Coquillages & Poincaré

Recueil d'exercices

Terminale Spécialité Mathématiques

NASSIRI Mohamed

CC BY NC SA

www.coquillagesetpoincare.fr

Recueil d'exercices - Terminale Spécialité Mathématiques

Mohamed NASSIRI

Table des matières

Plusieurs exercices ont été repris et/ou inspirés des planches d'exercices de Yoann Morel, Stéphane Le Meteil, et Jason Lapeyronnie.
Qu'ils en soient grandement remerciés ici !

Ad astra per aspera

1 Suites numériques et récurrence

1.1 Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 1
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 5$.
Montrer que la suite (u_n) est minorée.

Exercice 2
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a. $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$ **b.** $u_n = \cos(n) + \sin(n)$ **c.** $u_n = -3\cos(n) + 2\sin(n)$

d. $u_n = 2\cos(n) - n$ **e.** $u_n = \cos(n) + 3$ **f.** $u_n = (-1)^n \sin(n) + 3\cos(n)$

g. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ **h.** $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$ **i.** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 2n^2$

Exercice 3
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n \times (-1)^n$.
La suite (u_n) est-elle bornée ? majorée ? minorée ?

Exercice 4
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{4n+7}{2n-5}$

1. Montrer que pour tout entier naturel $n, u_n - 2 = \dfrac{17}{2n-5}$

2. En déduire que la suite (u_n) est minorée et donner un minorant.

Exercice 5
Soit (u_n) une suite.
1. Montrer que si (u_n) est croissante alors elle est minorée.
2. Montrer que si (u_n) est décroissante alors elle est majorée.

1.2 Passage de la forme de récurrence à la forme explicite

Exercice 6
On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Exercice 7
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

Exercice 8
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{-5}{2^n} + 6$.

Exercice 9
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Conjecturer une formule donnant un en fonction de n et la démontrer.

Exercice 10
Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel $n, u_n = 3 \times 2^n - 3^n$.

Exercice 11 *Suite de Fibonacci I*
Soit une suite (F_n) définie par :
- $\mathrm{F}_1 = 1$
- $\mathrm{F}_2 = 1$
- $\forall n \geq 3$, $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n-2}$

1. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle : $x^2 = x + 1$.
On note Φ la solution positive et Ψ l'autre solution.
2. Démontrer par une récurrence double que pour tout entier naturel n : $\mathrm{F}_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Psi^n\right)$

Exercice 12 *Suite de Fibonacci II*
La suite de Fibonacci (F_n) est définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{F}_0 = 0 \\ \mathrm{F}_1 = 1 \\ \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1} \end{cases}$$

Prouver par récurrence les relations suivantes :
1. $\mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n+2} - 1$
2. $\mathrm{F}_0^2 + \mathrm{F}_1^2 + \cdots + {\mathrm{F}_{n-1}}^2 = \mathrm{F}_n \times \mathrm{F}_{n-1}$
3. ${\mathrm{F}_n}^2 - \mathrm{F}_{n-1} \times \mathrm{F}_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

1.3 Récurrence et inégalités

Exercice 13
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1+2u_n}{2+u_n}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 14
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

Exercice 15 *Inégalité de Bernoulli*
Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Exercice 16
Démontrer que $\forall n \geqslant 4$, on a $2^n \leqslant n!$.

Exercice 17
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $5^n \geqslant 4^n + 3^n$.

Exercice 18
Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$.

Exercice 19
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$ que $n^2 > 2n + 1$.

Exercice 20
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$

Exercice 21
On considère une suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} & , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 22
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{2}{10}u_n + 8$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leqslant 10$.

Exercice 23
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$. Montrer que, pour tout entier naturel $n, 3 \leqslant u_n \leqslant 5$

Exercice 24
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif $n, u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n, \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

1.4 Récurrence et sommes

Exercice 25
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Exercice 26
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 27
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 28
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 29
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 30
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 31
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1.5 Récurrence et arithmétique

Exercice 32
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 33
Démontrer par récurrence que tout entier naturel n, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 34
Démontrer que pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 35
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 36
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2^n} - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 37
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $10n - (-1)^n$ est un multiple de 11.

Exercice 38
Soit x un réel non nul tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout entier naturel n, le réel $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est un entier.

1.6 Récurrence et géométrie

Exercice 39
On place n points distincts sur un cercle, et $n \geqslant 2$.
Démontrer que le nombre de segments que l'on peut tracer avec ces n points est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 40
Démontrer par récurrence que la somme des angles dans un polygone non croisé vaut $(n-2)\pi$ radian.

Exercice 41
Montrer que le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés est $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercice 42
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit
$\begin{cases} x_0 = -4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n \end{cases}$ $\begin{cases} y_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$
Montrer que pour tout entier naturel $n, x_n^2 + y_n^2 = 25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

1.7 Fausses récurrences

Exercice 43
Soit la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4 »
1. Cette propriété est-elle vraie pour $n = 0$?
2. Démontrer que pour tout entier naturel k, l'implication $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
3. Conclusion ?

Exercice 44
1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n la propriété suivante :« $10^n - 1$ est un multiple de 9 » est vraie.
2. On s'intéresse maintenant à une autre propriété : « $10^n + 1$ est divisible par 9 ».
a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'implication suivante : « $10^n + 1$ est divisible par 9 $\Rightarrow$ $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9 » est vraie.
b. Déduire du **1.** que, pour tout entier naturel n la propriété « $10^n + 1$ est divisible par 9 » n'est jamais vraie.
c. Conclusion ?

Exercice 45
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « 6 divise $7n + 1$ ».
1. Montrer que si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$.
2. Montrer que $\mathcal{P}_0$ est fausse.
3. Conclure.

Exercice 46
On appelle nombre de Fermat le nombre $F_n = 2^{2^n} + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Fermat (mathématicien français, 1601 - 1665) a affirmé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est premier.
Qu'en pensez-vous ?

1.8 Algorithmique en Python

Exercice 47

1. Qu'affiche le programme suivant ?

```python
def u(n):
    return 3*n-2

print(u(2))

n=10
print(u(n))
```

2.a. Modifier le programme précédent pour qu'il calcule les termes de la suite (u_n) définie par l'expression

$$u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

b. Afficher en particulier les termes u_{10}, u_{100} et u_{1000}.
Qu'observe-t-on pour des valeurs de plus en plus grandes de n ?

Exercice 48

1. Qu'affiche le programme suivant ?

```python
def u(n):
    return n**2-3

for n in range(1,10):
    print(u(n))
```

2. Modifier le programme précédent pour qu'il affiche les 100 premiers termes de la suite (u_n) définie à la question **2.** de l'exercice précédent.
3. Modifier ce programme pour qu'il n'affiche qu'un terme sur trois parmi les 100 premiers.
Combien de termes ont été affichés ?
4. Modifier encore le programmme pour qu'il affiche un terme sur cent, du centième au millième.

Exercice 49

1. Qu'affiche le programme suivant ?

```python
def u(n):
    return n**2-3

n=0
while u(n)<1000:
    print(u(n))
    n=n+1

print(n)
```

2. On reprend la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$.
On a pu voir dans les exercices précédents que les valeurs de la suite se rapprochent, ou tendent, vers 2 : plus n est grand, plus un est proche de 2.
Modifier le programme précédent pour qu'il affiche à partir de quel rang n, un devient supérieur à 1,9.
3. À partir de quel rang n, u_n devient supérieur à 1,99999 ?

Exercice 50
1. Qu'affiche le programme suivant ?

```
def u(n):
    if n==0:
        return 2
    else:
        return 3*u(n-1)-2

print(u(0))
print(u(1))
print(u(2))

n=10
print(u(n))
```

La fonction définie et utilisée ici s'appelle une fonctions **récursive** : c'est une fonction qui s'appelle elle-même...
2. Modifier le programme précédent pour qu'il calcule les termes de la suite (u_n) définie par l'expression

$$u_n = \frac{2u_{n-1}^2 - 1}{u_{n-1}^2 + 2}$$

Afficher en particulier les premiers termes jusqu'à u_{10}, puis jusqu'à u_{20}.
3. Une autre manière de programmer les calculs des termes d'une telle suite est :

```
u=2
n=10
for i in range(n):
    u=(2*u**2-1)/(u**2+2)
    print(u)
```

qui calcule et affiche ici tous les premiers termes jusqu'à u_{10}.
a. Utiliser ce programme pour afficher en particulier les termes u_{10}, u_{100} et u_{1000}.
b. Qu'observe-t-on pour des valeurs de plus en plus grandes de n ?

Exercice 51
Un village comptait 4000 habitants en 2000. Chaque année depuis, cette population a augmenté de 3% d'une année à la suivante.
1. Écrire un programme qui calcule le nombre d'habitants dans ce village en 2001, puis 2002, puis 2010, pusi cette année.
2. Modifier le programme précédent pour qu'il détermine en quelle année la population du village aura triplé.

Exercice 52
Écrire une fonction `fibonacci` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie les n premiers termes de la suite de Fibonacci.

Exercice 53
Écrire une fonction `somme` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme des carrés des n premiers entiers.

1.9 Suites numériques et récurrence : Vers le supérieur

Exercice 54 *Vers le supérieur*
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \neq 1$.
Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

Exercice 55 *Vers le supérieur*
Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 56 *Vers le supérieur*
On pose pour tout $x \geqslant 0$:

$$\mathrm{P}_0(x) = 1, \mathrm{P}_1(x) = 1 + x, \cdots, \mathrm{P}_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

1. Calculer $\mathrm{P}'_n(x)$.
2. Établir par récurrence que $f_n : x \to \mathrm{e}^x - \mathrm{P}_n(x)$ est une fonction positive croissante sur $[0, +\infty[$.
3. Établir par récurrence que $g_n : x \to \mathrm{e}^x - \mathrm{P}_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est une fonction négative décroissante sur $[0, +\infty[$. Établir la double inégalité :

$$\mathrm{P}_n(x) < \mathrm{e}^x < \mathrm{P}_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^x$$

4. Quelle est la limite de la suite u définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 57 *Vers le supérieur*
L'objectif est d'étudier la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

On pose pour tout naturel n et pour tout réel x : $f_n(x) = (1-x)^n \mathrm{e}^x$.
1. Vérifier que $f'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - (n+1)f_n(x)$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)dx - (n+1)\int_0^1 f_n(x)dx = -1$.
3. A l'aide de ce qui précède, démontrer que, pour tout naturel n,

$$u_n = \mathrm{e} - \frac{1}{n!}\int_0^1 f_n(x)dx$$

4. Démontrer que, pour tout naturel n et tout réel x de $[0, 1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^x$, et en déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
5. Quelle est la limite de la suite u ? Justifier.

2 Combinatoire et dénombrement

2.1 Arrangements et permutations

Exercice 58
On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A. Combien y en a-t-il ?

Exercice 59
On considère l'ensemble $A = \{c; o; s\}$. Donner toutes les permutations de A. Combien y en a-t-il ?

Exercice 60
: On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 9; 11\}$.
1. Donner deux éléments de A^3. Combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A. Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A. Combien en existe-t-il ?

Exercice 61
Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.
1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

Exercice 62
A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.
Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr…) ?

Exercice 63
Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association « Bal des Terms : le succès ». Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

Exercice 64
Six personnes choisisent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.
1. Combien de résultats peut-on obtenir ?
2. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

Exercice 65
Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.
Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

Exercice 66
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

Exercice 67
Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

2.2 Combinaisons d'un ensemble fini

Exercice 68
On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 3; 4\}$. donner toutes les parties de A à 2 éléments et en déduire la valeur de $\binom{4}{2}$.

Exercice 69
Donner les valeurs de $\binom{5}{3}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{8}{4}$, $\binom{10}{4}$ et $\binom{7}{3}$.

Exercice 70
Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{51}{2}$, $\binom{1475}{1474}$, $\binom{1321}{0}$, $\binom{26}{24}$.

Exercice 71
Que vaut $\binom{9}{0} - \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{8} - \binom{9}{9} = \sum_{k=0}^{9}(-1)^k \binom{9}{k}$?

Exercice 72
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 73
Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.
1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à le travailler absolument. Il vous reste donc 4 exercices à choisir. Combien de combinaisons pouvez-vous construire ?

Exercice 74
On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Coeur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :
1. comportant exactement 3 coeurs ;
2. comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
3. comportant au plus 2 roi.

Exercice 75
Dans une grille de loto, il faut choisir cinq nombres de 1 à 49 ainsi qu'un nombre chance allant de 1 à 10. De combien de manières différentes peut-on remplir sa grille de loto ?

Exercice 76
On lance simultanément dix pièces de monnaies et on regarde de quel côté elles tombent.
1. Combien de configurations avec 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?
2. Combien de configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?

Exercice 77
Un entraîneur doit constituer une équipe de football. Il a à sa disposition 3 gardiens de buts, 8 défenseurs, 6 milieux de terrain et 6 attaquants. Il doit alors constituer une équipe en désignant 1 gardien, 4 défenseurs, 3 milieux de terrain et 3 attaquants. Combien d'équipes peut-il construire ?

Exercice 78
Au loto, il y a 49 numéros. Une grille de loto est composée de 6 de ces numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?

Exercice 79
De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes ?

2.3 Algorithmique en Python

Exercice 80
Écrire une fonction `factorielle` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et qui renvoie $n!$.

Exercice 81
Écrire une fonction `arrangement` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et un entier naturel $k \leqslant k$ et qui renvoie $\mathcal{A}_n^k$ (nombre d'arrangements sans répétition de k objets pris parmi n).

Exercice 82
Écrire une fonction `combinaison` en Python qui prend en entrée un entier naturel n et un entier naturel $k \leqslant k$ et qui renvoie $\mathcal{C}_n^k$ (nombre de combinaisons sans répétition de k objets pris parmi n).

Exercice 83
Écrire un programme en Python qui génère les permutations d'une liste.

Exercice 84
Écrire un programme en Python qui affiche pour un entier n donné la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal.

 CC BY NC SA

2.4 Combinatoire : Vers le supérieur

Exercice 85
Soit p points du plan distincts.
1. Combien de polygones à $n \leqslant p$ côtés peut-on réaliser à partir de ces points ?
2. On fixe un tel polygone à n côtés. Combien de diagonales ce polygone comporte-t-il ?

Exercice 86
Dans ma maison, il y a un escalier de 17 marches. Pour descendre cet escalier, je peux à chaque pas descendre une marche, descendre deux marches, ou descendre trois marches à la fois. Combien y-a-t-il de façons de descendre cet escalier ?

Exercice 87
On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de façons différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

3 Limites de suites

3.1 Operations sur les limites

Exercice 88 *Echauffement*
Démontrer que toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 89
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

a. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$
c. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n$ **d.** $u_n = -6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$

Exercice 90
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

a. $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right)$ **b.** $u_n = \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right)$ **c.** $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

Exercice 91
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

a. $u_n = \dfrac{e^n}{1 + \dfrac{1}{n}}$ **b.** $u_n = \dfrac{6 + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n} - 1}$ **c.** $u_n = \dfrac{1 + \dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$ **d.** $u_n = \dfrac{5 + \dfrac{2}{n^2}}{n^3 + \dfrac{1}{n}}$

Exercice 92
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

a. $u_n = n^2 - n$ **b.** $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{3}{n^2}\right)$ **c.** $u_n = \dfrac{3 + \sqrt{n}}{1 + \dfrac{2}{n}}$

d. $u_n = -2n^2 - \dfrac{5}{n+1}$ **e.** $u_n = \dfrac{5}{-1-n}$ **f.** $u_n = (3n+1)\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$

 CC BY NC SA

3.2 Formes indeterminées

Exercice 93
Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$

Exercice 94
Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$

Exercice 95
En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3}$ **b.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+3}$ **c.** $u_n = \dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}$

d. $u_n = \dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}$ **e.** $u_n = \dfrac{(n-1)\left(n^2+1\right)}{2-3n^2}$ **f.** $u_n = \dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}$ pour $n>0$

Exercice 96
Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4n^3+2n^2+5+\dfrac{1}{n^2}\right)$ **b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-5n^3+2n^2+4n-\dfrac{5}{n}\right)$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^4+n^3+2n-\dfrac{4}{n}}{-n^3-5n+\dfrac{6}{n^4}}\right)$ **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^7+2n^5-4n^3+2-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^8}}{3n^7+4n^3-5n^2+\dfrac{2}{n^3}}\right)$

Exercice 97
Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

a. $u_n = \sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}$ **b.** $u_n = \sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}$

c. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$ **d.** $u_n = \sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+2}$

Exercice 98
Étudier la convergence des suites suivantes.

a. $u_n = \frac{n-1}{n^2+4}$ **b.** $v_n = -3\times 2^n + (-0,1)^n$ **c.** $w_n = \frac{n^2-\cos n}{n+2}$

3.3 Combinatoire : Vers le supérieur

Exercice 99 *Une série de Riemann*
1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. En déduire le comportement de la suite (u_n) définie par

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 100
Étudier la nature de la suite suivante, et déterminer sa limite éventuelle :

$$u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n},\ a,b\in]0,+\infty[$$

Exercice 101 *Une série de Riemann*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.
1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors (u_n+v_n) diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n\times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors (u_n+v_n) diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n\times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

4 Vecteurs, droites et plans de l'espace

4.1 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exercice 102
Soit $ABCDEFGH$ un cube. On note I le centre du carré $ABCD$, J le centre du carré $EFGH$ et K le milieu de $[IJ]$.
1. Faire une figure.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire que K est le milieu de $[AG]$.

Exercice 103
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace. On note I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[IJ]$. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MK}$.

Exercice 104
Soit ($(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace.
1. On donne les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Même question pour $\vec{u}=2\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}+6\vec{j}-\dfrac{15}{2}\vec{k}$

Exercice 105
Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace.
1. On donne les vecteurs $\vec{e_1}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{e_3}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ sont-ils coplanaires ?
2. Même question pour $\vec{e_1}=\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{e_2}=6\vec{i}-3\vec{j}+16\vec{k}$ et $\vec{e_3}=\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$

Exercice 106
Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{k}$ et $\vec{w}=2\vec{i}+\vec{j}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 107
Soit $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de l'espace. On donne $\vec{u}=\vec{i}$ et $\vec{v}=-\vec{i}-2\vec{j}$.
1. Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Ces vecteurs forment-ils une base de l'espace ?
2. Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. On considère le vecteur $\vec{s}=x\vec{i}+y\vec{j}$ où x et y sont réels. Démontrer qu'il existe un couple $(\lambda;\mu)$ de réels tels que $\vec{s}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.

Exercice 108
On considère le cube $ABCDEFGH$.
1. Justifier que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.
2. On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[HG]$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Exercice 109
$ABCDEFGH$ est un cube et I et J les points tels que $I\in[HD]$ et $HI=\dfrac{2}{3}HD$; $J\in[FG]$ et $FJ=\dfrac{3}{4}FG$.
Construire la section du cube par le plan (EIJ).

Exercice 110
$ABCDEFGH$ est un cube et I; Jet K les points tels que $I\in[EF]$ et $EI=\frac{1}{3}EF$; $J\in[BC]$ et $BJ=\frac{1}{2}BC$; $K\in[HG]$ et $HK=\frac{3}{4}HG$.
Construire la section du cube par le plan (IJK).

Exercice 111
$ABCDEFGH$ est un cube et I; J et K les points tels que : $I\in[AD]$ et $AI=\frac{1}{3}AD$; $J\in[FG]$ et $FJ=\frac{2}{3}FG$; $K\in[AB]$ et $AK=\frac{1}{3}AB$.
Déterminer et construire la section du cube par le plan (IJK).

4.2 Repère de l'espace

Exercice 112
On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1; -1; 2), B(5; 1; 8), C(-3; 2; -1)$ et $D(-1; 3; 2)$.
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 113
On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1; 3; 5), B(2; 7; -1)$ et $C(5; 19; -19)$.
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 114
On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 3), B(3; -1; 2), C(0; 1; 1)$ et $D(5; 1; 6)$.
1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

Exercice 115
On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2; 4; -1), B(3; -2; 5)$ et $C(6; 7; -2)$.
1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$

Exercice 116
On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2; 2; 0), B(0; 1; 0), C(1; 0; 1), D(0; 0; 3)$ et $E(-1; 4; 0)$.
1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

4.3 Algorithmique en Python

Exercice 117
Écrire une fonction avec Python qui, connaissant les coordonnées de deux points A et B de l'espace, renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 118
Expliquer la fonction Python définie ci-dessous.

```python
def col(vec1, vec2):
    # vec1 et vec2 sont des listes constituées des coordonnées des
    # vecteurs dont on suppose qu'aucune n'est nulle.
    if vec1[0]/vec2[0] == vec1[1]/vec2[1] and vec1[0]/vec2[0] == vec1[2]/vec2[2]:
        return(True)
    else:
        return(False)
```

 CC BY NC SA

5 Limites de fonctions

5.1 Operations sur les limites

Exercice 119
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.
1. $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
2. $f : x \mapsto x^3 - x^2$ en $a = +\infty$ puis en $a = -\infty$
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ en $a = +\infty$ et en $a = -\infty$
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} + 4\sqrt{x}$ en $a = 0^+$ puis en $a = +\infty$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 - x}$ et $a = 1^+$ puis en $a = 1^-$
6. $f : x \mapsto (1 - 2x)e^x$ en $a = +\infty$
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) - 1}$ en $a = 0^+$ puis en $a = 0^-$
8. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1 - x}$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$
9. $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ en $a = -\infty$ puis en $a = +\infty$
10. $f : x \mapsto \dfrac{(x + 5)^2 - 25}{x}$ en $a = 0$
11. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 25}$ en $a = +\infty$, en $a = -\infty$, en $a = 5^+$, en $a = 5^-$, en $a = (-5)^+$ et en $a = (-5)^-$.

Exercice 120
Soit f et g deux fonctions. Justifier par un contre-exemple que les implications suivantes sont fausses.
1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{g(x)} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$

Exercice 121
Déterminer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

a. $f(x) = x^3 - 2x$ **b.** $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2}$ **d.** $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{2x^2 + 4}$

5.2 Theorème de comparaison

Exercice 122
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel x, $x - 2 \leqslant f(x) \leqslant x + 2$.
Que peut-on en déduire pour les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 123
Déterminer les limites de chaque fonction en $+\infty$:

a. $f : x \mapsto x^2 + 2\cos(x)$ **b.** $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ **c.** $h : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x) + x}$ **d.** $k : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$

Exercice 124
Soit f une fonction telle que, pour tout $x > 1$,

$$\frac{2x^2 + 3}{3x^2 - x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - x}$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 125
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{E(x)}{x}$, ou $E(x)$ représente la partie entière de x.

5.3 Croissances comparées

Exercice 126
Déterminer les limites suivantes

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+x}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3xe^x+4e^x+3x}{e^{2x}+e^x+1}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x}$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x-3x^2+5x-1\right)$

h. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x-3x^2+5x-1\right)$

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

j. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

k. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

l. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^x+e^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$

n. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$

o. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2e^{-x}-x\right)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2e^{-x}-x\right)$

Exercice 127
On considère la fonction ℓ définie sur $\mathbb{R}$ par $\ell(x)=e^x+x-1$
1. Factoriser l'expression de $\ell(x)$ par e^x.
2. Déterminer les limites de ℓ en $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 128
Déterminer les limites de chaque fonction en $-\infty$ et en $+\infty$:

a. $f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ **b.** $g : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x+1}{x}$ **c.** $h : x \mapsto \mathrm{e}^x+2$

Exercice 129
1.a. Démontrer que, pour tout réel $x>0, e^{3x+2}>e^x$.
b. En déduire alors la limite de e^{3x+2} en $+\infty$.
2. Calculer de la même façon la limite des expressions suivantes en $+\infty$:

a. e^{2x-1} **b.** $\dfrac{2}{e^{5x-3}}$ **c.** e^{-4x-1}

5.4 Limite de fonctions : Vers le supérieur

Exercice 130
Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$

2. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

Exercice 131
Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ **2.** $g : x \mapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ **3.** $h : x \mapsto x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$

Exercice 132
Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$

2. $g : x \mapsto \left\lfloor \dfrac{x}{a} \right\rfloor \dfrac{b}{x}$

6 Loi binomiale

6.1 Epreuve de Bernoulli

Exercice 133
Gérard possède cinq cartes de fidélité de magasins différents dans sa poche. Ces cinq cartes ont toutes le même format et sont indiscernables au toucher.
Au moment du passage en caisse dans un de ces magasins, il choisit au hasard une carte de fidélité.
Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Exercice 134
Au début d'un jeu de mémoire, seize cartes sont placées face cachée sur une table. Hervé retourne une carte qui montre un palmier. Elle sait qu'une autre carte représente un palmier. Elle doit donc, au hasard, retourner une seconde carte pour espérer retrouver un palmier.
Justifier que cette expérience aléatoire correspond bien à une épreuve de Bernoulli en précisant le succès et la probabilité de celui-ci.

Exercice 135
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 136
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli telle que $V(X) = 0,09$. Quelles sont les valeurs possibles du paramètres p ?

Exercice 137
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour quelle valeur de p la variance de X est-elle maximale ?

6.2 Loi binomiale

Exercice 138
X suit $\mathcal{B}(6; 0,4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :
a. $P(X = 2)$ **b.** $P(X = 0)$ **c.** $P(X \leqslant 4)$ **d.** $P(X \leqslant 6)$ **e.** $P(X > 3)$ **f.** $P(X \geqslant 5)$

Exercice 139
Soit X une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,39$. Déterminer l'entier k pour lequel la probabilité $P(X = k)$ est maximale.

Exercice 140
Soit X un variable aléatoire. Sachant que son espérance vaut $19,2$ et que sa variance vaut $3,84$, X peut-elle suivre une loi binomiale ?

Exercice 141
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \dfrac{1}{3}\right)$.

1. Calculer $P(X = 1)$
2. Calculer $P(X \geqslant 4)$
3. Calculer $P(X < 3)$

Exercice 142
Soit X une variable aléatoire suit suit la loi binomiale de paramètre $n = 40$ et $p = 0,31$.
1. Calculer, si possible, $P(X = 11)$, $P(X = 13,5)$ et $P(X = 1)$.
2. Calculer $P(X \leqslant 12)$ et $P(X > 17)$.
3. Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$ et $P(7,8 \leqslant X < 9)$.
4. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Exercice 143
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,65$. En utilisant éventuellement la calculatrice, calculer les valeurs suivantes :
a. $P(X = 13)$ **b.** $P(X < 15)$ **c.** $P(7 \leqslant X \leqslant 14)$ **d.** $P_{X<15}(X = 13)$ **e.** $P_{7\leqslant X\leqslant 14}(X < 15)$

Exercice 144
Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4; \frac{1}{4}\right)$
1. Construire le tableau résumant la loi de X.
2. A partir de ce tableau, calculer l'espérance de X.
3. Conjecturer l'expression de l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 145
On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 .
1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 3 obtenus. Que valent $P(X = 1)$ et $P(X \leqslant 3)$
2. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 5 ni de 6 sur l'ensemble des lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois le nombre 4 ?

Exercice 146
39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes de groupe A+ dans un échantillon de 183 personnes prises au hasard dans la population française.
1.a. Sous quelle hypothèse X suit-elle une loi binomiale ?
b. Pourquoi cette hypothèse est-elle raisonnable ?
c. On admet que cette hypothèse est vérifiée, préciser alors les paramètres de X.
2. On interroge 183 donneurs de sang et, parmi eux, 34 % sont du groupe A+. Les donneurs de sang sont-ils représentatifs de la population française sur ce critère ?

Exercice 147
On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe.
1. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur PILE ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 PILE ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 PILE ?

Exercice 148
Dans un petit service départemental d'incendie et de secours (SDIS) de la région Ile-de-France, la variable aléatoire X donnant le nombre d'interventions quotidiennes suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.
1. Déterminer la probabilités qu'il passe une journée sans aucune intervention.
2. Déterminer le nombre moyen d'interventions quotidiennes.
3. Sachant qu'une intervention a déjà eu lieu ce matin, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins trois interventions aujourd'hui ?

Exercice 149
Maxime est un cuisiner maladroit : à chaque fois qu'il fait un gâteau, il laisse tomber un œuf par terre avec une probabilité de $0,6$. S'il laisse tomber un œuf, il devra en prendre un autre qu'il ne laissera pas tomber.
Maxime fait un gâteau par semaine et chaque gâteau nécessite un seul œuf : de combien d'œufs aura-t-il besoin en moyenne chaque année de 52 semaines ?

6.3 Algorithmique en Python

Exercice 150
Soit n un entier naturel non nul fixé. On lance n fois une pièce supposée équilibrée et on note, pour chaque lancer, le côté face (F) ou pile $(\overline{F})$ obtenu. On note p_n la probabilité d'avoir au moins un « face » lors des n lancers.
Écrire un algorithme en Python qui détermine la plus petite valeur de n telle que $p_n \geqslant 0,9999$.

Exercice 151
1. Ecrire une fonction `bernoulli(p)` qui renvoie 0 ou 1 avec la probabilité p.
2. Ecrire une fonction `nombredesucces(n,p)` qui renvoie le nombre de succès (de 1) obtenus pour une répétion de n épreuves de Bernoulli.

CC BY NC SA

7 Fonction logarithme

7.1 Logarithme népérien

Exercice 152
Résoudre les équations :
$(E_1) : e^x = 5$ $(E_2) : \ln(x) = -5$ $(E_3) : \ln(2x-1) = -2$ $(E_4) : \ln(1+x) = 100$

Exercice 153
Résoudre les équations et inéquations :
a. $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$
b. $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 = 0$
c. $\ln(x^2-3) \leqslant \ln(x) + \ln(2)$
d. $2(\ln(x))^2 + 5\ln(x) - 3 > 0$

Exercice 154
Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.
a. $\ln(x) = 2$ **b.** $\ln(3x-4) = 0$ **c.** $e^{3x+2} = 4$
d. $2 + 3\ln(3x-2) = -1$ **e.** $\ln\left(e^{3x+4}\right) = 5$ **f.** $e^{x^2} = 7$
g. $\left(e^{2x+1} - 3\right)(3x-7)(e^x+5) = 0$ **h.** $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0$

Exercice 155
En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x} + 9e^x - 30 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 156
Pour tout réel x, on pose $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée cosinus hyperbolique de x.
1. Justifier que ch est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel $x, ch''(x) = \mathrm{ch}(x)$
2. En déduire la convexité de la fonction ch.
3. Pour tout réel $x \geqslant 1$, on pose $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.
a. Montrer que pour tout $x \geqslant 1, ch \circ f(x) = x$
b. On admet que pour tout réel $x, \mathrm{ch}(x) \geqslant 1$. Montrer que $f \circ \mathrm{ch}(x) = x$.

7.2 Propriétés algébriques

Exercice 157
Simplifier les écritures suivantes
a. $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6)$
b. $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1)$
c. $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27)$
d. $\ln\left(3x^2\right) - \ln(3)$ avec $x > 0$

Exercice 158
Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.
1. $\ln 8$ **2.** $\ln(\sqrt{2})$ **3.** $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$ **4.** $3\ln 2 - \ln 16$

Exercice 159
Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.
1. $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$ **2.** $\ln 441$ **3.** $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$ **4.** $\ln\sqrt{21}$

Exercice 160
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x > 0$, $\ln\left(4x^2\right) + 6\ln(x) - 3 = 0$

Exercice 161
Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x^2-1\right) - \ln\left(x^2+2x+1\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

Exercice 162
Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

Exercice 163
Montrer que pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right) = \ln\left(1+e^x\right) - x$.

7.3 Fonction logarithme népérien

Exercice 164
Soit f et g les fonctions définies par les expressions

$$f(x) = \ln(x+3) + \ln(x-2) \quad \text{et,} \quad g(x) = \ln(x^2 + x - 6)$$

Déterminer l'ensemble de définition de f et de g. Que peut-on dire de ces deux fonctions ?

Exercice 165
Soit f la fonction définie sur $\left]0; \frac{1}{\mathrm{e}}\right[\cup \left]\frac{1}{\mathrm{e}}\ ; +\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Exercice 166
Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
1. $f(x) = 3x + 5 - \ln x$ **2.** $f(x) = \ln x + x^4$ **3.** $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4\ln x$ **4.** $f(x) = (\ln x)(x+1)$

Exercice 167
Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle I indiqué.
1. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ sur $I =]0\,;1[$ **2.** $f(x) = (\ln x)^2(3 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$
3. $f(x) = (2 - \ln x)(1 - \ln x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$ **4.** $f(x) = \mathrm{e}^{5\ln x + 2}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

Exercice 168
On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x + x^2$.
1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3.Dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 169
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.
1. $f : x \mapsto \ln(5x-3)$ **2.** $g : x \mapsto \ln(-8x+4)$ **3.** $h : x \mapsto \ln(-7x)$ **4.** $k : x \mapsto \ln(x^2-2x+1)$

Exercice 170
Dans chaque cas, calculer $f'(x)$ sur l'intervalle I.
1. $f(x) = \ln(5x-1)$, $I = \left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$
2. $f(x) = \ln(9 - x^2)$, $I =]-3\,;3[$
3. $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$, $I = \mathbb{R}$

Exercice 171
Dans chaque cas, étudier les limites de f aux bornes de l'intervalle I.
1. $f(x) = \ln(6 - 2x)$, $I =]-\infty\,;3[$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$, $I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x - 1)$, $I =]0\,;+\infty[$

Exercice 172
Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \ln(3x-1)$
1. Justifier que f est bien définie sur $\left]\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
3. Pour tout réel $x > \dfrac{1}{3}$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 173
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe de f.
3 Étudier les variations de f.

7.4 Logarithme népérien et suites

Exercice 174
En 2015, la population d'une ville compte
250 000 habitants. Chaque année, cette population diminue de 2 %. À partir de quelle année la population passera-t-elle au-dessous de 100 000 habitants ?

Exercice 175
Un capital est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Au bout de combien d'années, ce capital aura-t-il plus que doublé ?

Exercice 176
Un individu ayant une migraine a absorbé un comprimé qui contient 500 mg de paracétamol. Cette molécule a une demi-vie de 2 heures, c'est-à-dire que la moitié du produit est éliminé au bout de 2h. Combien de temps faut-il attendre pour que 99 % du médicament ait disparu de l'organisme ?

Exercice 177
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
1. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n.
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $S_n > 5,999$.

Exercice 178
Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln n - 2n$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$.
4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(n+2) - \ln(3n)$.

Exercice 179
Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

7.5 Fonction logarithme népérien : Vers le supérieur

Exercice 180
Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

Exercice 181
Y-a-t-il un point de la courbe représentative du logarithme tel que la tangente à cette courbe représentative passant par ce point passe par l'origine ?

Exercice 182
Montrer que l'équation

$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x-1}$$

possède exactement une solution α dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 183
Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Exercice 184
Simplifier les expressions suivantes :

1. $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$; **2.** $\log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$

8 Continuité, dérivation et convexité

8.1 Continuité d'une fonction

Exercice 185
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.
1. Tracer la courbe représentative de f.
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$.

Exercice 186
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{5} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{9+4\sqrt{5}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. est-elle continue en 0 ?

Exercice 187
On considère la fonction $x \mapsto E(x)$, appelée fonction « partie entière » et qui, à tout x réel, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Par exemple, $E(3,6) = 3$ et $E(-1,78) = -2$.
1. Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $]-4;4]$.
2. La fonction partie entière est-elle continue ?

8.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 188
Soit la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par : $f(x) = 0,4x^5 - 8x - 3$.
1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.
3. Chercher une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une calculatrice (arrondir à 0,01 près).

Exercice 189
1. Montrer que l'équation : $-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$ admet une unique solution réelle α.
2. Avec une calculatrice, encadrer α au dixième près.

Exercice 190
Soit f la fonction polynôme de degré 2 : $f : x \mapsto 4x^2 - 8x + 7$.
1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ en fonction de la valeur réelle de k.

Exercice 191
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - 1$.
1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 192
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ et $g(x) = x + 2$.
1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique α dans $[-1\ ;\ 0]$. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?
3. Donner un encadrement de α à 0,001 près à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 193
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.
1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 194
Montre que l'équation $2e^{2x} = \sqrt{5-x}$ admet une unique solution α sur $]-\infty;5]$ et que $\alpha \in [0;1]$.

Exercice 195
Montre que l'équation $2(x-1)e^{x-1} = x^2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [1,7;1,8]$.

8.3 Application aux suites

Exercice 196

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Vérifier que si $x \in [0; 6]$, alors $f(x) \in [0; 6]$.
3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0; 6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 197

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 198

Soient f une fonction continue sur I, (u_n) une suite d'éléments de I et $v_n = f(u_n)$.
1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.
2. Quel lien peut-on alors faire entre la limite de (u_n) et celle de f ?

Exercice 199

Soient f la fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3.a. Montrer, par récurrence, que (u_n) est une suite positive et décroissante.
3.b. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 200

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{u_n + 1}{e^{u_n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier les variations de la fonction $f\colon x \mapsto 3 - \dfrac{x+1}{e^x}$ pour $x \in [0; +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer, en utilisant la méthode par balayage, un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. Montrer, par récurrence sur n, que (u_n) est croissante et majorée par α.
5. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 201

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$. On a $u_0 = 1,5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
1. Dresser le tableau de variations de f sur $[1; 2]$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in [1; 2]$, $f(x) \in [1; 2]$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [1; 2]$.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).
5. En déduire la convergence de (u_n) et déterminer alors sa limite.

Exercice 202

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.
3. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

 CC BY NC SA

8.4 Rappels sur la dérivation

Exercice 203
Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

$f_2(x) = \dfrac{1}{3x+4}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{4x+5}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{4x-5}$

$f_5(x) = \dfrac{3}{2x+1}$

$f_6(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

$f_7(x) = \dfrac{2}{1-5x}$

$f_8(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f_9(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

$f_{10}(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

$f_{11}(x) = \dfrac{3x-1}{x+4}$

$f_{12}(x) = \dfrac{5x+6}{2x-3}$

$f_{13}(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$f_{14}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

$f_{15}(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+1}$

$f_{16}(x) = \dfrac{2}{3x^2-5}$

$f_{17}(x) = \dfrac{8}{4+7x^2}$

$f_{18}(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$

$f_{19}(x) = \dfrac{x^3}{x+3}$

$f_{20}(x) = \sqrt{3x+1}$

$f_{21}(x) = \sqrt{5x-2}$

$f_{22}(x) = \sqrt{1-7x}$

$f_{23}(x) = \sqrt{3x^2+9}$

$f_{24}(x) = \sqrt{x^2+7x-3}$

$f_{25}(x) = \cos(2x+3)$

$f_{26}(x) = \sin(5x-4)$

$f_{27}(x) = (2x+4)^3$

$f_{28}(x) = (5x-1)^3$

$f_{29}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f_{30}(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

8.5 Composition de fonctions

Exercice 204
Soit f une fonction définie par $f(x)$. Déterminer son ensemble de dérivabilité D', puis calculer $f'(x)$.

1. $f(x) = x^3 - 3 + 3\sqrt{x}$ **2.** $f(x) = \left(4x^3 + 2x - 1\right)^4$ **3.** $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

4. $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^3$ **5.** $f(x) = e^{5x-2}$ **6.** $f(x) = \left(\sqrt{4x}\right)^3$

Exercice 205
Soit f une fonction définie et dérivable en x_0 de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère.
Calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$, puis donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+7}{x^2+1}$ $x_0 = 1$ **2.** $f(x) = (2x-1)^{11}$ $x_0 = 0$

3. $f(x) = 3x - 2\sqrt{-x} - \dfrac{5}{x}$ $x_0 = -1$ **4.** $f(x) = \sqrt{5-2x}$ $x_0 = 2$

5. $f(x) = e^{2x}$ $x_0 = 1$

Exercice 206
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1 $f(x) = x^2 + e^x$ **2.** $f(x) = e^{2x}$ **3.** $f(x) = xe^x$ **4.** $f(x) = (e^x)^2$

5. $f(x) = x^2e^x$ **6.** $f(x) = e^{x^2+1}$ **7.** $f(x) = e^{x^3+2x}$ **8.** $f(x) = \dfrac{e^{x^2-4}}{e^{3x+1}}$

8.6 Dérivée seconde

Exercice 207
Calculer les dérivées secondes des fonctions suivantes.

$f_{31}(x) = \dfrac{1}{2x+3}$

$f_{32}(x) = \dfrac{1}{3x+4}$

$f_{33}(x) = \dfrac{1}{4x+5}$

$f_{34}(x) = \dfrac{1}{4x-5}$

$f_{35}(x) = \dfrac{3}{2x+1}$

$f_{36}(x) = \dfrac{4}{2x+3}$

$f_{37}(x) = \dfrac{2}{1-5x}$

$f_{38}(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f_{39}(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

$f_{40}(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$

$f_{41}(x) = \dfrac{3x-1}{x+4}$

$f_{42}(x) = \dfrac{5x+6}{2x-3}$

$f_{43}(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$f_{44}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

$f_{45}(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+1}$

$f_{46}(x) = \dfrac{2}{3x^2-5}$

$f_{47}(x) = \dfrac{8}{4+7x^2}$

$f_{48}(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$

$f_{49}(x) = \dfrac{x^3}{x+3}$

$f_{50}(x) = \sqrt{3x+1}$

$f_{51}(x) = \sqrt{5x-2}$

$f_{52}(x) = \sqrt{1-7x}$

$f_{53}(x) = \sqrt{3x^2+9}$

$f_{54}(x) = \sqrt{x^2+7x-3}$

$f_{55}(x) = \cos(2x+3)$

$f_{56}(x) = \sin(5x-4)$

$f_{57}(x) = (2x+4)^3$

$f_{58}(x) = (5x-1)^3$

$f_{59}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f_{60}(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

8.7 Convexite des fonctions dérivables

Exercice 208
Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$ Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. En utilisant la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, établir que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $2\sqrt{x} \leqslant x+1$.

Exercice 209
Soit h une fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$ Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. En utilisant la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, établir que pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} \geqslant 2 - x$.

Exercice 210
Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -8x^3 + 48x^2$

Exercice 211
Voici le tableau de variation de la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-7\ ;\ 5]$.

x	-7		-2		-1		5
$f'(x)$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. Déterminer le sens de variation de f.
2. Déterminer la convexité de f.
3. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f.

Exercice 212
Voici le tableau de signe de la fonction dérivée seconde $f"$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $]-10\ ;\ 10[$.

x	-10		-3		1		10
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

1. Déterminer le sens de variation de la fonction dérivée f'. **2.** Déterminer la convexité de f ainsi que les abscisses d'éventuels points d'inflexion.

Exercice 213
Tracer dans un repère une courbe $\mathcal{C}$ pouvant représenter une fonction f définie sur $[-1\ ;\ 5]$ telle que : f est convexe sur $[1\ ;\ 5]$ et concave sur $[-1\ ;\ 1]$; $f(1) = 2$; $f'(1) = -1$.

Exercice 214
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 6$.
1. Conjecturer la convexité de f à l'aide de la calculatrice.
2. Déterminer le signe de $f"(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Infirmer ou confirmer la conjecture émise à la première question.

Exercice 215
Soit f la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.
1. Donner la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisses 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 216
Soit f une fonction dérivable et convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2x + 1$. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
1. $f(0) > 0$. **2.** $f(3) < -5$. **3.** $f(-2) \geqslant 5$.

8.8 Continuité, dérivation et convexité : Vers le supérieur

Exercice 217
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \notin \{0, -1, 1\} \\ 0 & \text{si } x = 0, -1, 1 \end{cases}$$

En quels points g est-elle continue ?

Exercice 218
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 219
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

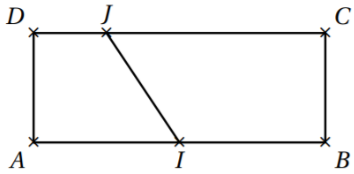
Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 220
Démontrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{R}_+^*$.

9 Orthogonalité, distances et géométrie analytique dans l'espace

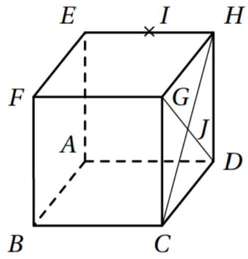
9.1 Produit scalaire dans l'espace

Exercice 221



Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 1,5$.
Soit I le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $4\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DC}$.
Calculer les produits scalaires suivants :
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{JI}$ **3.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JI}$ **4.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{JI}$

Exercice 222



On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.
Soient I le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$.

1. Donner les coordonnées du point G dans le repère :
a. $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ **b.** $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$ **c.** $(H\,;\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HG})$
2. Même question avec le point B et J.

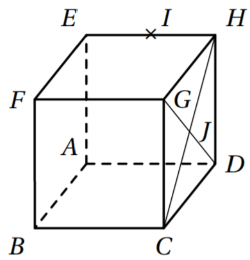
Exercice 223

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\ 2\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$. On note θ la mesure en degrés de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Calculer :
1. $\|\vec{u}\|$ **2.** $\|\vec{v}\|$ **3.** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **4.** θ

Exercice 224

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. Calculer :
1. $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ **2.** $\vec{v} \cdot (-\vec{u} + 2\vec{v})$ **3.** $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ **4.** $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

Exercice 225



On considère le cube suivant, d'arête $a > 0$ où I est le milieu de $[EH]$ et J le centre de la face $CDHG$. En considérant des décompositions sur les arêtes du cube, exprimer en fonction de a les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{FH}$ **2.** $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IH}$ **3.** $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{IF}$
4. $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EJ}$ **5.** $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ **6.** $\overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{CH}$

Exercice 226

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1\,;-2\,;3)$, $B(-1\,;0\,;1)$ et $C(2\,;1\,;0)$.
Calculer, au dixième de degré près, une mesure des angles :
1. $\widehat{ABC}$ **2.** $\widehat{BAC}$ **3.** $\widehat{ACB}$

Exercice 227

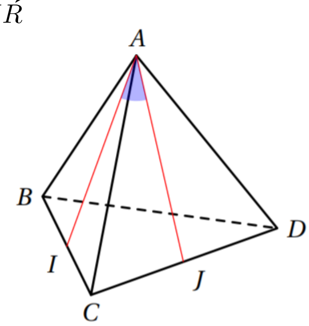
A l'aide des formules de polarisation, retrouver les valeurs manquantes.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$\|\vec{u} + \vec{v}\|$	$\|\vec{u} - \vec{v}\|$
	3	2	4	
5	2			$\sqrt{3}$
8	3	4		

Exercice 228

Dans un tétraèdre $HARU$, on donne $HA = 2$, $HR = 3$ et $AR = 4$.
1. A l'aide des formules de polarisation, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HR}$
2. En déduire une mesure arrondie au dixième de degré près de l'angle $\widehat{RHA}$

Exercice 229



On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ d'arête 2.
Soit I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[CD]$.

1.a. Calculer les longueurs AI, AJ et IJ. **1.b.** En déduire la valeur de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$. **2.** En déduire une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, au dixième de degré près.

9.2 Orthogonalité

Exercice 230
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix}$ **2.** $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\2\end{pmatrix}$ **3.** $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\\24\end{pmatrix}$ **4.** $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Exercice 231
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

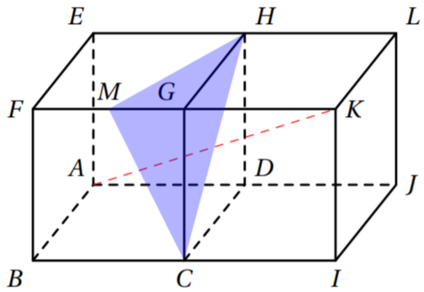
Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Exercice 232
Même exercice que le précédent avec les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k+1\\-k\\2\end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 233
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1\,;2\,;1)$, $B(4\,;6\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.
1. Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

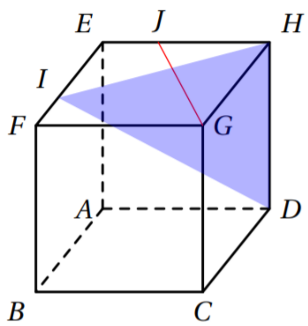
Exercice 234
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les quatre points $A(-1\,;1\,;2)$, $B(1\,;0\,;-1)$, $C(0\,;3\,;1)$ et $D(-8\,;2\,;-3)$.
1. Démontrer que les points A, B et C définissent bien un plan.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal à ce plan.

Exercice 235
On considère deux cubes, disposés comme dans la figure associée. M est le milieu de $[FG]$. On souhaite démontrer que (AK) est orthogonale au plan (MHC).



1. Démontrer que $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{CM}$, puis en déduire la valeur de ce produit scalaire.
2. En suivant cette méthode, calculer $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{HM}$.
Conclure.

Exercice 236
On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. On a I et J tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1. Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2. Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3. En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).
4. Démontrer que le point d'intersection entre le plan (IHD) et la droite (GJ) a pour coordonnées $\left(\frac{4}{13}\,;\frac{7}{13}\,;1\right)$ dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

9.3 Algorithmique en Python

Exercice 237
Écrire une fonction `norme` en Python qui prend en entrée trois réels x, y et z et qui renvoie la norme d'un vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

Exercice 238
Proposer une fonction en Python qui renvoie la distance entre deux points.

Exercice 239
Proposer une fonction `orthogonaux` en Python prenant en paramètres deux listes représentant deux vecteurs de l'espace pour qu'elle renvoie True si les deux vecteurs sont orthogonaux et False s'ils ne le sont pas.

Exercice 240
Proposer une fonction `repere` en Python prenant en paramètres trois listes représentant trois vecteurs de l'espace pour qu'elle renvoie True si les trois vecteurs sont orthogonaux deux à deux et False s'ils ne le sont pas.

Exercice 241
Écrire une fonction `sphere` en Python qui prend en argument :
• une liste représentant les coordonnées d'un point A de l'espace ;
• une liste de 3 listes représentant chacune les coordonnées d'un point de l'espace.

Cette fonction doit renvoyer `True` si les trois points données dans le deuxième paramètre sont sur une même sphère de centre A. Elle doit renvoyer `False` dans le cas contraire. On pourra écrire une fonction distance qui prend en paramètres deux listes de trois nombres représentant chacune les coordonnées d'un point de l'espace et qui renvoie la distance entre ces deux points dans un repère orthonormé.

Exercice 242
2. Écrire une fonction `regulier` en Python qui prend en paramètres quatre listes de trois nombres représentant les coordonnées de quatre points de l'espace et qui renvoie `True` si le tétraèdre formé par les quatre points est régulier. Cette fonction renvoie `False` dans le cas contraire.

10 Primitives et équations différentielles

10.1 Détermination de primitives

Exercice 243
Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3x$ et $F(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$.
1. Vérifier que F est une primitive de f.
2. Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x_0 = -1$

Exercice 244
oit F et G les fonctions définies sur $]-1;+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{3x^2+4x}{x+1}$ et $G(x) = \dfrac{3x^2-x-5}{x+1}$
F et G sont-elles primitives d'une même fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$

Exercice 245
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto -3$ **2.** $x \mapsto 2x - \dfrac{1}{3}$ **3.** $x \mapsto \dfrac{x^2}{3} - x$ **4.** $x \mapsto 3x^2 + \dfrac{2x}{3} - 7$

Exercice 246
Déterminer sur $]0:+\infty[$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$ vérifiant $F(1) = -1$.

Exercice 247
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = e^x$ vérifiant $F(0) = e$.

Exercice 248
Déterminer sur $\mathbb{R}$ la primitive de F de la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 2x$ vérifiant $F(1) = 2$.

Exercice 249
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$ sur $]-\infty;-2[$

2. $x \mapsto \dfrac{2}{(x+3)^2}$ sur $]-3;+\infty[$

Exercice 250
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto \dfrac{x}{(x^2+2)^3}$ sur $\mathbb{R}$

2. $x \mapsto \dfrac{3x^2}{(x^3-1)^4}$ sur $]1;+\infty[$

Exercice 251
Dans chaque cas, déterminer une primitive de la fonction donnée.

1. $x \mapsto e^x - 2e^{-x}$

2. $x \mapsto \dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

3. $x \mapsto \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$

4. $x \mapsto \dfrac{9x^2-3}{(x^3-x)^2}$

Exercice 252
Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 1$ et $F\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + \dfrac{1}{2}$ et $F(1) = 0$.

3. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2} + 1$ et $F(1) = 2$.

4. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x^2}$ et $F(1) = -\dfrac{1}{4}$.

5. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \dfrac{1}{x^2}$ et $F(1) = 1$.

Exercice 253
Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

1. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{3}{(2x-1)^3}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(x^2+2x-3)^3$.

3. f est définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$.

Exercice 254
Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

1. f est définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{4}{(1-2x)^2}$ et $F\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(2t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

10.2 Équations différentielles et fonctions de référence

Exercice 255
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = 2$

2. $y' = 1 - 2x$

3. $y' = 5x - 3$

4. $y' = x^2$

5. $y' = x^3$

6. $y' = 3x^2 + 2x + 1$

Exercice 256
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{x^3}$ définies sur $]0;+\infty[$.

Exercice 257
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définies sur $[0;+\infty[$.

Exercice 258
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = -e^x$.

Exercice 259
Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' = -2e^{-2x}$ **2.** $y' = 4e^{-5x}$ **3.** $y' = -2e^{6x-7}$ **4.** $y' = xe^{-x^2}$

Exercice 260
Déterminer une équation différentielle dont une solution est $x \mapsto 4e^{5x}$.

Exercice 261
Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 262
Soit f la fonction définie sur $I =]0; 1[$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$.

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 263
Soit f la fonction définie sur $I =]-1; 1[$ par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

1. Factoriser l'expression $(x^2 - 1)^3$.

2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^3} + \dfrac{b}{(x+1)^3}$.

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

Exercice 264
Résoudre les équations différentielles après les avoir transformées, en précisant l'ensemble de définition des solutions

1. $x^2 y' = -1$ **2.** $\sqrt{x}y' + 1 = 0$ **3.** $x^4 y' = 3(x-1)^2$ **4.** $e^{2x} y' = -e^x$

Exercice 265
1. Montrer que l'équation différentielle $y' = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{\sqrt{x-1}}$ admet sur $I =]1; +\infty[$ une solution de la forme $x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{x-1}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions sur I de cette équation.

10.3 Équations différentielles avec condition initiale

Exercice 266
Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = x - 1$ telle que $F(1) = -1$.

Exercice 267
Déterminer la solution F de l'équation différentielle $y' = x^2 - x + 1$ telle que $F(0) = 0$.

Exercice 268
Déterminer la solution F de $y' = x^3 + x + \dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $F(1) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 269
Déterminer la solution F de $y' = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^5}$ définie sur $\mathbb{R}^{-*}$ telle que $F(-1) = 1$.

Exercice 270
Déterminer la solution sur I de l'équation différentielle donnée qui prend la valeur y_0 en x_0

1. $y' = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $x_0 = 2$ et $y_0 = -\sqrt{2}$ **2.** $y' = 3e^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 1$ et $y_0 = e$

Exercice 271
Déterminer la solution sur I de l'équation différentielle donnée qui prend la valeur y_0 en x_0.

1. $y' = \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = -\dfrac{1}{16}$ **2.** $y' = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$ avec $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$

10.4 Equation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Exercice 272

Dans chaque cas, déterminer les solutions de l'équation différentielle donnée.

1. $y' - \dfrac{1}{2}y = 0$ **2.** $2y' - 3y = 8y + 4y'$ **3.** $5y' + 3y = 0$ **4.** $-\dfrac{3}{2}y' - \sqrt{2}y = 0$

Exercice 273

Déterminer la solution F de l'équation différentielle donnée qui respecte la condition précisée.

1. $y' - \sqrt{2}y = 0$ avec $F(\sqrt{2}) = 1$ **2.** $2y' - 3y = 2y + 3y'$ avec $F(0) = 5$ **3.** $\dfrac{1}{2}y' + y = \dfrac{1}{2}y - y'$ avec $F(3) = \dfrac{1}{e}$

Exercice 274

Dans chacun des cas suivant, déterminer une équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel et dont la fonction f est une solution.

1. $f : x \mapsto -3e^{\frac{x}{2}}$ **2.** $f : x \mapsto -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$ **3.** $f : x \mapsto 2e^{3-2x}$ **4.** $f : x \mapsto \pi e^{\pi + x}$

Exercice 275

Résoudre les équations différentielles :

a. $\begin{cases} y' = 2y + 3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 4y' = 2y - 3 \\ y(5) = -1 \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 3y' + 4y - 6 = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 3u' = u + 6 \\ u(0) = 5 \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} 5p = 2p' - \frac{1}{4} \\ p(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 276

Soit f la solution de l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 1$ telle que $f'(1) = 2$.

1. Déterminer $f(1)$.

2. Déterminer la solution f.

10.5 Equation différentielle de la forme $y' = ay + f$ avec $a \neq 0$

Exercice 277

Montrer que $\varphi : x \mapsto 3x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 9x$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 278

Après avoir déterminé une fonction affine φ : solution particulière de l'équation différentielle $(E) : 2y' - y = 2x$, déterminer la solution F de (E) telle que $F(0) = -2$.

Exercice 279

Montrer que $\varphi : x \mapsto x^2 - x - 1$ est solution particulière de l'équation différentielle
$(E) : y' - 3y = 3x^2 + x + 2$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 280

Montrer que $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$ est solution particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + y = e{-}x$, puis donner toutes les solutions de (E).

Exercice 281

Déterminer une fonction φ de la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^{-2x}$ (où a et b sont réels) solutions particulière de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = (2x + 1)e{-}2x$, puis donner toutes les solutions de cette équation.

Exercice 282

Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière φ de la forme indiquée.

1. $2y' + y = x + 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$ **2.** $y' + 3y = 2x - 1$ avec $\varphi(x) = mx + p$

3. $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ **4.** $2y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ avec $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$

Exercice 283
Déterminer les solutions de l'équation différentielle en cherchant une solution particulière φ de la forme indiquée.

1. $y'+3y = (2+2x)e^{-2x}$ avec $\varphi(x) = (mx+p)e^{-2x}$

2. $y' + y = (3-2x)e^x$ avec $\varphi = (mx+p)e^x$

3. $y' - 2y = -(3x^2+x+2)e^{-x}$ avec $\varphi = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

4. $y'+2y = -\left(2x^2 - x + \dfrac{1}{2}\right)e^{2x}$ avec $\varphi = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

Exercice 284
Soit (E) l'équation différentielle $2y' = 3y + 6x + 1$.
1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x) = ax + b$ est solution de (E).
2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 285
On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 3e^{-3x}(-6x+1)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-3x}(-9x^2 + 3x + 19)$.
1. Dresser le tableau de variation de g. Préciser les limites.
2. Montrer que la fonction g est solution de (E).
3. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 3y = 0$.
4. Résoudre alors (E).
5. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en $\dfrac{1}{3}$.

10.6 Primitives et équations différentielles : Vers le supérieur

Exercice 286
On considère l'équation différentielle d'inconnue y : $(E) : y'' - y' - 2y = 2xe^x$. Cette équation différentielle est une équation du econd ordre avec second membre.

1. Soient A et B deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}$ définie sur $\mathbb{R}$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0) : y'' - y' - 2y = 0$. On admet que toutes les solutions de (E_0) sont de cette forme.
2. Déterminer une solution particulière φ de (E) de la forme $x \mapsto (mx+p)e^x$ où m et p sont réels.
3. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que g et g' soient dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g - \varphi$ est solution de (E_0).
4. Résoudre (E) et déterminer la solution de h de (E) telle que $h(0) = 1$ et $h'(0) = 0$.

Exercice 287
On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y : $(E) : y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$. Cette équation différentielle est une équation du second ordre avec second membre.

1. Montrer que l'équation (E) admet comme solution une fonction polynôme du second degré φ que l'on déterminera.
2. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que g et g' sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Démontrer que g est solution de (E) si, et seulement si, $g - \varphi$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - y' - 6y = 0$.
3. On admet que si l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle du second ordre $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b et c étant réel) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de $ay'' + by' + cy = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B sont des réels.
a. Résoudre l'équation (E_0).
b. En déduire les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.

11 Calcul intégral

11.1 Intégrale et primitives

Exercice 288
Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} \sqrt{2}dx$ **b.** $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}dx$ **c.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} \left(x^2+3x+4\right)dx$

d. $\displaystyle\int_{0}^{10} e^{-5x}dx$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^4-x^2+x-1\right)dx$ **f.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(8x^5+5x^3+2x\right)dx$

g. $\displaystyle\int_{0}^{1} e^{2x}dx$ **h.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}dx$ **i.** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2x)-3\sin(5x))dx$

j. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}dx$ **k.** $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}dx$ **l.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}dx$

Exercice 289
Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \left(x^5+2x^3-2x\right)dx$ **b.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2xe^{x^2}dx$ **c.** $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\pi}} x\cos\left(x^2\right)dx$

d. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \cos(x)dx$ **e.** $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}dx$ **f.** $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}dx$

Exercice 290
Pour tout réel $x>-1$, on pose $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x>-1$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$

3. Calculer alors $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)dx$

Exercice 291
On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{, si } x<-1 \\ 2x^3-x+1 & \text{, si } x\geqslant -1\end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$

Exercice 292
On souhaite calculer l'intégrale suivante : $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

1. Expliquer pourquoi $f: x\mapsto \dfrac{x}{x+1}$ ne correspond à aucune forme de dérivée connue.

2. En remarquant que $x=x+1-1$, démontrer que pour tout $x\neq -1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=\alpha+\dfrac{\beta}{x+1}$ où α et β sont deux réels à déterminer.

3. En déduire que $I=1-\ln(2)$.

Exercice 293
En remarquant que pour tout réel t, $t^3=t^3+t-t$, calculer la valeur de : $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{t^3}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 294
Calculer l'intégrale suivante : $I=\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{3u^2+2u-1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 295

Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$.

Exercice 296

Calculer astucieusement les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \left(x - \frac{1}{e^{-x}}\right) \mathrm{d}x \qquad J = \int_1^2 2xe^{x^2+x} \,\mathrm{d}x + \int_1^2 e^{x^2+x} \,\mathrm{d}x$$

Exercice 297

Soit f et g deux fonctions continues sur $[1;2]$ telles que : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ et $\displaystyle\int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -3$.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 (5f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{2}{3}g(x)\right) \mathrm{d}x$

Exercice 298

Réduire chacune des expressions suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{x^2} - 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^{-2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x - \int_3^1 \mathrm{d}u + \int_3^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

11.2 Intégration par parties

Exercice 299

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)dx$.

Exercice 300

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)dx$.

Exercice 301

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^2 4xe^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 xe^{4+5x}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\displaystyle\int_0^1 -xe^x\,\mathrm{d}x$ **4.** $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+3)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 302

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 2x^3e^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(5x+3)^2}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{5x}{(3x-9)^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice 303

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 3x^2e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle\int_0^2 4(2x+1)^3e^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 304

A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 305

En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx$

Exercice 306

Calculer les intégrales données à l'aide d'une double intégration par partie :

1. $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{3}{2}x^5e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\displaystyle\int_{-1}^0 x^5e^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\displaystyle\int_{-1}^3 x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x$ **4.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 307
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

Exercice 308
On pose $I = \int_0^\pi e^x \cos(x)dx$
1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^\pi e^x \sin(x)dx$
2. A l'aide d'une nouvelle intégration par parties, montrer que $I = e^\pi - 1 - I$.
3. En déduire la valeur de I.

11.3 Suite définie par une intégrale

Exercice 309
L'exercice a pour objet d'étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel par les relations

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx, I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx, \ldots, I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \ldots$$

1. Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.
En déduire les valeurs de I_2 et I_3.
3. Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0; 1]$.
En déduire, sans essayer de calculer I_n, que la suite (I_n) est croissante.
5.a. Montrer que, pour tout nombre $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{1+e^x} \leqslant \frac{1}{2}$
b. En déduire un encadrement de (I_n) ; à cet effet, on calculera $\int_0^1 e^{nx}dx$
c. Quelle est la limite de la suite (I_n)?

Exercice 310
La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 (1 + t^n)\, \mathrm{d}t$
1. Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2. Est-elle convergente ?

Exercice 311
Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $I_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$
1. Démontrer que $\frac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}$
2. La suite (I_n) est-elle convergente ?
3. On pose pour tout entier naturel non nul : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 312
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^n e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n.
1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n < \frac{e}{2}$.
3. Que peut-on dire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 313
Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, \mathrm{d}x$.
A l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 314
Soit (I_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.
1.a. Calculer I_0 et I_1.
b. Exprimer I_2 en fonction de I_1, puis en déduire I_2.
c. Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2.a. Démontrer que, pour tout entier n, $I_n \geq 0$.
b. Étudier le sens de variation de la suite I.
c. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
3.a. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
b. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{ne}$.
c. En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 315
Soit la suite (u_n) de nombres réels définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

11.4 Calcul intégral : Vers le supérieur

Exercice 316
Soit f la fonction définie sur $[0, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0, 3]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0, 3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0, 3]$?

Exercice 317 *Série harmonique alternée*
Pour $n \geqslant 0$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Démontrer que la suite (I_n) tend vers 0.
2. Pour $n \geqslant 0$, calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 318
Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$ **2.** $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Exercice 319
Pour $n \geqslant 1$, donner une primitive de $\ln^n x$.

12 Loi des grands nombres

12.1 Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Exercice 320
Majorer la probabilité d'avoir un écart à la moyenne supérieur ou égal à 2 lorsque $V(X) = 1$.

Exercice 321
Majorer la probabilité demandée dans les cas suivants.

1. $P(|X - E(X)| \geqslant 2)$, avec $V(X) = 2$.

2. $P(|X - E(X)| \geqslant 20)$, avec $V(X) = 10$.

3. $P(|X - E(X)| \geqslant 7)$, avec $V(X) = 12$.

4. $P(\{X \leqslant 3\} \cup \{X \geqslant 17\})$, avec $E(X) = 10$ et $V(X) = 5$.

Exercice 322
On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est la suivante :

x_i	1	4	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P(|X - E(X)| \geqslant 2)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $a = 2$ et comparer le résultat à celui obtenu à la question précédente.

Exercice 323
Sur les vingt matchs précédents, une équipe de rugby a marqué 602 essais. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'essais marqués au cours d'un match.
1. Que vaut l'espérance de X ?
2. On suppose que la variance est égale à $0,67$. Majorer la probabilité qu'au cours du prochain match, l'écart entre le nombre d'essais marqués est la moyenne soit supérieur ou égal à 1.
3. Minorer la probabilité que l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit strictement inférieur à 2.

Exercice 324
Dans un gare, le nombre moyen de passagers par jour est évalué à 5000 avec une variance de 2500. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de visiteurs enregistré lors d'une journée et la moyenne soit supérieur ou égale à 100.

Exercice 325
Un horticulteur a créé une variété de rosier qu'il a nommé la « Bien-aimée de Tchebychev » (oui c'est nul, mais ce n'est pas la question). Il a établi que l'espérance du nombre de pétales d'une rose de cette variété était 60 et l'écart-type 1,5.
Il vend un rosier qui, pour l'instant, ne présente qu'une fleur. Celle-ci ne doit pas s'écarter du modèle standard dont le nombre de pétales se situe, selon l'horticulteur, dans un intervalle de 57 à 63 pétales.
Nous ne faisons aucune hypothèse sur la loi de probabilité que suit le nombre de pétales d'une rose de cette variété.

Minorer la probabilité que le nombre de pétales de la rose vendue se situe dans l'intervalle désiré.

Exercice 326
Quelqu'un joue 1 000 fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.

Minorer sa probabilité d'obtenir entre 480 et 520 faces à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis comparer le résultat obtenu avec celui que donne la loi binomiale.

Exercice 327
Dans une gare, le nombre moyen de passagers par jour est évalué à 5000 avec une variance de 2500.

Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de visiteurs enregistré lors d'une journée et la moyenne soit supérieur ou égal à 100.

12.2 Inégalité de concentration

Exercice 328
On lance n fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. on note M_n le nombre moyen de 5 obtenus. A l'aide de l'inégalité de concentration, déterminer la valeur minimale de n pour respecter les condition suivantes :
1. $a = 0,05$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0,1$.
2. $a = 0,02$ et $P(|M_n - E(X)| \geqslant a) \leqslant 0,05$.
3. $a = 0,1$ et $P(|M_n - E(X)| < a) \geqslant 0,95$.
4. $a = 0,01$ et $P(|M_n - E(X)| < a) \geqslant 0,99$.

Exercice 329
On effectue n tirage avec remise d'une carte d'un jeu de 32 cartes. Pour le i-ième tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la carte est un pique et 0 sinon.
1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$?

Exercice 330
Dans une classe de 25 élèves, 10 sont des garçons. On effectue n tirages avec remise d'un élève de cette classe pour l'interroger.
Pour le i-ème tirage, on note X_i la variable aléatoire valant 1 si la personne interrogée est un garçon et 0 sinon.
1. Donner l'espérance et la variance de X_i.
2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire moyenne $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
3. Quelle est la valeur minimale de n, pour laquelle la probabilité de s'écarter de l'espérance d'au moins $0,1$ soit inférieur à $0,05$?

Exercice 331
On souhaite démontrer l'inégalité de concentration. Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. Pour l'entier i compris entre 1 et n, on note X_i des variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi de probabilité que X. On note enfin $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
1. Rappeler l'inégalité de concentration.
2. Démontrer que $E(M_n) = E(X)$.
3.a. Justifier que $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = n(V(X)$.
3.b. Démontrer alors que $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$.
4. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur M_n pour démontrer l'inégalité de concentration.

12.3 Loi des grands nombres : Vers le supérieur

Exercice 332
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé fini Ω.
On suppose qu'elles sont deux à deux indépendantes, qu'elles ont même espérance m et même variance σ^2.
On pose $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P(|S_n - m| \geq \varepsilon) \to 0$$

Exercice 333
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes. On suppose que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on souhaite démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$
1. Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la loi faible des grands nombres ?
2. Quelle est l'espérance de S_n ? Sa variance ? Démontrer que $V(S_n) \leqslant n$.
3. En déduire le résultat.

13 Fonctions trigonométriques

13.1 Calculs avec cosinus et sinus

Exercice 334
En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Exercice 335
Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

Exercice 336
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1. $\sin(3\pi+x)$ **2.** $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$ **3.** $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ **5.** $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **6.** $3\sin(\pi+x)-2\sin(\pi-x)+4\sin(x-\pi)$

Exercice 337
1. Étant donné que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 338
Établir pour tous réels x et y les égalités suivantes.

1. $\sin(x+y)\cos(x-y)=\sin x\cos x+\cos y\sin y$ **2.** $1-\sin 2x=(\cos x-\sin x)^2$.

3. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$

Exercice 339
1. Simplifier l'expression suivante : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
2. Établir l'égalité suivante : $\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{(\sin 3x)^2}{\sin 2x\sin x}$
3. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation suivante : $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$

13.2 Equations et inéquations avec cosinus et sinus

Exercice 340
Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in]-\pi;\pi]$.

a. $\cos(x)=\frac{1}{2}$ **b.** $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\cos(x)=0$ **d.** $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 341
Résoudre l'équation $\cos(x)^2-\frac{1}{2}=0$ sur $[0;2\pi]$.

Exercice 342
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$

a. $\cos(x)\leqslant\frac{1}{2}$ **b.** $\cos(x)\geqslant 0$ **c.** $\cos(x)\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\cos(2x)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 343
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$

a. $2\cos(x)+1>2$ **b.** $-\frac{1}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $1-\sqrt{3}\leqslant-2\cos(2x)+1\leqslant 0$

Exercice 344
Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{4}$ **2.** $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ **3.** $\cos 2x = \cos \dfrac{\pi}{4}$ **4.** $\cos x = \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $2\cos 2x = 1$ **6.** $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **7.** $\cos 2x = \cos x$ **8.** $\sin 3x = \cos x$

Exercice 345
Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ **3.** $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **4.** $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **2.** $\cos x = -\sin x$

Exercice 346
1. Sur un cercle trigonométrique, représenter les ensembles suivants :

a. $\cos x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\ ;\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$ **b.** $\sin x$ sur $\left[\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \dfrac{7\pi}{3}\right]$

2. À l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$:

a. $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b.** $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ **c.** $\cos x < 0$

Exercice 347
Résoudre sur $]-\pi\ ;\ \pi]$ les équations suivantes :

1. $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ **2.** $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **3.** $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$
4. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$ **5.** $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$

13.3 Périodicité et parité du cosinus et sinus

Exercice 348
Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(10\pi x)$ $T = 0,2$ **2.** $f : x \mapsto \cos\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $T = \dfrac{\pi}{2}$
3. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{10x-1}{3}\right)$ $T = \dfrac{3\pi}{5}$ **4.** $f : x \mapsto \dfrac{2}{5}\cos(3\pi x)$ $T = \dfrac{2}{3}$

Exercice 349
Vérifier que la fonction f est T-périodique.

1. $f : x \mapsto \sin(6x-3)$ $T = \dfrac{\pi}{3}$ **2.** $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $T = \pi$
3. $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $T = \pi$ **4.** $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x - 3\right)\cos x$ $T = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 350
Étudier la parité des fonctions suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto x^2+4$ **2.** $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ **3.** $f_3 : x \mapsto \dfrac{1+x^2+x^4}{x(x^2+x^4)}$ **4.** $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$
5. $f_6 : x \mapsto |x|$ **6.** $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$ **7.** $f_8 : x \mapsto \cos(x+\pi)$

Exercice 351
Soit $k \in]0;+\infty[$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos(kx)$, définie sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{2\pi}{k}$ -périodique.

13.4 Fonctions trigonométriques

Exercice 352
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel $x, m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Exercice 353
On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

a. $f_1 : x \mapsto \cos(3x) + x$

b. $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

c. $f_3 : x \mapsto \cos\left(e^x\right)$

d. $f_4 : x \mapsto (\sin(x))^3$

e. $f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$

f. $f_6 : x \mapsto \ln\left(1+\cos(x)^2\right)$

Exercice 354
Le but de cet exercice est de prouver d'une nouvelle manière que pour tout réel x, $(\cos(x))^2+(\sin(x))^2 = 1$.
Pour tout réel x, on pose $f(x) = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.
1. Que vaut $f(0)$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Conclure.

Exercice 355
Pour tout réel x, on pose $f(x) = x + \cos(x)$.
1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.

Exercice 356
On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = \sin(x) - \dfrac{x}{2}$. Étudier les variations de f sur $[-\pi, \pi]$ puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

13.5 Fonctions trigonométriques : Vers le supérieur

Exercice 357
Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\cos(x)-\sin(x) & = & \sqrt{3}+\frac{1}{2} \\ \cos(x)+2\sin(x) & = & \frac{\sqrt{3}}{2}-1. \end{array}\right.$$

Exercice 358
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
1. $2\cos^2 x - 9\cos x + 4 \geq 0$.
2. $\cos 5x + \cos 3x \geqslant \cos x$.

Exercice 359
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$.
Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 360
Déterminer la valeur de $\arctan(-1/2)$ $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ et $\arctan(\sqrt{3})$.

Exercice 361
Calculer

$$\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right),\quad \arccos\left(\cos\frac{-2\pi}{3}\right),\quad \arccos\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

Exercice 362
Simplifier les expressions suivantes :

$$\tan(\arcsin x),\quad \sin(\arccos x),\quad \cos(\arctan x).$$

Exercice 363 *Polynômes de Chebychev*
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n\arccos x)$ et $g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Prouver que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

14 Quelques citations

« Apprends comme si tu devais vivre pour toujours et vis comme si tu devais mourir ce soir. »

Mohandas Karamchand Gandhi

« Beaucoup d'hommes ayant échoué ne savaient pas à quel point ils étaient proches du succès quand ils ont abandonné. »

Thomas Edison

« Ce n'est pas parce que c'est difficile qu'on n'ose pas le faire, mais parce qu'on n'ose pas le faire que c'est difficile. »

Sénèque

« Celui qui n'investit pas sur le long terme ne connaîtra pas le court terme »

Michaël Aguilar

« Le talent ne suffit pas. A part quelques rares exceptions, les meilleurs joueurs sont les plus gros travailleurs. »

Magic Johnson

« Le courage, ce n'est pas de commencer, ni de terminer, c'est de recommencer. »

Earl Nightingale

« Croyez en vos rêves et ils se réaliseront peut-être. Croyez en vous et ils se réaliseront sûrement. »

Martin Luther King

« Vous ne pouvez pas épuiser votre créativité. Plus vous l'utilisez, plus vous en avez. »

Maya Angelou

« La façon la plus courante des gens à abandonner leur pouvoir est de penser qu'ils n'en ont pas. »

Alice Walker

« Ne pensez pas à l'échec, pensez aux opportunités que vous risquez de manquer si vous n'essayez pas. »

Jack Canfield

« Je recrute des hommes capables d'ignorer la phrase « ce n'est pas possible. » »

Steve Jobs

« Si personne ne vous critique, cela signifie que vous ne faites pas grand-chose. »

Jack Welch

« Si vous fermez la porte à tous les échecs, le succès restera dehors. »

Jim Rohn

« Nous ne pouvons pas devenir ce que nous voulons devenir en restant ce que nous sommes. »

John Fitzgerald Kennedy

« La volonté de gagner est importante, mais la volonté de se préparer compte davantage. »

Mohamed Ali

« Derrière chaque réussite, vous trouverez quelqu'un qui a pris une décision courageuse. »

Peter Drucker

« Si vous avez un travail où il n'y a pas de complications, vous n'avez pas de travail. »

Malcolm Forbes

« Pour pouvoir contempler un arc-en-ciel, il faut d'abord endurer la pluie. »

Proverbe chinois

« L'échec est l'épice qui donne sa saveur au succès. »

Truman Capote

« Le seul endroit où le succès précède le travail est dans le dictionnaire. »

Vidal Sassoon