la fois a et b sans changer de quotient.

Exercice 23
Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on note q le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b.
Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient de la division euclidienne de (ab^n-1) par b^{n+1}.

Exercice 24
1. Déterminer la division euclidienne de 1038 par 17.
2. En étudiant le carré $(61\times 17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de 1038^2 par 17.
3. En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de 1038^n par 17.

1.3 Congruences

Exercice 25
1. Démontrer que $115 \equiv 27[11]$ et simplifier son expression.
2. Démontrer que $-39 \equiv 27[11]$ et simplifier son expression.

Exercice 26
Soient a et b deux entiers.
1. On donne $a \equiv 16[5]$. Quel est le reste de la division euclidienne de a par 5 ?
2. On donne $b \equiv 17[3]$. Quel est le reste de la division euclidienne de b par 3 ?

Exercice 27
Montrer, en utilisant un tableau de congruence, que pour tout entier relatif n : $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

Exercice 28
1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{437} par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{329} par 13.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $12\,345^{2000}$ par 7.

Exercice 29
Soient deux entiers a et b tels que $a \equiv 7[13]$ et $b \equiv 4[13]$.
1. Donner le reste de la division euclidienne par 13 de :

a. $a+b$ **b.** ab **c.** a^3 **d.** a^2-b^2

2. Que dire de $2b-3a$?

Exercice 30
1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $6x \equiv 2[7]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $4x \equiv 0[10]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $7x \equiv 2[11]$.

Exercice 31
1. Vérifier que $2^4 \equiv -1(17)$ et $6^2 \equiv 2(17)$.
2. En déduire le reste de la division par 17 des nombres 1532^{20} et 346^{12}.

Exercice 32
Le nombre n désigne un entier naturel.
1. Démontrer que $\left(n^2+5n+4\right)$ et $\left(n^2+3n+2\right)$ sont divisible par $(n+1)$.
2. Déterminer n tel que $\left(3n^2+15n+19\right)$ est divisible par $(n+1)$.
3. En déduire que $\left(3n^2+15n+19\right)$ n'est jamais divisible par $\left(n^2+3n+2\right)$.

Exercice 33
1. Démontrer à l'aide d'un tableau de congruence que pour tout entier n, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8
2. Résoudre alors, dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $(n+3)^2-1 \equiv 0(8)$

Exercice 34
1.a. Déterminer les restes, suivant les valeurs de n, de la division de 3^n par 11?
b. En déduire les entiers n pour lesquels 3^n+7 est divisible par 11 . **c.** En déduire que $135^{2021} \equiv 3(11)$
2. Déterminer les entiers n tels que 2^n-1 soit divisible par 9 .

Exercice 35
1. Déterminer les restes possibles dans la division de $4x$ par 9 suivant les valeurs de l'entier relatifs x.
2. Résoudre alors : $4x \equiv 5(9)$.

Exercice 36
1. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 7^n dans la division par 10.
2. En déduire les entiers n tels que 7^n-1 est divisible par 10.
3. En déduire le chiffre des unités de 7^{98}

2 Matrices et opérations élémentaires

2.1 Notion de matrice

Exercice 37
1. Écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de format $(3,4)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $a_{11} = -2, a_{24} = 6$ et $a_{31} = 5$
2. Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ de format $(3,3)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $b_{13} = 2, b_{22} = 5$ et $b_{32} = -6$
3. Écrire la matrice $C = (c_{ij})$ de format $(4,2)$ dont tous les coefficients sont nuls exceptés les coefficients suivants : $c_{31} = -5, c_{42} = 1, c_{41} = 7$ et $c_{12} = -9$

Exercice 38
On considère C une matrice carrée d'ordre 3.
Pour tous i et j compris entre 1 et 3, le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice C est donné par :

$$c_{i,j} = i + 3j$$

Écrire la matrice C.

Exercice 39
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1. $a_{ij} = i + j$ **2.** $a_{ij} = i^3 + 3j$ **3.** $a_{ij} = 2i - j$ **4.** $a_{ij} = |2i - j|$

Exercice 40
Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1. $n = 2, p = 4, a_{ij} = 2ij$ **2.** $n = 2, p = 3, a_{ij} = j^2 - i$ **3.** $n = 3, p = 3, a_{ij} = \dfrac{i}{j}$

Exercice 41
Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1. $n=4, p=5, a_{ij} = 2i-j$ **2.** $n = 3, p = 3, a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i \geqslant j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ **3.** $n = 3, p = 4, a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } j \text{ est pair} \\ j \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 42
Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1. $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i + 1 \text{ si } i < j \\ j - 2 \text{ si } i > j \end{cases}$ **2.** $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 3 \text{ si } i < j \\ -2 \text{ si } i > j \end{cases}$

Exercice 43
Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
Déterminer l'ensemble des coefficients vérifiant chaque égalité donnée

1. $i = j$ **2.** $i = j + 1$ **3.** $i = j - 1$ **4.** $i + j = n$

Exercice 44
1. Écrire la matrice $B = (b_{ij})$ de format $(2,3)$ dont les coefficients sont définis par :
Pour tout $1 \leq i \leq 2$ et $1 \leq j \leq 3, b_{ij} = 2^{i-j}$.
2. Écrire la matrice $C = (c_{ij})$ de format $(4,4)$ dont les coefficients sont définis par :
Pour tout $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 4$, $\begin{cases} c_{ij} = |i - j| \text{ si } i \neq j \\ c_{ij} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

2.2 Calcul matriciel

Exercice 45

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0,5 & -1,5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 2,5 & -3 \\ -8 & 2 & -0,5 \end{pmatrix}$

Calculer $A+B$; $A-B$; $-2A$; $3B$ et $3B-2A$.

Exercice 46

Déterminer la valeur de a telle que :

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5a & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 1 \\ 11 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -19 & 18 \end{pmatrix}$$

Exercice 47

Déterminer les réels x et y tels que :

$$x\begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 48

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

Exercice 49

Déterminer les réels α, β et γ tels que :

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 3 \\ \alpha+\beta & 10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 8 & \gamma \\ 1,5\alpha - 0,5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 50

On donne $L = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Calculer (si possible) $L \times C$ et $C \times L$.

Exercice 51

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A \times C$, $B \times A$ et $A \times B \times C$.

Exercice 52

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA.

Exercice 53

On pose $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(1) Calculer R^2.
(2) Calculer R^3.
(3) En déduire les matrices R^4, R^5, R^6 et R^{2022}.

Exercice 54

Calculer les éléments a, b, c, d de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 6 & c & d \end{pmatrix}$ pour que :

$$A \times \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$$

Exercice 55
Soit $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels non nuls.
Déterminer les éléments de la matrice J telle que $M = aI_2 + bJ$.

Exercice 56
Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$
1. Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.
2. Calculer M^2.
2. En déduire A^2.

Exercice 57
Écrire un algorithme calculant la somme de deux matrices. Il testera d'abord si la somme est possible, sinon il enverra un message d'erreur.

Exercice 58
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 1 \\ 8 & -5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et M la matrice carrée d'ordre 3 telle que $a_{12} = 2$ $a_{22} = -3, a_{32} = 1$ et $a_{ij} = 0$ partout ailleurs.
1. Calculer MA et MB.
2. Expliquer le résultat obtenu.

Exercice 59
$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
1. Les matrices A et B commutent-elles ?
2.a. Montrer que A et M commutent si, et seulement si $\begin{cases} y = -2z \\ t = x + z \end{cases}$
b. Montrer que les coefficients de A, B et de l'identité d'ordre 2 vérifient ce système.
3. Soit C une matrice qui commute avec A. Démontrer que $ABC = CBA$.

Exercice 60
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = A + B$.
1. Calculer C^2.
2. Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.
3. Pourquoi n'a-t-on pas $C^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 61
Soit A et B deux matrices carrées commutatives. Développer les expressions suivantes :

1. $(2A + I)(I - A)$ **2.** $(A + 2B)(B - A)$ **3.** $(A + 2I)^2$ **4.** $(2A - B)^2$

Exercice 62
Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c et d réels. On souhaite résoudre l'équation $X^2 = I$.
1. Montrer que, si $b = 0$, les solutions de l'équation ne dépendent que de c.
2. Montrer que, si $b \neq 0$, les solutions sont telles que :

$$c = \frac{1 - a^2}{b} \text{ et } d = -a$$

Exercice 63
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2, puis vérifier que $A^3 = 2I$.
2. En déduire A^{3n}, A^{3n+1} et A^{3n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.3 Inverse d'une matrice

Exercice 64
Préciser, dans chacun des cas suivants, si la matrice B est la matrice inverse de la matrice A :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 1,7 \\ 0 & -0,2 & -0,1 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$

Exercice 65
Dans chacun des cas suivants, justifier si la matrice A est inversible ou non.
Lorsque c'est possible, déterminer A^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ **3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 66
Pour chaque matrice, déterminer si elle inversible et, si oui, calculer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 67
Pour chaque matrice, déterminer si elle inversible et, si oui, calculer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 68
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A^2 + A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 69
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A^2 - 3A$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 70
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Démontrer que $2A - A^2 = I$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 71
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer A^2, en déduire l'inverse de la matrice A.
2. Calculer A^3 et A^4. Quel est l'inverse de la matrice A^2 ?

Exercice 72
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
1. Calculer A^2 et A^3.
2. Vérifier que $A^4 = I_2$.
3. Déduire de la question précédente l'inverse de la matrice A.
4. On pose $B = A^2$. Démontrer, sans calculer l'inverse de B, que $B^{-1} = B$.

Exercice 73

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$A^2 = \alpha \times A + \beta \times I_3$$

2. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Déterminer l'expression de A^{-1}.

Exercice 74

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 2 & -1 \\ 14 & -9 \end{pmatrix}$

Calculer le produit AB. Peut-on conclure que B est l'inverse de A ?

Exercice 75

Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Soit $D = P^{-1}MP$, calculer D et D^2.
3. Vérifier que $M^2 = PD^2P^{-1}$.
4. On admet que pour tout entier n, $D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Calculer M^5.

Exercice 76

Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ où a et b sont deux rééels. Calculer a et b pour que $T = T^{-1}$.

Exercice 77

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. On note P^{-1} la matrice inverse de la matrice P. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Calculer D^2, D^3 et D^4.
4. Calculer A^2, A^3 et A^4.

Exercice 78

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. En déduire A^6 puis A^{3n} où n est un entier naturel non nul.
3. Calculer l'inverse de la matrice A^3.
4.a. Développer le produit $(A - I_3) \times \left(A^2 + AI_3 + {I_3}^2\right)$.
4.b. En déduire l'inverse de la matrice $B = A - I_3$

Exercice 79

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.
a. Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
b. Montrer que la matrice $\lambda \cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
2. On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fausse : $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

2.4 Systèmes linéaires

Exercice 80

Soit le système (S) : $\left\{\begin{array}{lcl} 3x+4y & = & 2 \\ 2x+3y & = & -1 \end{array}\right.$.

1. Exprimer le système (S) sous la forme $AX = B$ où X et B sont des matrices colonnes.
2. Déterminer la solution du système (S).

Exercice 81

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice inverse de A.
2. En déduire la résolution des systèmes suivants :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 1 \\ -11x+7y & = & -1 \end{array}\right. . \quad (S) : \left\{\begin{array}{rcl} 5x-3y & = & 23 \\ -11x+7y & = & -51 \end{array}\right. .$$

Exercice 82

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y+4z & = & 2 \\ 2y+3z & = & 3 \\ x+2y+3z & = & 5 \end{array}\right.$.

1. Vérifier que la matrice A' est l'inverse de la matrice A.
2. Exprimer le système (S) sous la forme $AX = B$ où X et B sont des matrices colonnes.
3. En déduire la solution du système (S).

Exercice 83

Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants avec la calculatrice ou un logiciel de calcul formel :

1. $\left\{\begin{array}{r} 3x-3y-2z=0 \\ 3x+y+z=-2 \\ -2x+3y+2y=-1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{r} 2x-3y+z=-8 \\ -3x+2y-3z=3 \\ x-y+z=-1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{r} -x-3y-2z=-1 \\ -3x-2y+2z=0 \\ 3x+3y-z=-1 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{r} -2x-3y-2z=2 \\ -3x-3y+2z=1 \\ x+2y+3z=-2 \end{array}\right.$

Exercice 84

Déterminer, si c'est possible, deux réels a et b vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Exercice 85

Déterminer, si c'est possible, trois réels a, b et c vérifiant l'égalité donnée.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 86

À l'aide des matrices mais sans machine, résoudre le système suivant (on discutera des solutions suivant les valeurs de θ) : $\left\{\begin{array}{rcl} \cos(\theta)x-\sin(\theta)y & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\theta)x+\sin(\theta)y & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

2.5 Récurrence sur les matrices

Exercice 87

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \neq 0$, l'on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 88

Soit la matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. A est triangulaire supérieure. Que dire de $A^\top$?
b. Calculer $A + A^\top - I$.
2. a. Calculer A^2, A^3, A^4 et conjecturer A^n.
b. Démontrer la conjecture par récurrence.

Exercice 89

Montrer que pour tout entier nat urel non-nul n, on a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 90

On considère la matrice B carré d'ordre 3 définie par : $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Etablir, à l' aide d' un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , la relation : $B^n = B^2$

Exercice 91

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Etablir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 92

Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Exercice 93

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^{2n} = 5^n I_n$.
3. Calculer A^{2022}.

Exercice 94

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposer une conjecture pour A^n, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 95

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposer une conjecture pour A^n, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

3 Nombres complexes d'un point de vue algébrique

3.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 96
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2 + 2i - 3i - 3$

2. $z_5 = 2(6 - 5i) - 3(4 + 2i)$

3. $z_2 = -2 + 3i - (3 - 3i)$

4. $z_6 = (1 - i)^2$

5. $z_3 = i - (2 + 3i)$

6. $z_7 = (5 + 3i)^2$

7. $z_4 = 2i(1 - i) - 3i(1 + i)$

8. $z_8 = i\sqrt{2}(2\sqrt{2} - i) + 2i\sqrt{3}(i - \sqrt{3})$

Exercice 97
1. Calculer i^2, i^3, i^4 et i^5.
2. Calculer i^{4n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire i^{4n+1}, $i^{4n} + 2$ et i^{4n+3} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 98
On pose $j = -\frac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.
1. Calculer j^2, j^3 puis j^n suivant les valeurs de l'entier naturel n.
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Calculer la somme $S' = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2021} + j^{2022}$.

Exercice 99
Soient a et b deux réels.
On pose $z_1 = a + 3i - i(b - 2i)$ et $z_2 = 3 + i$.
1. À quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre z_1 est-il un réel ?
2. À quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre z_1 est-il un imaginaire pur ?
3. À quelle(s) condition(s) sur a et b les nombres complexes z_1 et z_2 sont égaux ?

Exercice 100
Déterminer les réels x et y pour que l'on ait : $(2i + 1)x + (-1 + i)y = 1 + 2i$.

Exercice 101
Donner, sous forme algébrique, le conjugué de chacun nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 3 - 11i$

2. $z_4 = i - 3 + 2i$

3. $z_2 = 8i$

4. $z_5 =(3 + i)(-11 - 2i)$

5. $z_3 = 2i - 7$

6. $z_6 = (1 - 2i)^2$

Exercice 102
Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $(2 + 3i) + (-1 + 6i)$

2. $(5 + i) - (3 - 2i)$

3. $(1 + i)(3 - 2i)$

4. $(4 + i)(-5 + 3i)$

5. $(2 - i)^2$

6. $(x + iy)(x' + iy')$

7. $(x + iy)^2$

8. $(2 - 3i)(2 + 3i)$

9. $(a + ib)(a - ib)$

Exercice 103 *En arithmétique*
L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est l'ensemble des entiers de Gauss, c'est à dire les nombres complexes qui peuvent s'écrire sous la forme : $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est stable pour l'addition et le produit, c'est à dire que la somme et le produit de deux entiers de Gauss sont des entiers de Gauss.

3.2 Nombres complexes conjugués

Exercice 104
Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{1}{i}$ **2.** $z_4 = \dfrac{3-2i}{i}$ **3.** $z_2 = \dfrac{1}{1-i}$

4. $z_5 = \dfrac{3+5i}{5-3i}$ **5.** $z_3 = \dfrac{1}{3-4i}$ **6.** $z_6 = \dfrac{1-3i}{(-1+2i)(1-i)}$

Exercice 105
Donner, sous forme algébrique, le conjugué de chacun nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{1}{5+9i}$ **2.** $z_2 = \dfrac{2-3i}{8+6i}$

Exercice 106
Soit $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 1-i$.
Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

1. $z_1^2 - 2z_2$ **2.** $z_1 z_2^2$ **3.** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **4.** $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}$ **5.** $\dfrac{1}{z_1^2} + \dfrac{1}{z_2^2}$

Exercice 107
Soit les nombres complexes $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$.
1. Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.
2. Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 108
On pose $Z = 1 + iz$ où $z \in \mathbb{C}$.
Démontrer que :

$$Z \text{ est un réel} \Longleftrightarrow z \text{ est un imaginaire pur}$$

Exercice 109
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $-2z + 3 = iz + 1 - i$ **2.** $5\overline{z} = 3 - i$ **3.** $3(1+i)z - 2 = 2 - iz$

4. $(3+i)\overline{z} - 2 + 4i = 0$ **5.** $(3+5i)z = 1 - z$ **6.** $(1+5i)\overline{z} - 2 = 2 + i\overline{z} + \overline{z}$

Exercice 110
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z - 2i\overline{z} = -5 - i$ **2.** $iz + \overline{z} - 3 = 7 - \overline{z} + 5i$

Exercice 111
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

1. $5\overline{z} = 4 - i$ **2.** $(1+i)\overline{z} + 1 - i = 0$ **3.** $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

Exercice 112
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$$

Exercice 113
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 &= 4i - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} &= 2 \end{cases}$$

Indication : On commencera par écrire le système uniquement en fonction de z_1 et z_2.

3.3 Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 2

Exercice 114
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$ **2.** $z^2-3z+18=0$ **3.** $z^2+9z-4=0$ **4.** $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

Exercice 115
On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.
1. Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ.

Exercice 116
Donner les solutions de l'équation : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 117
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 118
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\overline{z}+\dfrac{1}{4}=0$.

Exercice 119
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$.

Exercice 120
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 121
On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-4z^3+4z^2-4z+3$.
1. Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z)=(z^2+1)Q(z)$.
2. En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 122
Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i$.
1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z)=(z-i)(z^2+pz+q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 123
Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=3z^3+(1+6i)z^2+2(8+i)z+32i$.
1. Vérifier que $z_0=-2i$ est une racine de P.
2. En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 124
Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+(1-4i)z-2i$.
1. Trouver le réel α tel que $P(i\alpha)=0$.
2. Trouver les nombres complexes p et q tels que $P(z)=(z-i\alpha)(z^2+pz+q)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 125
Soit P le polynôme défini par $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+(1-4i)z-2i$.
1. Trouver le réel α tel que $P(i\alpha)=0$.
2. Trouver les nombres complexes p et q tels que $P(z)=(z-i\alpha)(z^2+pz+q)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice 126
Trouver les complexes p et q tels que l'équation : $z^2+pz+q=0$ admette pour solutions les nombres : $1+2i$ et $3-5i$.

Exercice 127
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations bicarrées suivantes :
1. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
2. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

Exercice 128
Soit l'équation : $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$
1. Montrer que -3 est une solution de l'équation.
2. Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 129
Soit l'équation : $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$
1. Trouver une racine évidente.
2. Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 130
Soit l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
1. Trouver une racine évidente.
2. Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 131
1. Déterminer l'ensemble des racines du polynôme : $P = iz^2 - 2iz + 3i$.
2. On considère le polynôme : $Q = iz^2 + 2z - 10i$.
a. Vérifier que le nombre complexe z_1 est une racine du polynôme Q où : $z_1 = -3 + i$.
b. Déterminer la forme factorisée du polynôme Q.

Exercice 132
On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$
1. Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

Exercice 133
On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$
1. Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = \left(z^2 + az + b\right)\left(z^2 + 4z + 2a\right)$
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.
Indication : On pourra chercher les deux nombres complexes a et b réalisant la factorisation : $Q = (z + 3 - i)(az + b)$.

Exercice 134
Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$
1. b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(ib)$.
2. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$$

4. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Exercice 135
Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (E_λ) dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$x^2 - 3 \cdot x + 4 = \lambda$$

Pour quelles valeurs de λ, l'équation (E_λ) admet deux solutions distinctes conjuguées.

Exercice 136
On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ par la relation :

$$f : z \to \frac{z - 4}{z - 2}$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par cette fonction.

4 PGCD et applications

4.1 PGCD

Exercice 137
Déterminer les entiers naturels n tels que :

1. $n \leqslant 200$ et $\text{PGCD}(n, 324) = 12$. **2.** $n \leqslant 500$ et $\text{PGCD}(n, 378) = 54$. **3.** $n \leqslant 400$ et $\text{PGCD}(n, 150) = 6$.

Exercice 138
Trouver tous les couples d'entiers naturels (a, b) avec $a < b$ tels que :

1. $\begin{cases} ab = 432 \\ \text{PGCD}(a, b) = 6 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} ab = 7776 \\ \text{PGCD}(a, b) = 18 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} a + b = 24 \\ \text{PGCD}(a, b) = 4 \end{cases}$

Exercice 139
Si on divise 4294 et 3521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste. Quel est cet entier ?

Exercice 140
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des couples suivants :

1. $(144, 840)$ **2.** $(202, 138)$ **3.** $(441, 777)$ **4.** $(2004, 9185)$

Exercice 141
À l'aide de l'algorithme d'Euclide, dire si les couples d'entiers suivants sont premiers entre eux.
1. $(4847, 5633)$
2. $(5617, 813)$

Exercice 142
Trouver tous les couples d'entiers naturels (m, n) tels que :

1. $\begin{cases} m + n = 72 \\ \text{PGCD}(m, n) = 72 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} m^2 - n^2 = 5440 \\ \text{PGCD}(m, n) = 8 \end{cases}$

Exercice 143
On désigne par p un entier entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n l'entier : $A_n = 2^n + p$.
On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}
1. Montrer que d_n divise 2^n.
2. Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p.
Justifier.

Exercice 144
1. Déterminer le PGCD de deux entiers naturels pairs consécutifs.
2. Déterminer le PGCD de deux entiers naturels impairs consécutifs.

Exercice 145
1.a. En supposant que $a = 9p + 4q$ et $b = 2p + q$, démontrer que les entiers a et b d'une part ; p et q d'autre part ont le même PGCD.
b. Démontrer que les entiers $9p + 4$ et $2p + 1$ sont premiers entre eux.
2. Déterminer le PGCD des entiers relatifs $9p + 4$ et $2p - 1$ en fonction des valeurs de p.

Exercice 146
Soit a et b deux entiers naturels avec $a > b$. Montrer l'équivalence :

$$\frac{a}{b} \text{ est irréductible} \iff \frac{a-b}{ab} \text{ est irréductible.}$$

4.2 Nombres premiers entre eux et théorème de Bézout

Exercice 147
1. Pourquoi existe-t-il 2 entiers relatifs u et v tels que $626u + 236v = 2$?
Déterminer u et v à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. A l'aide de votre calculatrice, déterminer 2 entiers relatifs u et v tels que $39u + 28v = 1$.
Que peut-on en déduire concernant 39 et 28.
3. Déterminer tous les entiers x et y tels que $x \leqslant y$, PGCD$(x; y) = 14$ et $x + y = 168$.

Exercice 148
1. n est un entier naturel, $a = 7n + 4$ et $b = 5n + 3$.
Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux.
2. Montrer que deux entiers consécutifs non nuls sont premiers entre eux.
3. Montrer que deux entiers impairs consécutifs sont premiers entre eux

Exercice 149
Montrer que les fractions suivantes sont irréductibles pour tout entier naturel n :

1. $\dfrac{n}{2n+1}$ **2.** $\dfrac{9n+1}{6n+1}$ **3.** $\dfrac{14n+3}{5n+1}$

Exercice 150
En utilisant le théorème de Bézout, montrer que les couples ci-dessous définissent un couple d'entiers premiers entre eux :

1. $(10; 3)$ **2.** $(15; 11)$ **3.** $(5; 17)$

Exercice 151
1. Montrer que 87 et 31 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs (x, y) tel que $87x + 31y = 1$.

Exercice 152
1. Montrer que 38 et 45 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs (x, y) tel que $38x + 45y = 1$.

Exercice 153
1. Montrer que 41 et 25 sont premiers entre eux à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. En remontant cet algorithme, déterminer un couple d'entiers relatifs (x, y) tel que $41x - 25y = 1$.

Exercice 154
1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que 368 et 117 sont premiers entre eux.
2. En déduire deux entiers u et v tels que $368u + 117v = 1$.

Exercice 155
On considère deux entiers naturels x et y.
Montrer que si x et y sont premiers entre eux alors il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.

Exercice 156
Soit n un entier relatif. On définit la valeur des entiers a et b en fonction de celle de n par : $a = 3n - 1$; $b = -2n + 1$.
Montrer que les entiers a et b sont premiers entre eux quelque soit la valeur de l'entier naturel n.

Exercice 157
Etablir que, quelque soit la valeur de n, les deux entiers $n + 3$ et $-2n^2 - n + 14$ sont premiers entre eux.

Exercice 158
Montrer que pour tout entier n, les entiers $2n^2 + 10n + 13$ et $n + 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 159
On considère l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.
1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x; y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

4.3 Equations diophantiennes

Exercice 160
Soit l'équation $4x–3y = 2$.
1. Sans calcul, dire pourquoi cette équation admet des solutions entières.
2. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
3. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 161
Soit l'équation $3x–4y = 6$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 162
Soit l'équation $5x + 8y = 2$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 163
Soit l'équation $51x - 26y = 1$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 164
Soit l'équation $-7x + 25y = 1$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 165
Soit l'équation $7x - 6y = 1$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

Exercice 166
Soit l'équation $13x–23y = 1$.
1. Déterminer un couple d'entiers solution de cette équation à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers solutions de cette équation.

4.4 Théorème de Gauss

Exercice 167
Soit n un entier naturel.
On pose $x = n(n^4–1)$.
1. Montrer que x est divisible par 2.
2. Montrer que x est divisible par 10.

Exercice 168
Soit n un entier naturel.
On pose $x = 11n^2(n^2 + 11)$.
1. Montrer que x est divisible par 6.
2. Montrer que x est divisible par 66.

Exercice 169
1. Montrer que si $x \equiv 0 \mod 3$, $x \equiv 0 \mod 5$ et $x \equiv 0 \mod 7$ alors $x \equiv 0 \mod 105$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 6.

Exercice 170
Déterminer l'ensemble des couples $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation : $12x = 13y$.

Exercice 171
Soit x et y deux entiers vérifiant l'égalité : $y(y - x) = x(2 - x)$.
On suppose que l'entier x est un entier premier.
1. Démontrer que l'entier x divise y.
2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$:
a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
b. En déduire les valeurs possibles de k.

Exercice 172
On considère le polynôme $A = n^3–3n^2 + n–3$ où $n \in \mathbb{Z}$.
1. Etablir la factorisation : $A = (n–3)(n^2 + 2)$.
2. Prouver que l'entier A est divisible par 12 pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 173
On considère le polynôme $6n^3–7n^2 - 5x + 1$ où $n \in \mathbb{Z}$.
1. Etablir la factorisation : $A = (6n - 1)(n^2 - n - 1)$.
2. Etablir que pour tout entier relatif n, l'entier A n'est pas divisible par 6.

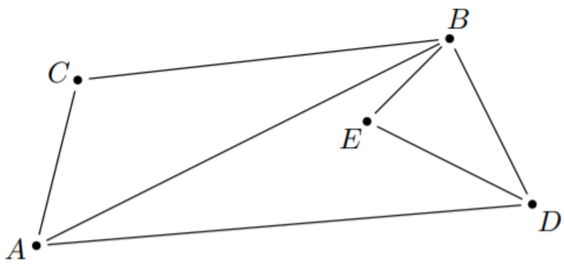
5 Théorie des graphes

5.1 Caractéristique d'un graphe et matrice d'adjacence

Exercice 174

On considère le graphe ci-contre.

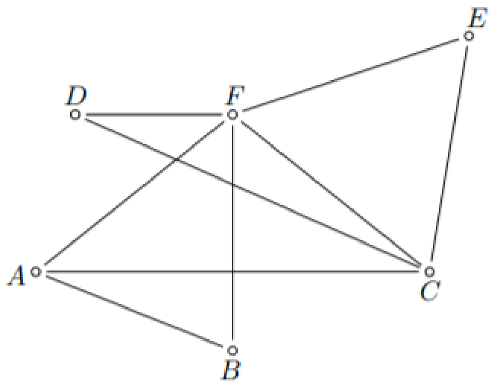
1. Donner l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré de chaque sommet.
3. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.



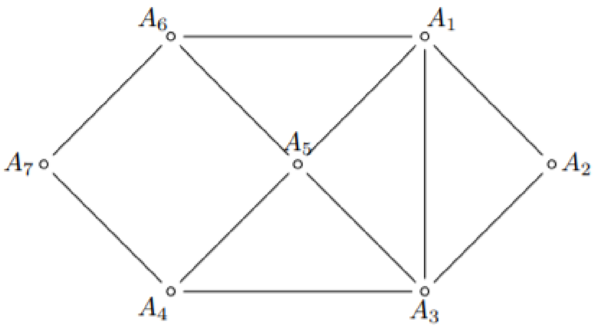
Exercice 175

On considère le graphe ci-contre :

1. Donner l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré de chaque sommet.
3. La somme des degrés de tous les sommets est-elle égale au double du nombre d'arêtes ?
4. Ce graphe est-il simple ?

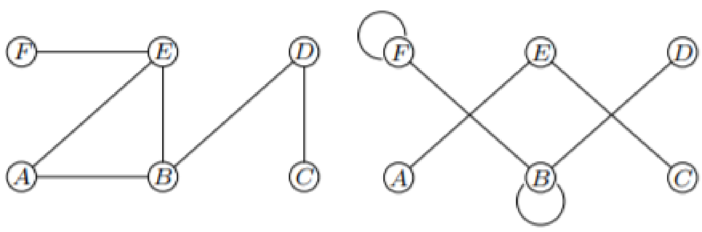


Exercice 176
On considére les deux graphes ci-dessous :



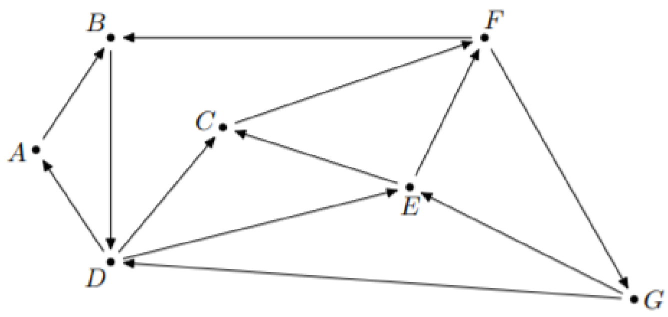
Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exercice 177
Le graphe ci-dessous représente 7 villes reliées par des routes :



Préciser si ces graphes sont connexes ou pas.

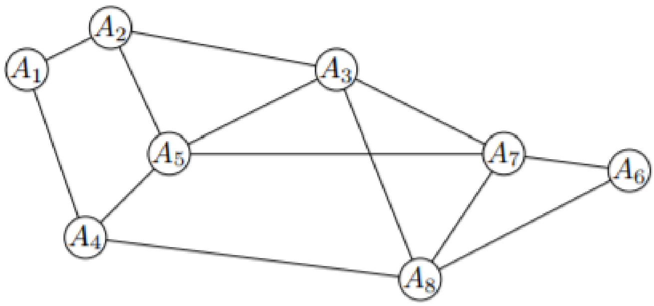
Exercice 178



Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exercice 179

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les huit villes notées de A_1 à A_8, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe G ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Donner l'expression de la matrice M d'adjacence du graphe G.

Exercice 180

Un site de rencontre prend en compte quatre critères : aimer les musées ; aimer le sport ; aimer les rencontres et aimer la montagne. Les personnes A, B, C, D et E sont inscrites sur ce site. Leurs profils sont inscrits dans le tableau suivant :

	Aime la montagne	Aime les musées	Aime le sport	Aime les rencontres
A	oui	non	oui	non
B	non	non	oui	oui
C	non	oui	non	non
D	oui	non	oui	oui
E	oui	oui	oui	non

On admet que deux personnes sont compatibles si elles ont au moins deux affinités en commun.
Construire un graphe modélisant les compatibilités possibles entre les inscrits puis en donner la matrice d'adjacence.

Exercice 181

Monsieur et madame X assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de mains ont été échangées. Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois. M. X constate que les autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.
Combien de poignées de mains M. X a-t-il échangé avec les autres membres de la réunion ?

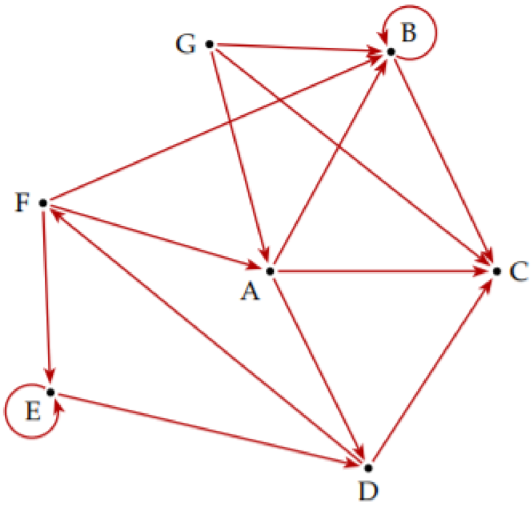
Exercice 182
Lors d'une soirée, certaines personnes se serrent la main.
1. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.
2. La conjecture : « Au cours de la soirée, deux personnes ont serré le même nombre de mains » est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 183
Est-il possible de tracer cinq segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement trois autres ?

Exercice 184
Pour chacune des listes suivantes, déterminer s'il existe un graphe simple admettant cette liste pour liste des degrés des sommets. S'il existe un tel graphe, le dessiner, sinon expliquer pourquoi.
1. $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ **2.** $(2, 3, 3, 4, 4, 5)$ **3.** $(1, 1, 1, 3)$ **4.** $(1, 1, 2, 4, 4)$ **5.** $(2, 3, 3, 4, 5, 6, 7)$

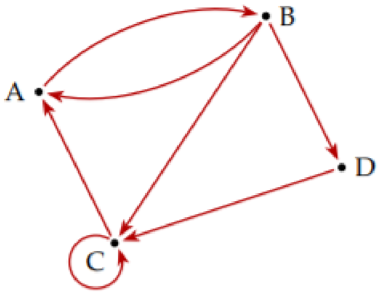
Exercice 185
1. Quel est le nombre d'arêtes du graphe simple G si la liste des degrés des sommets est $(2, 2, 3, 3, 4)$?
2. Dans un graphe simple d'ordre n, quel est le nombre maximal d'arêtes ?

Exercice 186
On considère le graphe orienté ci-dessous.



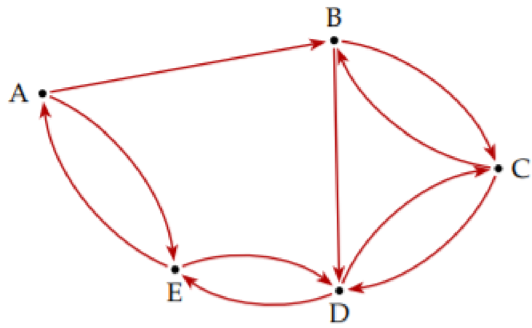
1. Déterminer l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré de chaque sommet.
3. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.

Exercice 187
Soit le graphe orienté suivant :



Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

Exercice 188
Soit le graphe orienté suivant :



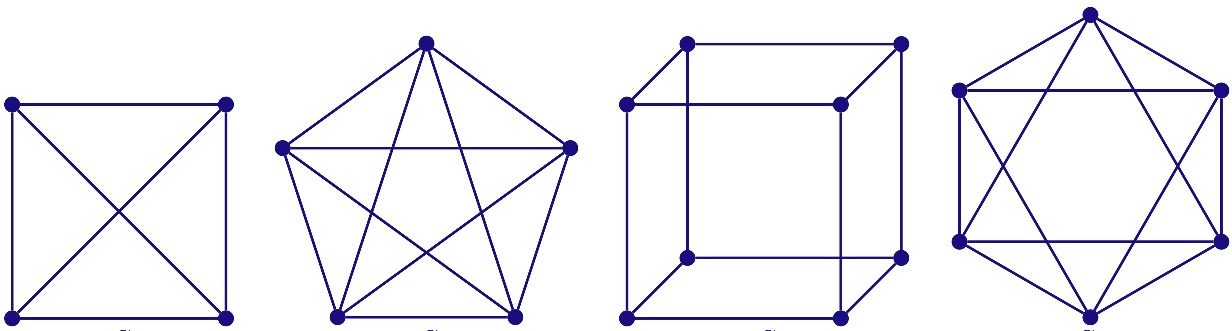
Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).

Exercice 189
On donne les matrices d'adjacence A et B correspondantes aux graphe G_1 et G_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comment peut-on savoir sans tracer son graphe qu'une matrice d'adjacence correspond à à un graphe non orienté ?
2.a. Tracer les graphes G_1 et G_2.
b. Déterminer le nombre de chaînes ou de chemin de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 4 .

Exercice 190
Un graphe est « *planaire* » si on peut le dessiner dans le plan sans que deux arêtes se croisent.
Les graphes suivants sont-ils planaires ?



G_1 G_2 G_3 G_4

Exercice 191
1. Dessiner les graphes complets pour $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.
2. Dessiner les graphes simples d'ordres $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. dont tous les sommets sont de degré 2
3. Dessiner tous les graphes simples possible d'ordre $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

Exercice 192
Est-il possible de dessiner un graphe :
1. à 5 sommets de degrés respectifs 5, 4, 3, 2 et 1 ?
2. à 7 sommets de degrés respectifs 7, 6, 5, 4, 3, 2 et 1 ?

Exercice 193
Construire un graphe à quatre sommets A, B, C et D, de degrés respectifs 1, 5, 1, 1 et ayant quatre arêtes.

5.2 Chaînes, cycles et connexité

Exercice 194

1. Dessiner le graphe simple d'ordre 8 dont l'ensemble des arêtes est :

$$A = \{(1;2),(1;3),(2;3),(2;4),(2;7),(3;5),(3;6),(3;7),(4;5),(4;7),(5;6),(5;7),(6;7),(6;8),(7;8)\}$$

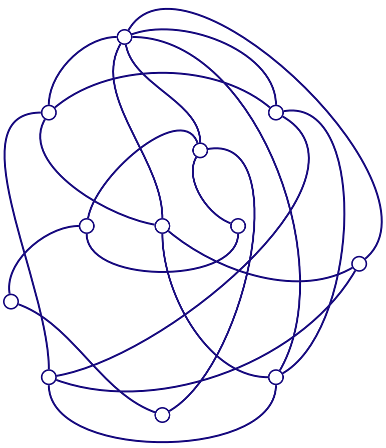
2. Donner la matrice M associée à ce graphe.
3. Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 permettant de se rendre du sommet 1 au sommet 8 ?
Les donner tous.
4. Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de ce graphe sans passer plus d'une fois par la même arête ?
Si oui donner un parcours possible.
5. Existe-il un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe ?

Exercice 195

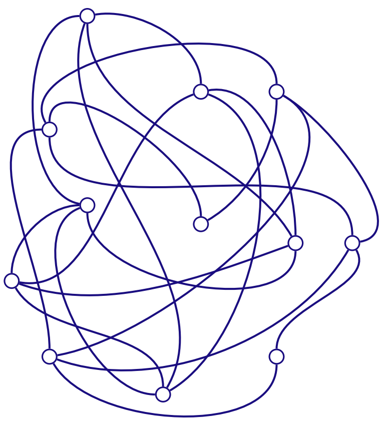
1. Dessiner un graphe simple dont la liste des degrés des sommets est $(6,6,2,2,2,2,2,1,1)$.
a. qui possède une chaîne eulérienne ;
a. qui ne possède pas de chaîne eulérienne. **2.** Est-il possible d'avoir un graphe qui possède un cycle eulérien si la liste des degrés des sommets est $(6,6,4,2,2,2,2)$?

Exercice 196

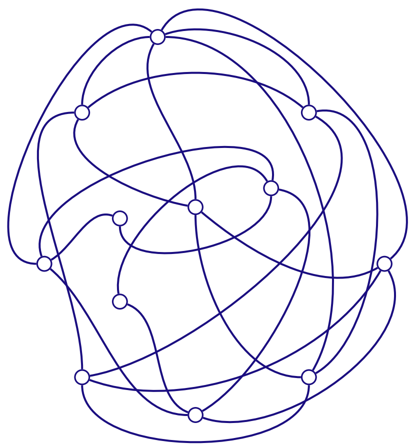
Pour chacun des graphes suivants, existe-t-il un cycle eulérien ? une chaîne eulérienne ?



Graphe G



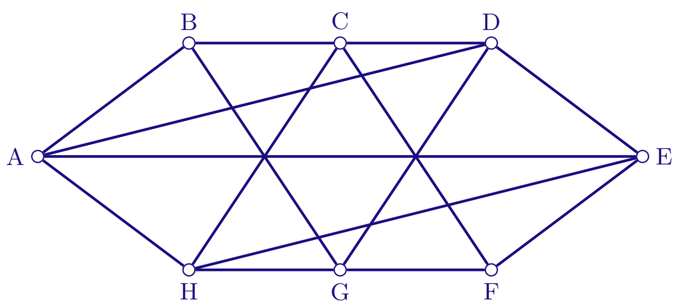
Graphe H



Graphe I

Exercice 197

On considére le graphe suivant :

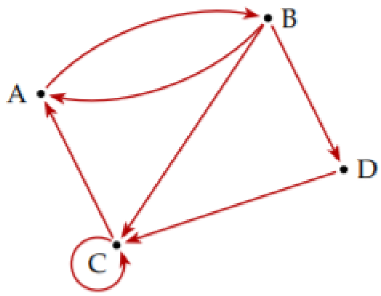


1. Le graphe est-il connexe ?
2. Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une.
3. Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4. Soit M la matrice associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

5. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet G et finissant au sommet E. Citer alors toutes ces chaînes.

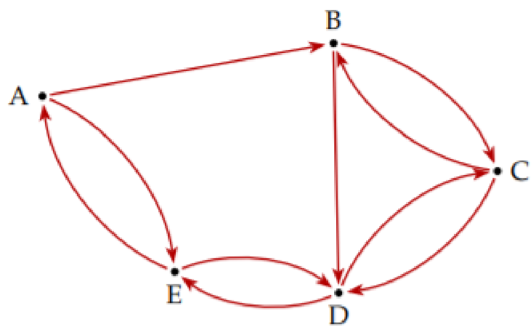
Exercice 198
Soit le graphe orienté suivant :



1. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.
2. Combien existe-t-il de chemins :
a. de longueur 4 reliant D à A ?
b. de longueur 6 reliant B à C ?

Exercice 199

Une exposition est organisée dans un parc. On décide d'y instaurer un plan de circulation : certaines allées sont à sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-contre modélise la situation.
1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe (dans l'ordre alphabétique).
2. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre de D à B ?
Les donner tous.
3. Montrer qu'il n'existe qu'un seul circuit de longueur 5 commençant en A.
Quel est ce cycle ? En est-il de même pour B ?



Exercice 200
On donne les matrices d'adjacence A et B correspondantes aux graphe G_1 et G_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comment peut-on savoir sans tracer son graphe qu'une matrice d'adjacence correspond à à un graphe non orienté ?
2.a. Tracer les graphes G_1 et G_2.
b. Déterminer le nombre de chaînes ou de chemin de longueur 3 reliant le sommet 2 au sommet 4 .

Exercice 201
On considère n villes $A_1, A_2, \cdots, A_n$ où $n \geqslant 2$. On suppose qu'entre deux villes quelconques, il y a toujours une route à sens unique. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ il existe toujours au moins une ville notée C_n parmi ces n villes à laquelle on peut aller en partant de toutes les autres villes, soit à l'aide d'un chemin direct, soit en visitant une seule ville intermédiaire.

6 Nombres complexes d'un point de vue géométrique

6.1 Géométrie et nombres complexes

Exercice 202
1.a. Placer dans le plan les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i \qquad z_B = 2 + i \qquad z_C = -3 \qquad z_D = 3 - i \qquad z_E = 2i$$

1.b. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$.
2.a. Déterminer les affixes des points de coordonnées suivantes :

$$F\,(1\,;\,1) \qquad G\,(2\,;\,0) \qquad H\,(-3\,;\,1) \qquad I\,(0\,;1)$$

2.b. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{IF}$.

Exercice 203
Calculer le module des nombres complexes suivants :

(1) $z_1 = 7$ **(3)** $z_3 = -1 + 2i$ **(5)** $z_5 = \sqrt{3} + i$

(2) $z_2 = -4$ **(4)** $z_4 = -7i$ **(6)** $z_6 = \dfrac{-1 + i}{3}$

Exercice 204
Calculer le module des nombres complexes suivants :

(1) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ **(3)** $z_3 = (4 + 3i)(12 - 5i)$ **(5)** $z_5 = (1 - 7i)^3$

(2) $z_2 = i(1 + i)$ **(4)** $z_4 = \dfrac{1}{i + 3}$ **(6)** $z_6 = \dfrac{i - \sqrt{8}}{5 + 3i}$

Exercice 205
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + 2i \qquad z_B = 2 + 5i \qquad z_C = 2 - i$$

1. Représenter, dans le plan complexe, les points A, B et C.
2. Calculer AB, AC et BC.
3. Que peut-on dire du triangle ABC ?

Exercice 206
Calculer un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 5$ **2.** $z_2 = -4$ **3.** $z_3 = \sqrt{2}i$ **4.** $z_4 = -7i$

Exercice 207
Pour chacun des cas suivants, représenter, dans le plan complexe, les points M dont les affixes z respectent la condition donnée :

1. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ **2.** $\arg(z) = -\pi\ [2\pi]$ **3.** $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ **4.** $\arg(z) = \dfrac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

Exercice 208
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \qquad z_B = 4 + 5i \qquad z_C = 8 + 2i$$

1. Calculer la longueur AB.
2. Le point C appartient-il au cercle de centre A passant par B ?

Exercice 209
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -2+i \qquad z_B = 3+3i \qquad z_C = 1+\frac{11i}{5}$$

Les points A, B et C sont-ils alignés.

Exercice 210
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 1+i \qquad z_B = 4+5i \qquad z_C = 8+2i$$

Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 211
Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1+i\ ,\ z_B = 4+5i\ ,\ z_C = 5-2i\ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3.a. Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
3.b. Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Exercice 212
On considère le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ orthonormé direct.
On considère les points A, B, C et D d' affixes respectives :

$$z_A = 4-\sqrt{3}i \quad ; \quad z_B = (4-\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3}) \quad ; \quad z_C = -1+2i \quad ; \quad z_D = 2\sqrt{3}-1$$

1. Etablir l'égalité : $\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = -\dfrac{1}{2}$
2. En déduire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 213
On munit le plan d' un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ orthonormé direct. On considère les deux points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2+2i \quad ; \quad z_B = 1-i$
1. Donner l'écriture trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$.
2. En déduire la nature du triangle OAB.

Exercice 214
On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = 1+i \quad ; \quad z_B = 2+i(\sqrt{3}+1) \quad ; \quad z_C = (1-\sqrt{3})+i2$$

1. Déterminer l'écriture algébrique du quotient : $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.
2. Déterminer le module et un argument du quotient précédent.
3. Etablir que le triangle ABC est rectangle isocèle.

Exercice 215
Le plan complexe est muni d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ orthonormé direct. On prendra 2 cm pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.
On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :

$$a = -3-i \quad ; \quad b = -2+4i \quad ; \quad c = 3-i \quad ; \quad h = -2$$

1. Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
4. En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

6.2 Formes trigonométriques et exponentielles

Exercice 216
Écrire, sous forme trigonométrique, les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 7$ **2.** $z_3 = 5i$ **3.** $z_5 = -2 - 2i$

4. $z_2 = -5$ **5.** $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$ **6.** $z_6 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

Exercice 217
Écrire, sous forme trigonométrique, les nombres complexes suivants :
1. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ **2.** $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ **3.** $z_3 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{3}$

Exercice 218
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right))$ **2.** $z_3 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

3. $z_2 = 5(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))$ **4.** $z_4 = 4(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 219
On donne $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2 et z_3^6.

Exercice 220
Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3} - i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 221
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$.
1. Déterminer une forme trigonométrique de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Soit $Z = z_1 \times z_2$.
a. Déterminer l'écriture algébrique de Z.
b. Déterminer une forme exponentielle de Z.
c. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 222
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 définis par :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_3 = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

1. Déterminer l'écriture exponentielle de z_1.
2. Déterminer l'écriture algébrique de z_2.
3. Démontrer que $z_1 \times z_2 = 2z_3$.
4. En déduire l'écriture algébrique de z_3.
5. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Exercice 223
1. Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z = z_1z_2$.
2.a. Déterminer la forme algébrique de Z.
2.b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

6.3 Détermination de lieux géométriques

Exercice 224
Pour chacun des cas suivants, représenter, dans le plan complexe, les points M dont les affixes z respectent la condition donnée :

(1) $|z| = 5$ **(2)** $|z-3| = 2$ **(3)** $|z-i| = 5$ **(4)** $|z-6i| = 5$

Exercice 225
Pour chaque question, au moins une des quatre réponses proposées est exacte.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = i$, $z_C = -1$ et $z_D = -i$.
1. L'ensemble des points d'affixe z tel que $|z+i| = |z-1|$ est :
a. la médiatrice du segment $[BC]$ **b.** le milieu du segment $[BC]$ **c.** le cercle de centre O et de rayon 1 **d.** la médiatrice du segment $[AD]$
2. L'ensemble des points d'affixe z tel que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :
a. la droite (CD) privée du point C **b.** le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C **c.** le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C **d.** la médiatrice du segment $[AB]$
3. L'ensemble des points d'affixe z tels que $\arg(z-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :
a. le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A **b.** la droite (BD) **c.** la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B **d.** le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D

Exercice 226
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 227
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
1. $|z-6i| = 3$ **2.** $|z+3-2i| < 2$ **3.** $|z+2| = |z-3i+1|$ **4.** $|2-iz| = |z+5|$ **5.** $\left|\dfrac{z+2i}{z+1-2i}\right| > 1$

Exercice 228
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ **2.** $|z-3| = |z+2i|$ **3.** $|z+1-2i| < \sqrt{5}$ **4.** $\left|\overline{z} + \dfrac{i}{2} = 4\right|$

5. $\arg(z+i) = \pi$ **6.** $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right) = \pi$ **7.** $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 229
Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1. $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$ **2.** $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$ **3.** $z = ke^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 230
A et B ont pour affixes respectives 1 et $3+2i$.
Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2, ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1. $|z-1| = |z-(3+2i)|$ **2.** $|z-(3+2i)| = 1$

6.4 Racines n-ièmes de l'unité

Exercice 231
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

Exercice 232
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Calculer $\prod_{z \in \mathbb{U}_n} z$.

Exercice 233
1. Montrer qu'il n'y a qu'une seule racine cubique de 1 dont la partie imaginaire est strictement positive.
2. On note j cette unique racine cubique de 1 . Montrer que :
a. $\bar{j} = j^2$
b. $1 + j + j^2 = 0$;
c. $|1 + j| = 1$

Exercice 234
Soient $n \geq 1$ un entier, $z \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de l'unité.
1. On suppose que $z \neq 1$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$ lorsque $z = 1$.

Exercice 235
Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 236
Soit ω une racine n-ième de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 237
Montrer que $z = \dfrac{3+4i}{5}$ est un nombre complexe de module 1 mais n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 238
On munit le plan d' un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ orthonormé direct. Pour tout entier naturel n, on note

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) z_n$$

1. Déterminer les affixes des poitns A_1 et A_2.
2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, $z_n = z_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.
Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans un repère.

Exercice 239
Pour n un entier naturel non-nul, on considère l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité. On dit qu'une racine ω est une racine n-ième primitive de l'unité si les puissances successives de ω (c'est-à-dire ω,ω^2, ω^3,$\cdots$,ω^n) permettent de générer tous les éléments de $\mathbb{U}_n$.

Montrer que si n est un entier premier alors tout élément de $\mathbb{U}_n$ différent de 1 est une racine primitive n-ième de $\mathbb{U}_n$.

7 Nombres premiers

7.1 Définition et décomposition

Exercice 240
Dans les *Inédits* de Marcel Pagnol, l'écrivain indique que, pour tout n entier impair $n > 1$, le nombre $N = n + (n+2) + n(n+2)$ est premier.
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 241 *Vrai-Faux*
1. Il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + n - 10$ est premier.
2. : Il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ tel que $2n^2 + 7n + 6$ est premier.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n > 5$, $n^2 - 3n - 10$ n'est jamais premier.

Exercice 242
Démontrer qu'un entier naturel n est un carré parfait si, et seulement si, le nombre de ses diviseurs est impair.

Exercice 243
1. À l'aide d'une décomposition en facteurs premiers, déterminer le nombre de diviseurs de : 2 025 et 1 575.
2. En déduire la liste des diviseurs de 2 025 et 1 575.

Exercice 244
Etablir que pour tout entier naturel k ($2 \leqslant k \leqslant n$), l'entier $n! + k$ n'est pas un entier premier.

Exercice 245
Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.
1. Vérifier que : $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n) \geqslant 1 + n$.
3. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

Exercice 246
α et β sont deux naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.
1. Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2. En déduire n.

Exercice 247
α et β sont deux naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $18n$ est le double du nombre de diviseurs de n.
1. Montrer que : $18n = 2^{\alpha+1}3^{\beta+2}$.
2. Prouver que $\alpha(\beta - 1) = 4$.
3. En déduire les valeurs de n possibles.

Exercice 248
Le produit de deux entiers naturels a et b $(a < b)$ est 11 340. On note d leur pgcd.
1.a. Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?
1.b. Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?
2. On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.
a. Démontrer que $d = 18$.
b. En déduire a et b.

Exercice 249
Un entier n a 5 diviseurs et $n - 16$ est le produit de deux nombres premiers.
1. Prouver que $n = p^4$, avec p premier.
2. Écrire $n - 16$ sous forme d'un produit de trois facteurs dépendant de p.
3. En déduire la valeur de n.

7.2 Théorème de Gauss et nombres premiers

Exercice 250
p est premier et $p > 5$.
1. Démontrer que $(p^2{-}1)$ est divisible par 3 et par 8.
2. En déduire que $(p^2{-}1)$ est divisible par 24.

Exercice 251
p est premier et $p > 7$.
1. Démontrer que $(p^4{-}1)$ est divisible par 3 et par 5.
2. Démontrer que $(p^4{-}1)$ est divisible par 16.
3. En déduire que $(p^4{-}1)$ est divisible par 240.

Exercice 252
$p > 3$ est un nombre premier
1. Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2. Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

Exercice 253
Soit $n > 1$.
Démontrer que $(30n + 7)$ n'est pas la somme de deux nombres premiers.

Exercice 254
Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$.
Montrer que si p divise a et $a^2 + b^2$ alors p divise b.

7.3 Le petit théorème de Fermat

Exercice 255
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 3^{6n} - 1$ est divisible par 7 .
2. Soit p un nombre premier différent de 3 . Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Exercice 256
1. Montrer que a est divisible par 5.
2. Montrer que $a = n\left(n^2 - 1\right)\left(n^2 + 1\right)$ puis que a est divisible par 2 et 3 . Pourquoi a est-il divisible par 30 ?

Exercice 257
1. Montrer que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
2. Montrer que pour tout $n, 4^n - 1$ est divisible par 3.
3. Montrer que pour tout $k, 4^{4k} - 1$ est divisible par 5 et par 17.
4. En déduire quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$

Exercice 258
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $a = n^{13} - n$.
1. Montrer que a est divisible par 13 et 7.
2. En déduire que a est divisible par 182.

Exercice 259
1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N} : a^{31} - a \equiv 0(62)$.
2. Montrer que, pour tout $a, n \in \mathbb{N} : a^{30+n} - a^n \equiv 0(62)$.

Exercice 260
Soit p un nombre premier.
1. Montrer que si p divise $3^p + 1$ alors p divise 4.
2. Trouver p tel que p divise $3^p + 1$.

8 Utilisation des matrices

8.1 Suite de matrices $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice 261

Une suite de matrices colonnes (U_n) de format $(2,1)$ est définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que la matrice $I - A$ est inversible et calculer son inverse.

2. On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer AR et RA en fonction de R, puis AS et SA en fonction de S.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-1)^n R + 2^n S$

3. Déterminer une formule explicite exprimant U_n en fonction de n.

Exercice 262

Une suite de matrices lignes (V_n) de format $(1,3)$ est définie par son premier terme $V_0 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $V_{n+1} = V_n A + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice $I - A$ est inversible en déterminant son inverse à la calculatrice.

2. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 2^n - 3^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une formule explicite exprimant V_n en fonction de n.

Exercice 263

Une suite de matrices colonnes (U_n) de format $(3,1)$ est définie par son premier terme $U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que la matrice $I - A$ est inversible en déterminant son inverse à la calculatrice.

2. On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que M est inversible en déterminant M^{-1} à la calculatrice.

b. Prouver que $A = MDM^{-1}$.

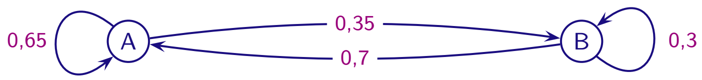
c. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = MD^nM^{-1}$.

d. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une formule explicite exprimant U_n en fonction de n.

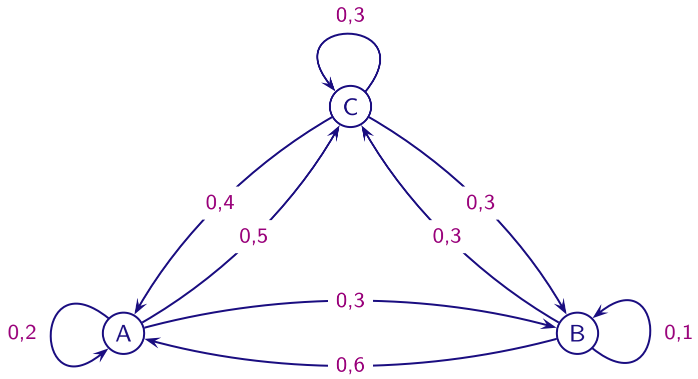
8.2 Chaînes de Markov

Exercice 264
On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B. On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n.
Ci-dessous est représenté le graphe pondéré orienté associé à cette évolution :



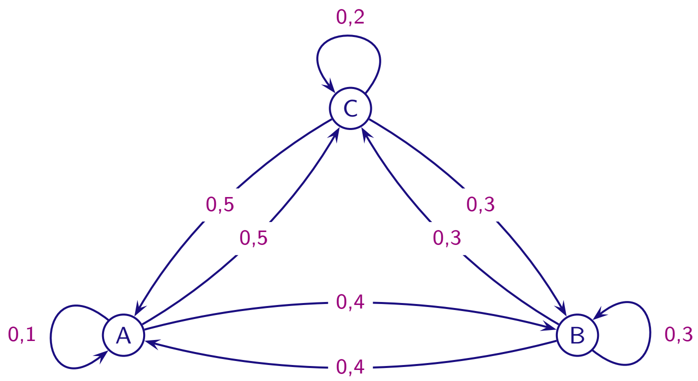
Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \cdot T$.

Exercice 265
On s'intéresse à la répétition d'une expérience aléatoire comportant trois issues A, B, C. A chaque répétition, l'évolution des probabilités de ses issues est soumises aux probabilités conditionnelles résumées dans les graphes probabilistes ci-dessous.



Déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation : $\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

Exercice 266
Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n.
1. Déterminer une expression de chacun des termes a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On note $U_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne représentant l'état à l'étape n.
Déterminer la matrice A de transition réalisant l'égalité : $U_{n+1} = U_n \cdot A$.
3. On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne représentant l'état à l'étape n.
Déterminer la matrice B de transition réalisant l'égalité : $V_{n+1} = B \cdot V_n$.

Exercice 267

1. Représenter le graphe probabiliste à trois états $\{A, B, C\}$ dont la matrice de transition associée est $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

2. On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n.

On suppose que $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Calculer P_1 et P_3.

3. Déterminer l'état probabiliste stable du système.

Exercice 268

Un opérateur de téléphonie mobile propose à ses abonnés deux forfaits :

— une formule A qui donne droit à deux heures de communication mensuelle ;

— une formule B qui donne droit à un nombre illimité de communications mensuelles.

On admet que d'une année sur l'autre, le nombre de clients de cet opérateur est stable et que :

— 20% des clients ayant choisi la formule B changent de formule ;

— 30% des clients ayant choisi la formule A changent de formule.

En 2016, 80% des clients de cet opérateur étaient abonnés à la formule A.

1. Représenter les données précédentes par un graphe probabiliste de sommets A et B et donner sa matrice de transition.

2. Pour un entier naturel n donné, on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ avec $a_n + b_n = 1$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste lors de l'année $2016 + n$. L'état probabiliste initial est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A en 2017.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2$.

2. On pose pour tout entier n, $u_n = a_n - 0,4$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.

b. Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier naturel n : $a_n = 0,4 \times (1 + 0,5^n)$

c. Déduire de ce qui précède, la limite de la suite (a_n). Donner une interprétation concrète de ce résultat.

d. A partir de quelle année, la probabilité qu'un client soit abonné à la formule A sera-t-elle inférieure à 0,401 ?

Exercice 269

Un industriel produit une boisson conditionnée sous deux emballages distincts A et B. Une étude effectuée auprès des consommateurs a permis d'établir que d'un mois sur l'autre, 84% des consommateurs restent fidèles au conditionnement A contre 76% pour le conditionnement B. Au moment de l'étude, les consommations des deux conditionnements sont égales.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A le n-ième mois après l'étude et $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste le n-ième mois après l'étude. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2.a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2b.. Montrer que la matrice ligne P_2 est égale à $\begin{pmatrix} 0,564 & 0,436 \end{pmatrix}$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P = P \times M$.

Déterminer les réels a et b. Interpréter ce résultat.

4. À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,6$.

b.Exprimer u_n en fonction de n et en déduire que $a_n = -0,1 \times 0,6^n + 0,6$.

c. À partir de combien de mois après l'étude, la probabilité qu'un consommateur choisisse le conditionnement A est-elle supérieure à $0,595$?

Exercice 270
Trois chaînes de télévision A, B, C se partagent la diffusion de la coupe du monde de football. D'un match au suivant, elle évolue de la façon suivante :
• 10 % des téléspectateurs de A passent sur B et 10 % sur C ;
• 20 % des téléspectateurs de B passent sur A et 10 % sur C ;
• 30 % des téléspectateurs de C passent sur A et 10 % sur B.
1. Représenter cette évolution par un graphe.
2. Pourquoi s'agit-il d'un graphe probabiliste ?
3. Déterminez la matrice de d'adjacence M. (Dans l'ordre A, B, C)

Exercice 271
Représenter le graphe des matrices de transition T des chaînes de Markov homogènes suivantes. On prendra comme espace des états : A, B, C, ...

1. $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $T = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,55 & 0,2 & 0,25 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$ **3.** $T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 272
Dans une usine, deux machines A et B peuvent tomber en panne de manière indépendante l'une de l'autre dans la journée avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$.
On suppose que si une machine tombe en panne, elle est réparée dans la nuit mais que l'on ne peut réparer qu'une seule machine en une nuit.
On note X_n le nombre de machines en panne au matin du n-ième jour.
1.a. Justifier que la suite (X_n) forme une chaîne de Markov homogène.
b. Pourquoi peut-on considérer deux états ? Quels sont-il ?
2.a. On appelle P_A et P_B les événements correspondant à « la machine A est en panne » et « la machine B est en panne ».
Réaliser un tableau de probabilité double entrée.
b.En déduire la matrice de transition.de cette chaîne de Markov.
c. Représenter le graphe de cette chaîne de Markov.

Exercice 273
On considère que la météo varie entre deux états beau et mauvais temps. Après un jour de beau temps, on a une chance sur deux que le temps change le jour suivant et le mauvais temps a trois fois plus de chance de durer d'un jour au jour suivant.
1. Pourquoi peut-on dire que la situation peut être modélisée par une chaîne de Markov ?
2. Donner sa matrice de transition

Exercice 274
Dans une ville il peut venter, neiger ou grêler. Le vent et la grêle ne restent jamais deux jours de suite. S'il vente un jour donné, le lendemain il neige ou il grêle de manière équiprobable. S'il neige, il y a une chance sur trois qu'il vente le jour d'après et une chance sur deux qu'il continue à neiger le lendemain. Après un jour de grêle, il y a deux fois plus de chance d'avoir de la neige que du vent.
1. Justifier la modélisation de la météo dans cette ville par une chaîne de Markov.
2. Représenter le graphe puis donner la matrice T de transition de cette chaîne de Markov associée aux états V, N et G.
3. Quelle est la probabilité, qu'après deux jours de neige, le vent souffle ?
4. Quelle est la distribution invariante de cette chaîne de Markov ?

8.3 Matrice et polynômes

Exercice 275
On cherche à déterminer l'équation de la parabole, $y = ax^2 + bx + c$, passant par les points : $P(1;4)$, $Q(-2;-5)$, $R(-1;0)$;
1. Traduire l'appartenance des ces trois points à la parabole par un système (S).
2. En déduire l'écriture de ce système sous la forme matricielle $AX = B$.
3. Montrer que la matrice $C = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2- & 2 & 6 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A.
4. Calculer alors les coefficients a, b et c.

Exercice 276
Déterminer la fonction polynôme du second degré dont la courbe représentative est la parabole $\mathcal{C}_f$ passant par les points $A(-1;-3)$, $B(3;-5)$ et $C(4;-13)$.

Exercice 277
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer les réels a, b et c sachant que $f(2) = 0$, $f(-1) = 3$ et $f'(1) = -3$.

Exercice 278
Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'éuation $y = ax^2 + bx + c$.
La parabole $\mathcal{P}$ passe par le point $A\,(1;2)$ et coupe la droite d d'éuation $y = -2x + 3$ en deux points d'abscisses respectives -1 et 2.
Déterminer l'équation de la parabole $\mathcal{P}$.

Exercice 279
Le but de cet exercice est de déterminer les coefficients a, b et c.
On sait que :

- C_f passe par l'origine du repère.
- C_f passe par le point de coordonnées $(3\,;\,-2,25)$ où la tangente à C_f est parallèle à l'axe des abscisses.

1.a. Traduire ces informations par trois équations d'inconnues a, b et c.
1.b. En déduire la valeur du coefficient c.
2. En déduire un système d'équation (S) de deux équations à deux inconnues a et b.
3. Déterminer les matrices A, X et B pour lesquelles (S) équivaut à $AX = B$.
4. Résoudre ce système et donner l'expression de f.