Coquillages & Poincaré

Recueil d'exercices - Annexe des Deltas

Terminale Option Mathématiques complémentaires

NASSIRI Mohamed

Recueil d'exercices (Annexe des Deltas)
Terminale Option Mathématiques complémentaires

Mohamed NASSIRI

Table des matières

Plusieurs exercices ont été repris et/ou inspirés des planches d'exercices de Yoann Morel, Paul Milan, David Delaunay et Jason Lapeyronnie.
Qu'ils en soient grandement remerciés ici !

Ad astra per aspera

1 Suites numériques

1.1 Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1
(u_n) est une site arithmétique de raison r.
1. Exprimer u_n en fonction de n si $u_0 = 2$ et $r = \dfrac{1}{2}$
2. $u_2 = 41$ et $u_5 = -13$. Calculer u_{20}
3. $u_1 = -2$ et $r = 3$. Calculer u_{20} puis $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$
4. $u_0 = -3$ et $r = -2$. Calculer u_{25} et u_{125} puis $S = u_{25} + u_{26} + \cdots + u_{125}$.

Exercice 2
(u_n) est une suite géométrique de raison q.
1. $u_1 = 5$ et $q = \dfrac{2}{3}$. Exprimer u_n en fonction de n
2. $u_4 = 1$ et $u_9 = 25\sqrt{5}$. Calculer q puis u_{14}
3. $q = 2$ et $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 24\ 573$. Calculer u_0.

Exercice 3
1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$ est géométrique.
2. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 4
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,7)^n$ **2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,85)^n$ **3.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times (0,6)^n$ **4.** $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times (1,7)^n$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+5\times(1,8)^n$ **6.** $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 - 2 \times (0,75)^n$ **7.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n}$ **8.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + n^2$

Exercice 5
On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3% par an avec intérêts simples (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3% du capital initial). On note U_n le capital obtenu au bout de n années.
1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

Exercice 6
On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3% par an avec intérêts composés (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3% du capital de l'année précédente). On note U_n le capital obtenu au bout de n années.
1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé ?

Exercice 7
On dispose d'un échantillon d'os fossiles contenant initialement $M_0 = 10$ grammes de carbone 14. On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de $1,2\%$ par siècle et on note M_n la masse en grammes de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles.
1. Justifier que (M_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer M_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

Exercice 8
La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante). On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.
1. Justifier que la suite (U_n) est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium. On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
a. Exprimer U_n en fonction de n.
b. Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.
c. Au bout de combien d'années la masse de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 5 milligramme ?

Exercice 9
Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20% de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée. On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.
1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.

Exercice 10
Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note $P_0 = 500000$ la population initiale, $P_1 = 700000$ la population au bout de un an et P_n la population au bout de n années. On a donc, pour tout $n, P_{n+2} - P_{n+1} = 0,5\,(P_{n+1} - P_n)$.
1. Calculer P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - 0,5P_n$
a. Montrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n.
b. Montrer que (V_n) est une suite constante. En déduire la valeur de V_n, pour tout n.
c. Montrer que $2\,(V_n - U_n) = P_n$ et exprimer P_n en fonction de n. d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

1.2 Suites arithmético-géométriques et homographiques

Exercice 11
(u_n) est une suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$
1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ est arithmétique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 12
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - 6$
1. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 13
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n \end{cases}$ On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = 13u_n - 4$
1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n et de a.

Exercice 14
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$
1. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Exercice 15
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 150$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 45$.
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 225$.
1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
2. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 225 - 75 \times 0,8^n$.

Exercice 16
On considère la suite (u_n) définie pour $u_0 = 27500$ et pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n. Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3900$
1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 23600 \times 1,04^n + 3900$

Exercice 17
On considère la suite (u_n) définie par la relation : $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 5$ pour tout entier naturel n.
1. Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n + 10$ pour tout entier naturel n.
a. Montrer que la suite (v_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n$.
b. Donner la nature de la suite (v_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.
c. Donner la formule explicite donnant l'expression du terme v_n en fonction de son rang n.
2. Déduire des questions précédentes, la formule explicite de la suite (u_n).

Exercice 18
Soit (u_n) définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation : $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$)
On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.
Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Exercice 19
Un plan de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) a été mis en place dans une zone industrielle. On estime que, pour les entreprises déjà installés sur le site, les mesures de ce plan conduisent à une réduction des émissions de 2 % d'une année sur l'autre et que, chaque année, les implantations de nouvelles entreprises sur le site génèrent 200 tonnes de GES en équivalent CO_2.
En 2005, cette zone industrielle a émis 41 milliers de tonnes de CO_2 au total.
Pour tout entier naturel n, on note un le nombre de milliers de tonnes de CO_2 émis dans cette zone industrielle au cours de l'année $2005 + n$.
1. Déterminer u_0 et u_1.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,98 \times u_n + 0,2$.
On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 10$.
a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,98. Préciser son premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 31 \times 0,98^n + 10$.

Exercice 20
Un loueur de voitures dispose au 1^{er} mars 2015 d'un total de 10 000 voitures pour l'Europe. Afin d'entretenir son parc, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25 % de son parc automobile et d'acheter 3 000 voitures neuves.
On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite :
Pour tout entier naturel n, on note un le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1^{er} mars de l'année $2015 + n$. On a donc : $u_0 = 10000$.
1. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,75u_n + 3000$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 12000$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser son premier terme.
b. Exprimer v_n en fonction de n.
Déterminer la limite de la suite (v_n).
c. Justifier que, pour tout entier naturel n : $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.
d. En vous appuyant sur les réponses données aux deux questions précédentes, que pouvez-vous conjecturer sur le nombre de voitures que comptera le parc automobile de ce loueur au bout d'un grand nombre d'années ?

Exercice 21
Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger. En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante : chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.
1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - 25000$
a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,9$ et préciser son premier terme.
b. En déduire que, pour tout entier n : $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.
c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Justifier.

Exercice 22
Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile des repas à des personnes dépendantes. En 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service. Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évaluation peut être modélisée de la façon suivante : Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés. Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnemments à ce service.
Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n) où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année $2015 + n$.
On a ainsi, $u_0 = 600$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,95u_n + 80$.
On admet que les termes de la suite (u_n) admettent en fonction du rang n l'expression : $u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$.
La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas. Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement ?

2 Lois de probabilités discrète

2.1 Conditionnement et indépendance

Exercice 23
Soit A et B deux événements dont nous savons que : $p(A) = 0,35$, $p_A(B) = 0,42$ et $p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,18$.
1. Placer les données sur un arbre pondéré.
2. Compléter l'arbre avec les probabilités manquantes.

Exercice 24
Soit A et B deux événements.
1. On donne : $p(A) = 0,45$ et $P(A \cap B) = 0,15$. Calculer $p_A(B)$.
2. On donne : $p(A) = 0,38$ et $p_A(B) = 0,5$. Calculer $P(A \cap B)$.
3. On donne : $P(A \cap B) = 0,18$ et $p_A(B) = 0,6$. Calculer $p(A)$.

Exercice 25
On dispose des informations suivantes sur une société :
(1) Elle comporte 40% de cadres.
(2) 20% des cadres sont des femmes.
(3) Parmi les employés qui ne sont pas cadres, 60% sont des femmes.

On prend au hasard la fiche d'un des employés et on considère les événements suivants :
C : « L'employé est un cadre » ; F : « L'employé est une femme ».
1. Traduire les données en termes de probabilités, en utilisant les événements C et F.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Calculer la probabilité pour qu'un employé interrogé soit une femme cadre.

Exercice 26
Dans un lycée, 98% des élèves de première générale disposent d'une connexion Internet à leur domicile. 99% des élèves qui disposent de cette connexion, ont également un téléphone portable.
La proportion d'élèves ayant un téléphone portable est deux fois moins grande parmi ceux qui n'ont pas de connexion Internet à leur domicile.
Les élèves de première générale ont rempli une fiche indiquant leurs moyens de communication. On tire au hasard l'une de ces fiches.
1. Traduire les informations données par l'énoncé en termes de probabilités.
2. Quelle est la probabilité que cet élève ne dispose ni de connexion Internet, ni de téléphone portable.

Exercice 27
Une maladie affecte le cheptel bovin d'une région. On estime que 10% des bovins sont atteints.
Un test permet de diagnostiquer la maladie et on établit que :

- quand un animal est malade, le test est positif dans 85% des cas ;
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

Un animal est pris au hasard dans le cheptel bovin de cette région.
1. Indiquer deux événements liés à cette situation et préciser les deux événements contraires.
2. Construire un arbre pondéré représentant cette situation et adapté aux hypothèses.
3. Déterminer la probabilité que le test soit erroné.

Exercice 28
On teste l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus
ayant un taux de glycémie anormalement élevé.

- Dans cette expérimentation, 50% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placébo.

On étudie la baisse du taux de glycémie après l'expérimentation.

- On constate une baisse significative de ce taux chez 80% des individus ayant pris le médicament.
- On ne constate aucune baisse significative pour 90% des individus ayant pris le placébo.

On tire au hasard la fiche de l'une des personnes de cet échantillon. Calculer la probabilité que son taux de glycémie ait baissé significativement.

Exercice 29
Un revendeur achète des pièces à trois fournisseurs A, B et C. 60% de sont stock provient de A, 15% de B et le reste de C. 2% des pièces venant de A sont défectueuses, ainsi que 1% de celles venant de B et $0,5$% de celles qui viennent de C.
Chaque pièce est référencée. On tire au hasard l'une de ces références.
1. Quelle est, arrondie au millième, la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. La pièce choisie est défectueuse. Calculer une valeur approchée de la probabilité qu'elle provienne du fournisseur A.

Exercice 30
A l'entrée d'un parc d'attraction, on peut acheter son billet soit à un guichet, soit à une caisse automatique. Dans les deux cas, on peut payer soit par carte bancaire, soit en argent liquide.
80% des clients choisissent d'aller au guichet et utilisent alors leur carte bancaire dans 5% des cas.
Les utilisateurs de la caisse automatique paient par carte bancaire dans 65% des cas.
Chaque jour, on tire au hasard une des contremarques pour désigner l'heureux bénéficiaire du remboursement de son billet.

Calculer la probabilité pour que le gagnant ait payé par carte bancaire.

Exercice 31
Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60% de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70% des garçons candidats et 80% des filles candidates.
On rencontre au hasard un candidat qui s'est présenté aux tests.
1. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire ?
3. Calculer la probabilité que ce candidat soit engagé.

Exercice 32
Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,9$. **2.** $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$ et $P(A \cap B) = 0,32$.
3. $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,95$. **4.** $P(A) = 0,48$, $P(B) = 0,25$ et $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 33
Soient A et B deux événements incompatibles de probabilités non nulle. Démontrer que A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 34
On considère deux événements A et B tels que $P(A) = p$, $P(B) = P(\overline{A})$ et $P(A \cap B) = 0,2p + 0,15$.
1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{R}$, $-p^2 + 0,8p - 0,15 = (0,3 - p)(p - 0,5)$
2. Trouver la probabilité p telle que A et B soient indépendants.

Exercice 35
On considère deux événements A et B tels que $P(A \cap B) = 0,8$ et $P(A \cup B) = 0,9$.
1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1,7x + 0,8 = (x - 0,85)^2 + 0,0775$.
2. Montre que A et B ne peuvent pas être indépendants.

2.2 Loi uniforme discrète

Exercice 36
1. Une boite contient 5 jetons portant le numéro 1, 5 jetons portant le numéro 2 et 5 jetons portant le numéro 3. On tire au hasard un jeton dans la boite et on note X le numéro du jeton tiré.
X suit-il une loi uniforme discrète ?
2. On lance un dé cubique à 6 faces. On gagne 1 euro si on tombe sur une face paire et 2 euros si on tombe sur une face impaire. On note X le gain.
X suit-il une loi uniforme discrète ?
3. On lance deux dés à 6 faces et on note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus.
X suit-il une loi uniforme discrète ?

Exercice 37
Dans chacun des cas suivants, on prélève un jeton au hasard dans un sac. X est la variable aléatoire donnant le numéro du jeton tiré.
1. Dire si X suit une loi uniforme. Si c'est le cas, donner sa loi de probabilité et son espérance.
2.a. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 30.
2.b. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Quinze jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et cinq jetons portent le numéro 3.
2.c. Le sac contient 30 jetons numérotés de 1 à 3. Dix jetons portent le numéro 1, dix jetons portent le numéro 2 et dix jetons portent le numéro 3.

Exercice 38
Une roue de loterie parfaitement équilibrée est partagée en 12 secteurs de même angle au centre. Chaque secteur est numéroté de 1 à 12. La roue est lancée puis s'arrête, de manière équiprobable, sur un secteur. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe 2 lorsque le numéro du secteur est pair et 1 lorsque le numéro du secteur est impair.
Déterminer la loi de Y, son espérance et calculer sa variance et son écart type.

Exercice 39
On considère l'équation $x^2 + bx + c = 0$ où le couple $(b; c)$ est obtenu de la manière suivante : b est le résultat du premier jet d'un dé équilibré tétraé-drique dont les faces portent les numéros 2, 3, 4, 5 ; c est le résultat du second jet du même dé. Chaque couple a la même probabilité d'apparition.
1. Soit B la variable aléatoire qui prend les valeurs obtenues lors du premier lancer.
Déterminer la loi de B.
2. Soit D la variable aléatoire qui prend la valeur. D suit-elle une loi uniforme ?
3. Soit S la variable aléatoire qui vaut 0 quand l'équation n'admet pas de solution et 1 sinon. Déterminer la loi de S.

2.3 Loi géométrique

Exercice 40
Sur le trajet d'un automobiliste se trouvent 10 feux tricolores numérotés de 1 à 10. On suppose que la probabilité qu'un feu soit rouge ou orange lorsqu'il se présente est égale à 0,6 et que les feux sont indépendants les uns des autres.
On note X le numéro du premier feu rouge et orange rencontré par l'automobiliste.
1. Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Quelle est la probabilité que les 4 premiers feux rencontrés soient verts.

Exercice 41
On lance une pièce de monnaie bien équilibrée plusieurs fois de suite et on s'arrête dès que l'on obtient Pile.
1. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête au bout de cinq lancers ?
2. On a déjà effectué 13 lancers et obtenu que des Face.
Quelle est la probabilité que l'on s'arrête au bout de 18 lancers ?

Exercice 42
On lance une pièce de monnaie mal équilibrée, dont la probabilitê de tomber sur pile est égale à $0,6$. On réalise plusieurs lancers de suite et on s'arrête dès que l'on obtient Pile.
1. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête au bout de cinq lancers ?
2. On a déjà effectué quatre lancers et obtenu que des Face. Quelle est la probabilité que l'on s'arrête au bout de onze lancers ?

Exercice 43
Le taux de réussite national a l'examen du permis de conduire est environ de 58%.
1. En supposant que ce taux est une probabilité de réussite et que les tentatives successives sont des évènements indépendants, quelle est la probabilité d'obtenir le permis au bout de trois tentatives ? Arrondir au millième.
2. Pourquoi l'hypothèse « les tentatives successives sont des évènements indépendants » est sans doute abusive ?

Exercice 44
Un professeur de mathématiques désigne, grâce à un programme simulant le hasard, l'élève qui vient en dêbut de cours corriger un exercice au tableau. Un élève peut passer plusieurs fois au tableau. Son programme choisit aléatoirement un nombre entre 1 et 35, et chaque nombre correspond à un élève de la classe. Le choix du nombre suit la loi uniforme sur $\{1; 2; \ldots ; 35\}$, et les tirages successifs sont indépendants. Sur la liste, un élève est le numéro 4. Arrondir tous les résultats au millième.
1. Quelle est la probabilité que sur les quatre cours de la semaine, cet elève ne passe pas au tableau ?
2. Quelle est la probabilité que cet élève passe au tableau pour la première fois lors du 15^{e} cours ?
3. Cet élève n'est pas passé au tableau pendant trente cours. Quelle est la probabilité qu'il y passe dans les dix cours qui viennent ?

Exercice 45
On appelle « fort épisode pluvieux cinquantennal » un intense épisode pluvieux dont la probabilité de survenir, chaque année, est de $\dfrac{1}{50}$ (en moyenne une fois tous les 50 ans).
A Henneveux dans le Pas-de-Calais, lors du dernier fort épisode pluvieux cinquantennal, il est tombé environ 90 mm d'eau en 20 h. Arrondir tous les résultats au millième.
1. Quelle est la probabilité que le prochain fort épisode pluvieux cinquantennal à Henneveux se produise dans un an ?
2.a. Quelle est la probabilité que le prochain fort épisode pluvieux cinquantennal a Henneveux survienne dans les cinq ans ?
2.b. Sachant que le demier épisode pluvieux cinquantennal à Henneveux s'est produit en 2013, la probabilité demandée à la question précédente est-elle différente ?

Exercice 46
Un client d'un opérateur téléphonique veut joindre le service clientèle. L'attente avant qu'un appel soit pris en charge par ce service a été modélisée de la manière suivante : le temps est compté en minutes entières. La probabilité que l'appel soit pris en charge durant la première minute est égale à 0,38. Le système de gestion des appels fait que la prise en charge d'un appel est considérée comme indépendante de la prise en charge des autres appels.
Le client adopte la stratégie suivante : si son appel n'a pas été pris au bout d'une minute, il raccroche et rappelle.
1. Quelle est la probabilité que son appel soit pris en charge au bout de la cinquième tentative ? Avant la cinquième tentative ?
2. Quelle est la probabilité que son appel soit pris en charge à sa dixième tentative ?
3. Le client a déjà fait 10 tentatives infructueuses. Quelle est la probabilité que son appel soit pris après la quinzième tentative ?

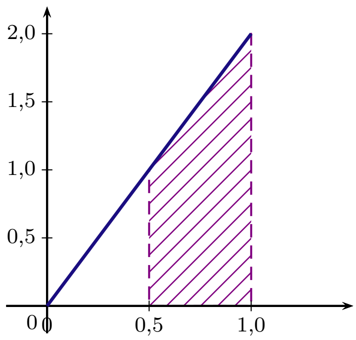
3 Lois de probabilités à densité

3.1 Notion de densité et paramètres d'une variable aléatoire à densité

Exercice 47
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $I = [0; 1]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f définie par $f(x) = 4x^3$.
1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0,3 \leqslant X \leqslant 0,6)$.

Exercice 48
Soit Z la variable aléatoire à valeurs dans $[-10; 10]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{2000}x^2$.
1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance de la variale aléatoire Z.
3. Déterminer le nombre réel a tel que $P(-a \leqslant Z \leqslant a) = 0,95$.

Exercice 49
La fonction f est définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2x$.
On considère une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité dont la fonction de densité est f.
Cette fonction de densité est représentée ci-dessous.

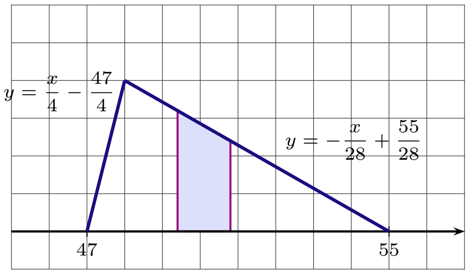


1.a. Quelle est la valeur, en unité d'aire, de la surface hachurée ? Préciser la démarche utilisée.
1.b. Interpréter ce résultat en terme de probabilité.
2. Calculer la probabilité $P(0 \leqslant X \leqslant 0,75)$.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 50
Soit b un réel strictement supérieur à 1 et f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[1; b]$.
1. Il est clair que f est positive. Montrer que f est continue.
2. Déterminer b pour f soit une densité.

Exercice 51

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[47;55]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{47}{4} & \text{si } 47 \leqslant x < 48 \\ -\dfrac{x}{28} + \dfrac{55}{28} & \text{si } 48 \leqslant x \leqslant 55 \end{cases}$.



Courbe représentative de la fonction f

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur l'intervalle $[47;55]$.
2. La fonction f est la densité de probabilité de la variable aléatoire C mesurant la capacité en ml du volume d'eau de parfum contenue dans un flacon pris au hasard dans la production d'une entreprise.
On a $C \in [47;55]$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $C \in [49,4;50,8]$.
4. Quelle est la probabilité que le flacon contienne moins de 50 ml d'eau de parfum ?
5. Calculer l'espérance mathématique de la variable C. Interpréter le résultat.

Exercice 52

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{e^{0,5x}}{2}\mathrm{d}x$.
2. En déduire que la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = \dfrac{e^{0,5x}}{2e-2}$ est une fonction de densité sur $[0;2]$.
3. Soit X la variable aléatoire de densité de probabilité f. La probabilité $P(X \geqslant 1,2)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

Exercice 53

On s'intéresse à la fonction f définie sur $]0\,; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
1.a. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,; +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.
1.b. Trouver un nombre réel $a > 1$ tel que $\displaystyle\int_1^a \ln x \mathrm{d}x = 1$.
On peut alors considérer la fonction ln comme une densité de probabilité sur l'intervalle $[1;a]$.
2. X est une variable aléatoire suivant la loi de densité ln sur l'intervalle $[1;a]$.
a. Calculer $p\,(X \leqslant 2)$.
b. Sachant que X est supérieur à 2, calculer la probabilité que X soit inférieur à 2,5.

3.2 Loi uniforme sur $[a;b]$

Exercice 54

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $I = [-2;2]$.
1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de X.
2. Calculer $P(X < 1)$ et $P(X \geqslant 1,5)$.
3. Calculer $P_{(X>0)}\,(X < 1)$.
4. Donner l'espérance de X.

Exercice 55

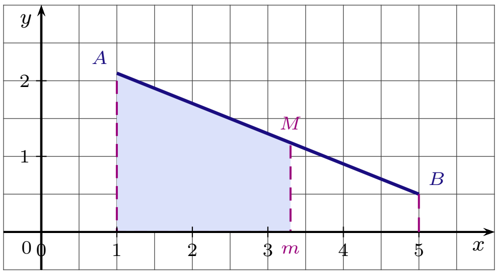
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$.
2. On choisit au hasard un nombre réel dans l'intervalle $[0;2]$.
a. Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'inéquation $9x^2 - 33x + 10 > 0$?
b. Quelle est la probabilité que ce nombre soit solution de l'équation $9x^2 - 33x + 10 = 0$.

Exercice 56
Je n'ai pas de monnaie pour payer le parking où ma voiture est stationnée.
Les agents municipaux passent aléatoirement une fois par jour durant les heures de stationnement payant de 9h à 19h.
Je compte laisser ma voiture là pendant 2h.
Quelle est la probabilité que je sois verbalisé ?

Exercice 57
Dans un supermarché, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1; 11]$.
1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X.
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre trois et cinq minutes ?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de huit minutes à la caisse ?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse.

Exercice 58
Soit $[AB]$ un segment de longueur 8 cm. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note D la variable aléatoire donnant la distance AM en cm.
1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire D ?
2. Calculer la probabilité que le point M :
a. soit le milieu I du segment $[AB]$;
b. soit à une distance inférieure à 3 cm du point A ;
c. soit plus près du point B que du milieu I.

Exercice 59
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le segment $[AB]$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 5]$ par $f(x) = -0,4x + 2,5$. On choisit au hasard un point M sur le segment $[AB]$ et on note m son abscisse.



1. Soit E l'évènement « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = m$ est inférieure à 4 ».
a. Justifier que la situation relève d'une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ que l'on précisera.
b. Calculer la probabilité de l'évènement E.
2. Calculer la probabilité de l'évènement F « l'aire de la partie du plan comprise entre le segment $[AB]$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = m$ est supérieure à 1 ».

Exercice 60
Deux bus passent à 8h15 et à 8h30 à un certain arrêt. Un usager se présente à cet arrêt entre 8 heures et 8 heures 30 et on note X la durée en minutes entre 8 heures et l'heure d'arrivée de cet usager à l'arrêt. X suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 30]$.
1. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le premier bus.
2. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le deuxième bus.
3. En déduire la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes un bus.

Exercice 61
Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[3; a]$. Déterminer la valeur de a sachant que $P(X < 7) = 0,8$.

3.3 Loi exponentielle

Exercice 62

Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[0;+\infty[$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x)=2e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction f définie bien une loi de probabilité.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer $P(n\leqslant Y\leqslant n+1)$.
3. Soit $m\in\mathbb{N}$, déterminer la probabilité que Y soit inférieure à m.
4. Soit p et q deux entiers naturels, $p\leqslant q$, déterminer la probabilité $P_{(Y\leqslant q)}(Y\leqslant p)$.

Exercice 63

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=10$.
1. Déterminer la probabilité $P(0\leqslant X\leqslant 10)$.

Soit a et b deux réels, $a\leqslant b$, déterminer la probabilité $P(a\leqslant X\leqslant b)$.
2. Déterminer la probabilité $P(X\geqslant 10)$.
3.a. Déterminer deux réels α et β tels que la fonction G définie par $G(x)=(\alpha x+\beta)e^{-10x}$ soit une primitive de $g(x)=10xe^{-10x}$.
3.b. En déduire l'espérance de X.

Exercice 64

Lorsqu'un téléphone portable devient défectueux et qu'il est encore sous garantie, le client peut le déposer dans un point de vente agréé pour réparation ou échange contre un appareil neuf. On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en jours, avant le retour de l'appareil, réparé ou échangé et on suppose que ce temps peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0,025$.
1. Quel est le temps moyen d'attente avant le retour de l'appareil ?
2. Quelles est la probabilité qu'un client doive attendre plus de 20 jours avant de récupérer son téléphone portable.

Exercice 65

La durée de vie (en années) d'un composant électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Suite à un contrôle de qualité, on estime que la durée de vie de ce composant ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675 .
1. Calculer la valeur du paramètre λ arrondie à 0,001 près.
2. Calculer la probabilité qu'un composant de ce type dure moins de 8 ans.
3. Calculer la probabilité qu'un composant de ce type dure plus de 10 ans.

Exercice 66

La durée de vie d'un noyau radioactif est une une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ et la demi-vie de cet élément radioactif est la durée T telle que $p(X\leqslant T)=0,5$.
1. Exprimer T en fonction de λ.
2. La durée de vie moyenne τ de l'élément radioactif est égale à l'espérance de la variable aléatoire X. Exprimer τ en fonction de la demi-vie T.

Exercice 67

Hakim se rend au guichet de sa banque. On modélise son temps d'attente, en minute, par une variable aléatoire X dont la fonction de densité est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-0,5x}$, où k est une constante positive. Pour tout réel $a>0$, on note :

$$F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

1. Justifier que, pour tout réel $a>0$, on a $F(a)=k\left(2-2\mathrm{e}^{-0,5a}\right)$. Exprimer $\lim\limits_{a\to+\infty}F(a)$ en fonction de k puis en déduire la valeur de k.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants.
a. A : « Hakim attend moins de 2 minutes ».
b. B : « Hakim attend entre 3 et 4 minutes ».
c. C : « Hakim attend plus de 10 minutes ».

4 Séries statistiques à deux variables

4.1 Séries statistiques doubles

Exercice 68
Calculer les coordonnées du point moyen de la série suivante :

x_i	200	205	208	211	215
y_i	5200	5400	5600	5900	6400

Exercice 69
Déterminer x et y pour que le point moyen de la série soit de coordonnées $(7,5; 12,6)$.

x_i	8,2	7,4	x	6,1	9
y_i	15	12,1	16,3	y	12

Exercice 70
Une entreprise a relevé sur les cinq dernières années son budget annuel en publicité (en centaine d'euros) et le volume annuel de ventes (en millier d'unités).
Ce relevé est donné dans le tableau suivant :

Budget publicitaire	32	33	35	36	37	38
Ventes	50	51	54	54,9	56	58,1

1. Placer sur un graphique les points correspondants au volume de ventes en fonction du budget publicitaire.
2. Estimer le volume des ventes pour un budget publicitaire de 3400 euros.
Même question pour des bugets publicitaires de 3000 euros puis de 5000 euros.

Exercice 71
Le PDG d'une entreprise analyse la production, en tonnes, sur les dix dernières années.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Production	49	48	51	56	58	57	61	65	66	68

1. Représenter sur un graphique les points correspondants à la production, en tonnes, suivant l'année.
2. Estimer la production l'année suivante, puis cinq ans après.

Exercice 72
On considère la série statistique à deux variables :

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
y_i	13	23	34	44	50	65	75	90

1. Dans un repère, représenter le nuage de point $(x_i; y_i)$ correspond.
2. Un ajustement affine semble-t-il pertinent.
3. Tracer une droite d'ajustement.
4. Estimer la valeur de y pour $x = 45$ *(extrapolation)*.
5. Estimer la valeur de x pour $y = 70$ *(interpolation)*.

4.2 Ajustement affine

Exercice 73
À partir des données suivantes, déterminer l'équation de la droite d'ajustement par moindres carrés.

x_i	10	45	30	60	40
y_i	40	75	56	90	64

Représenter sur un graphique le nuage de points et la droite trouvée.

Exercice 74
À partir des données suivantes, déterminer l'équation de la droite d'ajustement par moindres carrés.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	15	13	10	8	4

Représenter sur un graphique le nuage de points et la droite trouvée.

Exercice 75
Avec les données de l'exercice précédent,
1. Estimer la valeur y_i obtenue pour une valeur $x_i = 2,5$.
2. Estimer la valeur y_i obtenue pour une valeur $x_i = 6$.

Exercice 76
On considère la série statistique à deux variables :

x_i	5	10	15	20	25	30	35	40
y_i	13	23	34	44	50	65	75	90

1. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement à l'aide de la calculatrice.
2. Estimer la valeur de y pour $x = 45$.
3. Estimer la valeur de x pour $y = 70$.

Exercice 77
Le tableau suivant donne le nombre de clients annuel, en millier, d'une nouvelle chaîne de magasins.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de clients	11,2	20,6	29,7	37,0	39,6	41,7	44,5	48,0

1. Représenter le nuage de points $(x_i; y_i)$ du nombre de clients en fonction du rang de l'année.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés.
Pour la suite, on utilisera l'ajustement affine donné par la droite D d'équation $y = 4,9x + 16,7$.
3. Tracer la droite D sur le nuage de points précédent.
4. Prévoir à l'aide de ce modèle le nombre de clients en 2015 et 2016.

Exercice 78
On considère la série statistique double ci-dessous.

x_i	1	3	4	6	7	8
y_i	11,1	13	14,5	16	16,9	19

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$.
2. Calculer les coordonnées du point moyen et placer ce point dans le repère.
3. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite dans le repère. (a et b seront arrondis à 0,01 près).

Exercice 79
Le tableau suivant donne la moyenne y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge x.

âge x_i	36	42	48	54	60	66	70
tension y_i	12	13	13,6	14,3	15,4	15,8	16

1. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés et tracer cette droite dans le repère. (a et b seront arrondis à 0,01 près).
2. Quelle serait la tension théorique d'une personne de 75 ans en utilisant le modèle de la droite des moindres carrés ? (arrondir le résultat à 0,1 près)

4.3 Corrélation et ajustements

Exercice 80
Soit les données suivantes :

Période	1	2	3	4	5
Observations t_i	21	9,5	7	4,9	4

1. Représenter le nuage de points.
2. Comme ce nuage fait penser à une hyperbole (fonction inverse), on décide de l'approximer par une courbe d'équation $y = \dfrac{20}{x}$.
Valider ce choix par un changement de variable approprié.
3. On suppose que l'ajustement est bon. Déterminer une prévision pour $t = 8$.

Exercice 81
Le tableau suivant indique la teneur en CO_2 depuis 1850 .

Année	1850	1900	1950	1990
Rang de l'année : x_i	0	50	100	140
Teneur en CO_2 : y_i	275	290	315	360
$z_i = \ln(y_i - 250)$				

1. Compléter dans le tableau la ligne indiquant $z_i = \ln(y_i - 250)$.
2. Donner une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés. (a et b seront arrondis à 0,01 près)
3. Selon ce modèle, quel serait le taux de CO_2 en 2050 ? (donner le résultat à une unité près)

Exercice 82
Un étude sur la solubilité d'un médicament en fonction de la température de l'eau a donné les résultats suivants :

Température x_i	20	30	40	50	60	70
Solubilité s_i	10,30	10,59	10,81	11	11,15	11,28
$y_i = \mathrm{e}^{s_i}$						

1. Compléter dans le tableau la ligne indiquant $y_i = \mathrm{e}^{s_i}$. (arrondir à l'unité près)
2. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. (a et b seront arrondis à l'unité près)
3. En déduire l'expression de la solubilité S en fonction de x en suivant ce modèle.

Exercice 83
Un nuage de points $A_i(x_i; y_i)$ est tel que $\ln y_i = 2x_i + 5$. Écrire y_i en fonction de x_i. (on écrira y_i sous la forme Ae^{Bx_i} en arrondissant A à 0,01 près).

Exercice 84
Après un accident nucléaire, on procède à intervalles de temps réguliers à des mesures de radioactivité sur un site donné. Le tableau suivant donne les résultats de ces mesures.

Rang x_i de la mesure	1	2	3	4	5	6
Valeur y_i mesurée	100	61	37	22	14	7

Pour chaque mesure on pose $z_i = \ln y_i$ et on étudie alors la série statistique $(x_i; z_i)$.
1. Compléter le tableau :

Rang x_i de la mesure	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

2. Calculer le coefficient de corrélation de cette série à 0,001 près.
Commenter le résultat.
3. Donner une équation de la droite D de régression de z en x (on arrondira les coefficients à 0,01 près).
4. En déduire une relation entre x et y du type $y = \alpha e^{\beta x}$, où α et β sont deux constantes à déterminer.
5. En supposant que le modèle reste valable, en déduire pour la prochaine mesure $(x_i = 7)$ une estimation de y.
6. En supposant toujours que le modèle reste valable, déteminer à partir de quelle mesure la valeur y mesurée sera inférieure à $0,01$.